Annalen der Physik und Chemie





ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XVIII.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XVIII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT VIER UND FÜNFZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

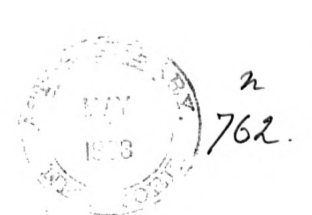
G. WIEDEMANN.

NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1883.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.



Inhalt.

Neue Folge. Band XVIII.

Erstes Heft.

Geschlossen am 15. December 1882.

Zweites Heft.

Geschlossen am 10. Januar 1883.

Drittes Heft.

Viertes Heft.

Nachweis zu den Figurentafeln.

1883. ANNALEN № 1.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XVIII.

I. *Ueber das Radiometer;*
von Ernst Pringsheim.

Die Unsicherheit und Meinungsverschiedenheit, die immer noch über die Ursache der Bewegung im Radiometer und den ähnlichen Apparaten besteht, scheint darauf zu beruhen, dass in der That auf die Bewegung dieser Instrumente eine ganze Reihe verschiedener Dinge von wesentlichem Einfluss ist, deren Wirkungen sich gegenseitig so ergänzen und stören, dass durch die Complicirtheit der verschiedenen Resultate die Gesetzmässigkeit in ihnen oft verdunkelt wird.

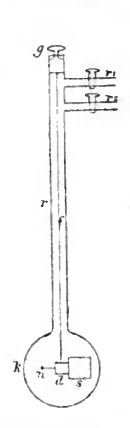
Fragen wir uns, welche Dinge auf die Radiometerbewegung von Einfluss sein können, so sind dies zunächst die verschiedenen Theile des Apparates selbst, nämlich die Glashülle, das eingeschlossene Gas und die Flügel. Der einzig richtige Weg also, die Wirkungsweise der radiometrischen Apparate zu studiren, wird der sein, den Einfluss dieser verschiedenen Theile experimentell möglichst zu sondern und jeden derselben einzeln zu behandeln.

Apparat.

Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, sind die gewöhnlichen Radiometer höchst ungeeignet, da sich bei ihnen die Erscheinungen dadurch sehr compliciren, dass die bewegende Kraft immer an mehreren Flügeln gleichzeitig auftritt, so dass eine etwaige entgegengesetzte Wirkung zweier Flügel erst durch besondere Experimente constatirt werden muss. Dabei ist es immer noch sehr schwer, den Theil der Bewegung, der von einem Flügel allein herrührt, wirklich festzustellen, da hierbei häufig störende Lichtreflexe eintreten, die besonders, wenn es sich darum handelt, die Wirkung heller auf der Rückseite geschwärzter Flächen bei Bestrah-

lung der hellen Seite zu constatiren, oft geeignet sind, die ganze Bewegung umzukehren. Ausserdem ändern die Radiometerflügel bei ihrer Rotation so schnell ihre Stellung gegen die Wärmequelle und damit zugleich die wesentlichen Bedingungen der Bewegung, dass dadurch etwaige, an einem Flügel auftretende, der Zeit nach getrennte, verschiedenartige Erscheinungen vollständig verwischt und unkenntlich werden. Endlich gehört auch eine relativ grosse Kraft dazu, den Reibungswiderstand zu überwinden und das Radiometer in Rotation zu versetzen, sodass dasselbe ein verhältnissmässig unempfindlicher Apparat ist.

Diese Uebelstände werden vermieden, wenn man statt eines Radiometers einen sogenannten Torsionsapparat anwendet, wie Crookes mehrere construirt hat. Bei diesen hat man es in der Regel — wenn es nicht darauf ankommt, Differenzwirkungen mehrerer Flächen zu beobachten — mit einem einzigen Flügel zu thun, der an einem Faden aufgehängt ist und bei der Bestrahlung um einen gewissen Winkel abgelenkt wird, bis die Torsion des Fadens der wirkenden Kraft das Gleichgewicht hält. Einen solchen Apparat, der jedoch einfacher eingerichtet war, als die meisten Crookes'schen, stellte ich mir her, und mit diesem habe ich die unten näher beschriebenen Versuche ausgeführt.



Derselbe bestand aus einem 435 mm langen und 22 mm im Durchmesser betragenden Glasrohr *r* (s. Figur), das an einem Ende in eine Kugel *k* von 80 mm Durchmesser ausgeblasen war. Das andere Ende der Glasröhre hatte ein Schliffstück, in welches ein geschliffener Glasstöpsel *g* luftdicht einpasste. An einen kleinen aus dem Stöpsel hervorragenden Haken wurde ein sehr feiner 420 mm langer Glasfaden *f* angekittet, an dessen anderem Ende ein kleines, hinten versilbertes, sehr dünnes, mikroskopisches Deckgläschen *d*

als Spiegel befestigt war. Auf die Rückseite dieses Spiegelchens wurde das eine Ende des als Flügel dienenden rechteckigen Scheibchens *s* von 24 mm Länge und 16 mm Breite mit heissem Klebwachs aufgekittet, während auf der anderen Seite durch eine passend abgeschnittene Stecknadel *n* dem Scheibchen das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Fähnchen wurde an dem Glasfaden langsam von oben in die Glasröhre hineingelassen und dann der schon vorher gefettete Stöpsel luftdicht eingesetzt, sodass der Spiegel in der Mitte der Glaskugel hing.

Die Glasröhre hatte noch zwei durch Glashähne verschliessbare seitliche Ansatzröhrchen r_1 und r_2, um den Apparat mit der Luftpumpe und einem Gasometer verbinden zu können. Zur Herstellung des Vacuums in dem Apparate diente eine Geissler'sche Quecksilberluftpumpe, und die Auspumpung wurde immer soweit getrieben, bis das durch das Heben des Quecksilberniveaus ausgetriebene Luftvolumen trotz fortgesetzten Pumpens nicht mehr abnahm. Der schliesslich zurückbleibende Druck liess sich bei Gebrauch dieser Pumpe nicht bestimmen, da dieselbe nur ein gewöhnliches Quecksilbermanometer besass; in diesem stieg übrigens bei der Auspumpung das Quecksilber in dem offenen Schenkel sogar etwas höher, als es in dem geschlossenen stand, sodass die Luftverdünnung jedenfalls eine beträchtliche und, wie aus der Empfindlichkeit des Apparates zu schliessen, nicht weit von dem Drucke entfernt war, bei welchem die Beweglichkeit ihr Maximum erreicht. Auf eine genaue Kenntniss des Druckes kommt es übrigens bei unseren Experimenten gar nicht an.

Zu den Versuchen wurde das Instrument auf einem Stativ möglichst senkrecht befestigt, sodass das Fähnchen sich vollständig frei herumbewegen konnte. Die Ablesung seiner Stellung wurde dadurch ermöglicht, dass das Bild eines durch eine Petroleumlampe erleuchteten engen Spaltes mit Hülfe einer Linse auf das Spiegelchen concentrirt und von dort auf eine in Millimeter getheilte, ungefähr 1100 mm entfernte Scala zurückgeworfen wurde. Dabei empfiehlt es sich, um vor einer störenden Wirkung dieses Lichtes ganz

sicher zu sein, dasselbe erst durch eine Schicht von Wasser und Alaunlösung hindurchgehen zu lassen und so der auf den Apparat wirksamen Strahlen zu berauben.

Um das ganze vor Luftströmungen zu schützen, konnte es in einen mit Watte ausgefüllten Blechkasten gebracht werden, der nur zwei Oeffnungen besass, um den Lichtindex und die Strahlen der Wärmequelle auf den Spiegel, resp. den Flügel fallen zu lassen.

Dieser Apparat ermöglichte ein relativ bequemes und schnelles Wechseln der Radiometerflügel, wenn diese Manipulation auch subtil genug ist, und bei dem Hineinsenken und Herausnehmen des Apparates mehr als ein Glasfaden zerriss, da die Fahne mit dem Spiegel durch die enge Glasröhre nur mit der schmalen Seite hindurchgleiten konnte, sodass sich der Faden unmittelbar am Spiegel scharf umbiegen musste. Diesem Uebelstande wäre nurdurch das Einsetzen des Apparates in eine gleichmässig breite cylindrische Röhre abzuhelfen gewesen, wobei aber der auszupumpende Raum zu gross, oder der Faden kurz, daher die Empfindlichkeit zu gering hätte werden müssen, und ausserdem die gewünschte Aehnlichkeit der dem Flügel benachbarten Glashülle mit der Kugel des Radiometers verloren gegangen wäre.

Bei den meisten Versuchen war der Glashahn einer der beiden seitlichen Ansatzröhren geschlossen, während die andere Röhre durch sehr kurze Kautschukverbindungen und ein langes federndes Glasrohr mit der Luftpumpe in Verbindung stand. Die Hähne und Schliffe wurden alle gut gefettet und dadurch bei genügender Sorgfalt erreicht, dass der Apparat mehrere Tage hindurch ohne merkliche Zunahme des Luftdruckes vollständig ausgepumpt gehalten werden konnte.

I. Wirkung der Glaswand.

Was zunächst die directe Wirkung der Glaswand des Radiometers betrifft, so sind mir darüber keine älteren Experimente bekannt. Allerdings sind von Crookes[1]) Ver-

1) Crookes, Compt. rend. **83.** p. 1233. 1876. Proc. of the London Roy. Soc. **25.** p. 308 und 309. 1876.

suche angestellt worden, um zu constatiren, welchen Einfluss eine grössere oder geringere Entfernung der beweglichen Flügel von der Glaswand auf die Geschwindigkeit der Rotation ausübt, aber nur um zu zeigen, dass die Bewegung auf einer Wechselwirkung zwischen den Flügeln und der Glashülle beruhe.

Zunächst liegt die Frage nahe: Ist die Glashülle eine zur Erzeugung der Radiometerbewegung an sich unerlässlich nöthige Bedingung, d. h. würde die Bewegung ganz aufhören oder qualitativ verschieden sein, wenn der bewegliche Theil des Apparates in einem unbegrenzten luftverdünnten Raume aufgehängt wäre? Crookes[1]) bejaht einmal diese Frage, indem er ausdrücklich betont, dass bei dem Radiometer im Gegensatz zum Otheoskop die Glashülle zur Bewegung nöthig sei, ohne jedoch hier, noch meines Wissens wo anders, seine Gründe dafür anzuführen.

Er ist hierzu wohl durch theoretische Erwägungen geführt worden, die er an einer anderen Stelle[2]), wo er sich zu Stoney's Theorie bekennt, andeutet.

Eine directe Entscheidung dieser Frage durch ein einfaches Experiment ist natürlich nicht möglich, da wir uns einen unendlichen Raum von so hoher Luftverdünnung auch nicht einmal in roher Annäherung herstellen können. Daher ist die Entscheidung dieses Punktes nur auf Umwegen und wohl nicht ohne theoretische Erörterungen möglich, weshalb hier noch nicht der Ort ist, um darauf näher einzugehen.

Jedoch ist eine Vermuthung, die sich wohl zunächst über das Verhalten der Glaswand aufdrängt, sehr leicht zurückzuweisen. Eine sehr einfache Beobachtung zeigt nämlich, dass bei den gewöhnlichen Radiometern, die aus einseitig berussten dünnen Glimmerflügeln bestehen, eine Bestrahlung der berussten Seiten allein mit Sonnenlicht oder einer gewöhnlichen künstlichen Lichtquelle eine Rotation in demselben Sinne erzeugt, wie die Bestrahlung der hellen Seiten allein, so zwar, dass in beiden Fällen die berusste Fläche

1) Crookes, Compt. rend. **84.** p. 1081. 1877.

2) Crookes, Proc. of the London Roy. Soc. **25.** p. 308. 1876. Nature **15.** p. 224. 1877.

zurückweicht. Nun könnte man bei der Annahme, dass die Rotation durch die thatsächlich eintretende Temperaturdifferenz zwischen Glashülle und Flügel hervorgebracht wird, leicht glauben, dass die Temperatur der Glashülle zwischen den Temperaturen der hellen und der dunklen Fläche liegt, und daher auf beide einen entgegengesetzten Einfluss ausübt. Man hat jedoch ein Mittel in der Hand, um die Glashülle auf der ursprünglichen Temperatur zu erhalten, die der ganze Apparat vor der Bestrahlung hatte, wenn man in den Gang der Strahlen eine Schicht ebener Glasplatten von solcher Dicke einschaltet, dass in dieser alle im Glase überhaupt absorbirbaren Strahlen zurückgehalten werden, und mittelst dieser Methode überzeugt man sich leicht, dass auch dann noch eine genügend starke Lichtquelle dieselbe Wirkung — wenn auch in schwächerem Maasse — hervorbringt, wie ohne die dazwischen geschalteten Glasplatten. Ob übrigens alle in dem Glase absorbirbaren Strahlen auch wirklich von den Glasplatten absorbirt werden, ehe sie zu dem Apparate gelangen, kann man mit Leichtigkeit daraus erkennen, dass ein weiteres Zwischenschalten von Glasplatten zwischen Lichtquelle und Instrument ohne Einfluss auf die Bewegung bleibt. Dadurch ist also bewiesen, dass die obige Annahme nicht der wirklichen Ursache der entgegengesetzten Wirkung auf die helle und dunkle Seite der Flügel entspricht, und somit erhält die von Cooke[1]) ausgesprochene Ansicht eine Bestätigung, dass die durch den Glimmer hindurchgegangenen Strahlen, die im Russ absorbirt werden, eine genügende Erwärmung hervorbringen, um die Bewegung zu verursachen.

Wenn es nun auch, wie oben bemerkt, nicht möglich ist, experimentell die Frage zu entscheiden, ob die Glaswand principiell zur Erzeugung der Bewegung nöthig ist, so können wir uns doch über ihre thatsächliche Wirksamkeit einige Aufklärung verschaffen. Da nämlich alle auf die Flügel fallenden Strahlen zunächst die Glaswand passiren müssen, so ist es klar, dass dieselbe im allgemeinen einen Theil der Strahlung absorbiren und dadurch eine Temperaturerhöhung

---

1) Cooke, Sill. Journ. **14.** p. 237. 1877.

erfahren wird. Vielleicht gelingt es nun, zu constatiren, welchen Einfluss diese Temperaturerhöhung der Glaswand allein haben würde, wenn die Flügel selbst ihre Anfangstemperatur während des ganzen Versuches behielten, oder wenigstens auf ihren beiden Seiten keine Temperaturunterschiede zeigten.

Um dies zu bewirken, wurde in dem oben beschriebenen Torsionsapparat ein möglichst dünnes Glimmerblättchen als Flügel benutzt, von dem anzunehmen war, dass es sehr wenig Strahlen überhaupt zu absorbiren fähig wäre, und dass bei seiner ausserordentlichen Dünne die beiden Seiten stets dieselbe Temperatur hätten. Wenn jetzt unser übrigens frei in der Luft ohne Blechkasten aufgehängter Apparat bestrahlt wurde, so musste die vordere, der Lichtquelle zugewandte, Seite der Glashülle mehr Strahlen absorbiren, als die abgewandte, während von dem Glimmerblättchen vorausgesetzt werden konnte, dass es auf beiden Seiten dieselbe Temperatur besitze. Die Lichtquelle wurde so aufgestellt, dass ihr Mittelpunkt in der auf der Mitte des Spiegelchens errichteten Normalen lag, sodass also der von ihr ausgehende Strahlenkegel die Glaskugel in derselben verticalen Ebene tangirte, in welcher der Glimmerflügel hing. Wenn also unsere Annahmen richtig sind, was später noch genauer untersucht werden soll, und wenn ferner angenommen wird, dass eine etwaige Absorption innerhalb der verdünnten Luft ohne Einfluss ist, welche Frage auch noch später discutirt werden wird, so muss eine etwaige Wirkung allein der Erwärmung der Glaswand zugeschrieben werden.

Zunächst wurden einige Versuche mit Sonnenlicht gemacht, das von dem Metallspiegel eines Duboscq'schen Heliostaten auf den Apparat reflectirt wurde. Dabei zeigte sich nicht die geringste Bewegung des Lichtindex.

Anders gestaltete sich jedoch die Sache bei Benutzung der hellen Flamme eines Bunsen'schen Brenners als Wärmequelle. Hier traten energische Ablenkungen auf, die sämmtlich positive waren, d. h. solche, bei denen die bestrahlte Seite zurückweicht, und zwar betrugen dieselben im Mittel etwa 65 mm.

Wir sehen also, dass hier eine Abstossung des Flügels durch die stärker erwärmte Seite der Glaswand stattfindet, wenn unsere obigen Annahmen richtig sind.

Nun wäre es aber doch möglich, dass wir bei dem dünnen Glimmerblättchen noch eine vordere und eine hintere Seite zu unterscheiden hätten, und dass die vordere Fläche einen grösseren Theil der Strahlen absorbire als die hintere, daher wärmer werde und infolge dessen zurückweiche.

Um diese Möglichkeit zu prüfen, wurde die Glashülle seitlich bestrahlt und dabei eine Hälfte derselben so beschattet, dass das Glimmerblättchen selbst im Schatten lag, und seine Ebene gerade die Trennungsebene von Licht und Schatten bildete. Wenn jetzt wieder eine Bewegung eintrat, so konnte dieselbe jedenfalls nicht von der directen Absorption durch das Glimmerblättchen herrühren, da dieses selbst ausserhalb des Lichtkegels sich befand.

Bei Benutzung von Sonnenlicht zeigte sich wieder keine Spur von Bewegung und somit war, wie aus der Wirkung der Gasflammen direct folgt, bewiesen, dass das dünne Glas von den Sonnenstrahlen nur verschwindend wenig absorbirt.

Die seitliche Bestrahlung mit einer Gasflamme dagegen bewirkte eine Ablenkung in demselben Sinne wie vorher, nämlich so, dass das Glimmerblättchen immer von der beleuchteten Seite des Glases zurückgestossen wurde.

Dabei ergab sich:

I. Bei seitlicher Bestrahlung von der Seite des Flügels aus (sodass der direct am Flügel gelegene Theil der Glaswand zuerst vom Lichte getroffen wurde):

Ruhelage des Lichtindex: Bei Beleuchtung

	der vorderen Hälfte	der ganzen Kugel	der hinteren Hälfte
helle Gasflamme	468	500	531
Ablenkung	32	31	
dunkle Gasflamme	447	500	552
Ablenkung	53	52	

II. Bei seitlicher Bestrahlung von der vom Glimmerblatt abgelegenen Seite aus:

Ruhelage des Lichtindex: Bei Beleuchtung

	der vorderen Hälfte	der ganzen Kugel	der hinteren Hälfte
helle Gasflamme	496	500	504
Ablenkung	4		4
dunkle Gasflamme	493	500	507
Ablenkung	7		7

Diese Experimente zeigen also, dass in der That die erwärmte Glaswand eine rückstossende Kraft auf den Flügel ausübt, und es geht zugleich aus dem Unterschied der Wirkung bei der Bestrahlung von der dem Glimmerblättchen abgelegenen und der ihm zugelegenen Seite aus hervor, dass die dem Flügel zunächst gelegenen Theile des Glases fast allein die Wirkung ausüben. Diese Beobachtung wird noch durch folgendes Experiment bestärkt.

Es wurde, wie bei den ersten angeführten Versuchen, der Apparat von vorn mittelst eines hellen Bunsen'schen Brenners beleuchtet und sodann der grösste Theil des Lichtkegels so weit abgeschnitten, dass nur noch der äusserste, dem Glimmerflügel am meisten benachbarte Theil des Glases bestrahlt war, während sich der Flügel selbst im Schatten befand.

Dabei ergab sich als Ruhelage des Lichtindex:

	mit voller Beleuchtung	ohne Beleuchtung	mit theilweiser Beleuchtung
	465	500	471
Ablenkung	35		29

Also kommt fast die ganze Wirkung von dem unmittelbar dem Glimmerflügel gegenüberliegenden Theil der Glaswand her.

Nach den obigen Versuchen mit der seitlichen Bestrahlung kann es nicht mehr zweifelhaft sein, dass die Ablenkung wirklich von der Erwärmung der Glaswand herrührt. Aber es geht daraus noch nicht hervor, ob diese Wirkung eine directe Abstossung vermittelst der zwischen beiden Flächen befindlichen Lufttheilchen ist, oder eine secundäre, die dadurch hervorgebracht wird, dass die von der erwärmten Glaswand ausgestrahlte Wärme von der vorderen Fläche des

Glimmers stärker absorbirt wird, als von der hinteren. Dies ist aber höchst unwahrscheinlich; denn sicher wird ein grosser Theil der dem Glase durch Absorption zugeführten Wärmemenge der kälteren Luft im Inneren des Apparats durch Leitung mitgetheilt, und von der dem Glase durch Strahlung entzogenen Wärmemenge kann nur der geringste Theil auf das Glimmerblättchen übergehen, da die Strahlung nach allen Richtungen des Raumes gleichmässig stattfindet. Daher ist die verhältnissmässig starke Wirkung wohl kaum dieser kleinen Wärmemenge zuzuschreiben und rührt jedenfalls zum grössten Theile von der durch Leitung dem Gase mitgetheilten Wärme her.

Ausserdem würde wohl der Glimmer auch von denjenigen Strahlen, die ihn von der Wärmequelle direct treffen, einen Theil absorbiren, der dieselbe Wirkung haben müsste, wie die von dem Glase ausgesandten Strahlen, sodass also bei der zuerst angewandten Bestrahlung von vorn beide Wirkungen sich addiren müssten, während bei der seitlichen Bestrahlung nur die Wirkung des Glases vorliegt.

Also müsste bei gleicher Entfernung derselben Wärmequelle von dem Glimmerblättchen die Ablenkung im ersten Falle stärker sein, als im zweiten. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie sich aus folgenden Beobachtungen ergibt:

Entfernung der hellen Gasflamme von der äussersten senkrechten Kante des Glimmerblättchens: 305 mm.

Ruhelage des Lichtindex:

I. Bei der Bestrahlung von vorn:

ohne Beleuchtung	mit Beleuchtung	Ablenkung
500	465	35

II. Bei seitlicher Bestrahlung:

mit ganzer Beleuchtung	bei Beleuchtung einer Hälfte	Ablenkung
500	447	53

Die Ablenkung im zweiten Falle ist also nicht nur nicht schwächer, sondern sogar bedeutend stärker, als im ersten, was wohl daher kommt, dass bei der Bestrahlung von vorn auch die der Rückseite des Glimmerblättchens gegenüberliegende Glaswand durch Absorption sich erwärmt und so der Wirkung der vorderen Hälfte des Glases entgegenarbeitet,

während bei der seitlichen Bestrahlung überhaupt nur die günstig wirkende Hälfte der Kugel erwärmt wird.

Ausser diesen Wahrscheinlichkeitsgründen bietet sich auch ein strenger experimenteller Beweis dafür dar, dass die rückstossende Wirkung der erwärmten Glaswand eine primäre und keine secundäre ist. Wenn sie nämlich von der Absorption der von der Glaswand ausgehenden Strahlen im Radiometerflügel herrührte, so würde ihre Grösse von der Absorptionsfähigkeit des Flügels, also von seiner Substanz abhängig sein.

Um diese Abhängigkeit zu prüfen, wurde der bei den früheren Versuchen benutzte durchsichtige Glimmerflügel auf einer Seite mit Russ geschwärzt und wieder in den Apparat eingeführt. Die Lichtquelle wurde seitlich von dem Apparate, wie bei den p. 8 u. 9 angegebenen Versuchen, in der Ebene des Flügels aufgestellt, sodass der vor dem Flügel gelegene Theil der Glaswand ebenso stark beleuchtet wurde, wie die hinter dem Flügel liegende Hälfte derselben.

Wenn die Wirkung also von der Substanz des Flügels abhinge, so müsste bei dieser Anordnung die Bestrahlung der einen Hälfte der Glaswand, während die andere Hälfte und der Flügel selbst beschattet sind, eine quantitativ andere Ablenkung hervorbringen, als die Bestrahlung der anderen Hälfte der Glaskugel. Besteht dagegen die Wirkung in einer directen Zurückstossung, so bleibt dieselbe offenbar unverändert, ob sie eine Russ- oder Glimmerfläche trifft, und dann müssen die durch die beiden Hälften der Glashülle hervorgebrachten Ablenkungen dieselbe Grösse haben. Das Experiment bestätigte die letztere Annahme. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass man sorgfältig alle anderen Einflüsse, besonders die von benachbarten Gegenständen und den Zimmerwänden reflectirten Strahlen von dem Apparate fernhalten muss, da derselbe in dieser Form sehr empfindlich ist, und die Anordnung des Versuches es unmöglich macht, ihn mit einer schützenden Hülle zu umgeben.

Da bei seitlicher Bestrahlung der ganzen Glashülle selbstverständlich eine directe Erwärmung des Russes nicht zu vermeiden ist, so sind in der folgenden Tabelle die Ab-

lenkungen von der bei vollständiger Beschattung des ganzen Apparats eingenommenen Ruhelage an gerechnet.

Die mit der nöthigen Vorsicht ausgeführten Experimente ergaben folgendes Resultat:

Ruhelage des Lichtindex bei Beschattung

	der Russseite des Glases	der ganzen Glashülle	der Glimmerseite des Glases
helle Gasflamme	545	500	455
Ablenkung	45	45	
helle Gasflamme	576	500	425
Ablenkung	76	75	
dunkle Gasflamme	555	500	445
Ablenkung	55	55	
dunkle Gasflamme	570	500	430
Ablenkung	70	70	

Dass diese Wirkung in der That nur von der Glaswand herrührt, erkennt man daraus, dass schon eine zwischen Lichtquelle und Apparat gebrachte ebene Glasplatte von 8 mm Dicke genügt, um jede Ablenkung vollständig aufzuheben.

Da die Ablenkung des durchsichtigen Glimmerflügels bei der Bestrahlung von vorn von dem Ueberschusse der in der vorderen Hälfte der Glaswand absorbirten Wärmemenge über die in der hinteren Hälfte absorbirte herrührt, so wird es möglich sein, die Bewegung dadurch umzukehren, dass wir die Glaswand so einrichten, dass ihre hintere Hälfte mehr Wärme absorbirt, als die vordere. Dies können wir dadurch erreichen, dass wir die hintere Hälfte der Glaskugel äusserlich mit Lampenruss schwärzen. Dabei zeigte sich jedoch unter Bestrahlung durch einen hellen Bunsen'schen Brenner zunächst noch keine Umkehr, sondern nur eine Schwächung der Ablenkung, und erst durch Einschalten von Glas in den Gang der Strahlen konnte eine Umkehr der Bewegung erreicht werden. Bei voller Bestrahlung war also die Erwärmung der blanken Glashälfte stärker, als die

der berussten, und erst, wenn man die im Glase am stärksten absorbirbaren Strahlen entfernte, bevor sie die Glaskugel trafen, gewann die Absorption im Russe das Uebergewicht.

Dabei war die Ruhelage des Lichtindex:

ohne Beleuchtung	mit voller Beleuchtung	mit Licht, das durch eine 15 mm dicke Glasschicht gegangen war
500	489	554
Ablenkung	11	54

Anders war es bei Sonnenlicht, welches hier ohne zwischengeschaltetes Glas die höchste Wirkung hatte und eine Ablenkung von 50 mm hervorbrachte; ein neuer Beweis, wie wenig von der Sonnenstrahlung im Glase absorbirt wird.

Durch die bisher angeführten Versuche ist der Beweis erbracht, dass die erwärmte Glaswand auf eine ihr gegenüber beweglich aufgehängte Fläche eine rückstossende Kraft ausübt, die von der Substanz der Fläche unabhängig ist, oder anders ausgedrückt, dass von der erwärmten Glaswand ein Druck ausgeht, der mit der Temperatur des Glases zunimmt.

Von früheren Beobachtern ist in zahlreichen ähnlichen Versuchen constatirt worden, dass eine beliebige erwärmte Fläche einen ihr gegenüber im luftverdünnten Raume aufgehängten leichten Körper zurückzustossen strebt.

Da jetzt also der Nachweis geführt ist, dass diese Zurückstossung eine directe und nicht eine durch Absorption der von dem erwärmten Körper ausgestrahlten Wärme erzeugte ist, so können wir den obigen Satz in folgender erweiterter Form aussprechen:

Von einer warmen Fläche geht im luftverdünnten Raume ein Druck aus, der mit der Temperatur der Fläche zunimmt.

Wir haben (p. 7) die Annahme gemacht, dass bei unseren Versuchen eine Absorption von Wärme innerhalb der das Radiometer selbst füllenden verdünnten Luft ohne Einfluss auf die Bewegung sei; da nämlich bei der seitlichen Bestrahlung ausser der Glaswand auch diese Luft beleuchtet wird, so wäre es immer noch möglich, die erzeugte Bewegung

auf eine durch Absorption hervorgebrachte Temperaturerhöhung des Luftresiduums zurückzuführen. Dies ist jedoch unrichtig, wie wir im Folgenden nachweisen wollen.

II. Wirkung des Gasresiduums.

Zunächst ist vorauszuschicken, dass nach allen auf der kinetischen Gastheorie beruhenden Radiometertheorien eine jede einseitige Wärmezufuhr zu dem Gase eine Bewegung des Flügels verursachen müsste, also auch eine durch Absorption in der verdünnten Luft hervorgebrachte locale Temperaturerhöhung. Jedoch ist es bei dem hohen Grade der Verdünnung, in welchem sich die Luft im Radiometer befindet, überhaupt schon an sich sehr unwahrscheinlich, dass sie eine irgendwie beträchtliche Wärmemenge zu absorbiren im Stande sei, zumal da die Strahlen der Wärmequelle, schon bevor sie den Apparat erreichen, eine so grosse Schicht atmosphärischer Luft durchlaufen müssen, dass sie wohl von allen durch die Luft absorbirbaren Strahlen vollständig befreit sind, ehe sie das Radiometer treffen.

Es wurden einige diesbezügliche Versuche mit Sonnen- und Gaslicht von mir ausgeführt, indem ich dicht vor dem durchsichtigen Glimmerscheibchen meines, ebenso wie bei den oben beschriebenen Versuchen eingerichteten Apparates in der verdünnten Luft einen Focus entwarf. Um den Einfluss der dabei auftretenden Erwärmung der Glaswand zu vermeiden, liess ich das Licht von oben schräg in den Apparat hineinfallen, sodass die Glaswand an einer schräg über dem Glimmerblättchen in grosser Entfernung von demselben befindlichen Stelle von dem Lichte getroffen wurde. Dabei entstand auch nicht die geringste wahrnehmbare Ablenkung des Flügelchens. Hierdurch war also bewiesen, dass bei unseren obigen Experimenten eine Absorption von Wärme in der verdünnten Luft ohne jeden Einfluss war.

Um jedoch die theoretisch wichtige Annahme, dass eine Wärmeabsorption im Gase Bewegung des Flügelchens hervorrufen könnte, experimentell zu beweisen, füllte ich meinen Apparat statt mit atmosphärischer Luft mit Leuchtgas, indem ich das zweite seitliche Ansatzrohr desselben mit einem

Trockenapparat verband, der seinerseits wieder mit der Gasleitung des Hauses in Verbindung stand. Nachdem ich durch fünfmaliges Füllen und Auspumpen des Apparates die Sicherheit gewonnen hatte, wirklich verdünntes Leuchtgas in demselben zu besitzen, wiederholte ich die mit atmosphärischer Luft angestellten Absorptionsversuche, jedoch mit demselben negativen Erfolge. Es scheint also, dass die Absorption bei diesen hohen Verdünnungen des Gases verschwindend klein wird. Im übrigen zeigte der mit Leuchtgas gefüllte Apparat dieselben Erscheinungen wie bei Anwendung von atmosphärischer Luft.

III. Wirkung der Flügel.

Bei weitem den grössten Einfluss auf die Bewegungsweise der radiometrischen Apparate hat die Beschaffenheit der Radiometerflügel selbst. Dabei ist zunächst klar, dass durch die Flügel eine Bewegung nur dann hervorgebracht werden kann, wenn ihre beiden Seiten bei der Bestrahlung verschieden wirken, da sich eine gleiche Wirkung beider Seiten aufheben müsste. Diese verschiedene Wirkung setzt eine Verschiedenheit in der Beschaffenheit beider Seiten voraus, die entweder darin liegen kann, dass sie aus verschiedenen Stoffen bestehen, oder aber, dass sie verschiedene Formen haben, oder drittens, dass sie aus demselben Stoffe sind, aber verschiedene Temperaturen besitzen.

Was den ersten Punkt betrifft, so ist es bei der grossen Complicirtheit der mitwirkenden Eigenschaften der Körper nicht wohl möglich, genau den Einfluss anzugeben, den eine jede Eigenschaft der als Flügel benutzten Substanzen ausübt.

Zunächst sind die überhaupt zur Geltung kommenden Kräfte sehr gering; daher wird es nöthig sein, möglichst leichte Körper anzuwenden, wie Mark, Glimmer oder sehr dünne Metallflächen.

Da ferner die Bewegung durch Bestrahlung hervorgebracht wird, so ist es klar, dass die lebendige Kraft der Bewegung den Strahlen entnommen ist. Dies ist jedoch nur durch Absorption möglich, da schon die einfachsten Versuche zeigen, dass eine directe Uebertragung der lebendigen

Kraft der Strahlen an die Flügel nicht die Ursache der Bewegung sein kann. Daher wird die Wirkung desto stärker sein, je mehr von den Strahlen in dem Flügel absorbirt werden, und je mehr der an der einen Fläche absorbirte Theil der Strahlung den an der anderen Seite absorbirten übertrifft. Dieser Ueberlegung entsprechen auch die Beobachtungen[1]), welche zeigen, dass die Wirkung am stärksten ist, wenn feine Glimmerblättchen, die fast gar keine Strahlen absorbiren, auf einer Seite mit dem auch für Wärme schwärzesten aller bekannten Körper, mit Lampenruss bedeckt sind. Weniger günstig sind einseitig mit Lampenruss geschwärzte metallische Platten, da die Metallradiometer bei Bestrahlung durch dunkle Wärmequellen mit der berussten Seite voran sich bewegen, also umgekehrt wie im Licht.[2]) Daraus ist zu schliessen, dass die Metalle für Wärmestrahlen von sehr grosser Wellenlänge sogar noch undurchdringlicher sind, als der Russ, was auch mit der Erfahrung übereinstimmt, dass Russ in dünnen Lagen roth durchsichtig ist. Nach Tyndall[3]) liess eine mit Russ überzogene Steinsalzplatte, durch welche von der blendendsten Gasflamme kein Schimmer hindurchzudringen vermochte, 38 Proc. der von einem Gefäss mit kochendem Wasser ausgehenden Strahlen durch.

Ausser der Absorption ist die innere Wärmeleitungsfähigkeit der zu Radiometerflügeln benutzten Substanzen von hervorragender Wichtigkeit, da dieselbe die Temperaturdifferenz der beiden Seiten aufzuheben und somit die wichtigste Bewegungsursache zu verringern strebt. Directe methodische Versuche sind, soviel ich weiss, über diesen Gegenstand noch nicht gemacht worden, wenn man auch häufig Verschiedenheiten in der Wirkung von Metall- und Glimmerradiometern auf den Unterschied der Leitungsfähigkeit beider Stoffe zurückgeführt hat. Diesen Gegenstand näher zu behandeln, bot sich der einfache Weg, in meinem oben beschriebenen Apparate eine Reihe gleichartiger Versuche

1) Crookes, Phil. Trans. (1) **169.** p. 259 u. 260. 1878.

2) Crookes, Compt. rend. **83.** p. 1289. Proc. of the London Roy. Soc. **25.** p. 312. Nature **15.** p. 226. 1877.

3) Tyndall, Die Wärme etc. 3. Aufl. der deutschen Uebersetzung p. 407.

mit Glimmer und mit einem Metall anzustellen. Zunächst wurde dasselbe Glimmerblättchen, das zu den Versuchen über die Einwirkung der Glaswand gedient hatte, auf einer Seite über einer Terpentinölflamme berusst und dann wieder in der alten Weise in den Apparat eingeführt, worauf dieser vollständig ausgepumpt wurde. Bei Bestrahlung der hellen Seite mit Sonnenlicht wurde diese so heftig dem Lichte entgegengetrieben, dass der Lichtindex vollständig ausserhalb der Scala fiel, und ein Ablesen nicht mehr möglich war.

Jedenfalls wirkte dabei der durch Absorption der durch den Glimmer hindurchgegangenen Strahlen erwärmte Russ ebenso, als ob er direct erwärmt worden wäre.

Bei Bestrahlung durch die Flamme eines Bunsen'schen Brenners jedoch zeigte sich eine eigenthümliche Erscheinung. Im ersten Augenblicke der Bestrahlung nämlich trat ein energischer negativer Ausschlag ein, indem sich die bestrahlte helle Seite der Lichtquelle zu bewegte; dann erfolgte ein kurzes Hin- und Herschwanken und darauf ein ganz allmähliches Uebergehen des Blättchens in eine feste Ruhelage, welche einer positiven Ablenkung, also mit zurückweichender bestrahlter Glimmerseite, entsprach. Wurde die Bestrahlung darauf durch einen zwischengesetzten, undurchsichtigen Schirm plötzlich unterbrochen, so wiederholte sich dasselbe Spiel in entgegengesetztem Sinne. Zunächst erlitt der Flügel eine energische und plötzliche Ablenkung mit vorangehender berusster Seite, pendelte dann einige Secunden hin und her, und kehrte darauf ganz allmählich in seine ursprüngliche Ruhelage zurück.

Die entsprechenden Stellungen des Lichtindex waren folgende:

Bei heller Gasflamme.

	L.	A.	L.	A.	L.	A.
I	500		500		500	
II	585	85	587	87	642	142
III	462	38	462	38	485	15
IV	376	86	376	86	344	141
V	500		500		500	

Bei dunkler Gasflamme.

	L.	A.	L.	A.
I	500		500	
II	549	49	549	49
III	441	59	445	55
IV	390	51	397	48
V	500		500	

Dabei bedeuten die in den L. überschriebenen Verticalreihen stehenden Zahlen in der Horizontalreihe:

I. Die Ruhelage des Lichtindex, wenn der Apparat durch einen Schirm beschattet ist;

II. den äussersten Ausschlag des Index im Momente der Entfernung des Schirmes;

III. die Ruhelage des Index bei voller Bestrahlung;

IV. den äussersten Ausschlag im Momente der Beschattung;

V. die Ruhelage in der Beschattung.

Die in der Columne A. stehenden Zahlen geben die Ablenkungen von der nächst vorhergehenden Ruhelage an, welche den links neben ihnen stehenden Ziffern entsprechen.

Da die hier vorkommenden Ablenkungen nicht sehr gross und ziemlich von derselben Ordnung sind, wie die früher durch die Absorption des Glases erzeugten, so lag es nahe, dass diese Absorption einen störenden Einfluss ausüben könnte, der die eigentliche, von den Flügeln hervorgebrachte Bewegung zu verschleiern geeignet wäre. Deshalb wurde bei einer zweiten Versuchsreihe das Licht, bevor es zu dem Apparat gelangte, durch drei dicke Glasplatten von den im Glase absorbirbaren Strahlen gereinigt. Dabei ergaben sich folgende Resultate, bei denen die vorkommenden Bezeichnungen dieselbe Bedeutung haben wie vorher:

Helle Gasflamme.

	L.	A.	L.	A.	L.	A.
I	500		500		500	
II	587	87	585	85	584	84
III	477	23	482	18	483	17
IV	386	91	394	88	398	85
V	500		500		500	

Dunkle Gasflamme.

	L.	A.
I	500	
II	519	19
III	479	21
IV	459	20
V	500	

Es zeigte sich also, dass, wie vorauszusehen war, durch die Filtrirung des Lichtes in den Glasplatten eine Stärkung des ersten, der Wirkung der Glaswand des Apparates entgegengesetzten Ausschlages im Verhältniss zur endgültigen Ablenkung hervorgebracht wurde.

Bemerkenswerth ist ferner die bei allen Beobachtungen fast absolute Uebereinstimmung in der Grösse des ersten Ausschlages bei plötzlichem Beginn und bei plötzlichem Aufhören der Bestrahlung.

Was die Erklärung dieser Erscheinungen betrifft, so kann wohl kein Zweifel darüber bestehen, dass hier zwei verschiedene, einander entgegengesetzte Bewegungsursachen sich gegenüberstehen, von denen die erste plötzlich, die zweite allmählich eintritt.

Die erste, plötzlich wirkende Ursache ist jedenfalls die Absorption in dem Lampenruss, die zweite, allmählich eintretende, die Erwärmung der vorderen Glimmerfläche durch Leitung. Hier ist allerdings der eigenthümliche Fall eingetreten, dass uns diejenige Substanz, die wir als einen schlechten Wärmeleiter gewählt hatten, um bei ihr den Einfluss der Leitung möglichst auszuschliessen, gerade diesen Einfluss der Wärmeleitung ganz besonders deutlich zeigt.

Zugleich jedoch gestattet uns diese Anordnung des Experiments, die Wirkungen der Absorption und der Wärmeleitung vollständig voneinander zu trennen, weil infolge der verhältnissmässig geringen Wärmeleitungsfähigkeit des Glimmers eine beträchtliche Zeit verstreicht, bis die Wirkung dieser Leitung eintritt. Der Vorgang selbst ist zweifellos folgender: die von der Wärmequelle kommenden Strahlen gehen grösstentheils unabsorbirt durch das dünne Glimmerblättchen hindurch und werden in der Russschicht stark absorbirt. Dabei haben wir in der dünnen Russschicht zwei Seiten zu unterscheiden, die vordere, der Wärmequelle zugelegene, und die hintere, der Wärmequelle abgelegene. Die vordere absorbirt stärker als die hintere und erwärmt sich infolge dessen auch mehr als jene. Da nun die Wärmeleitungsfähigkeit des Russes, wie schon Rumford[1]) experimentell gezeigt und H. Weber[2]) aus seinen Versuchen über das Wärmeleitungsvermögen von Eisen und Neusilber geschlossen hat, eine ausserordentlich geringe ist, — nach

1) Rumford, Phil. Trans. p. 42. 1792. Siehe auch Tyndall: Die Wärme etc. 3. Auflage der deutschen Uebersetzung p. 276.

2) Weber, Pogg. Ann. **146.** p. 282. 1872.

Rumford fast genau so gross, wie die von Schafwolle — so leitet sich die Wärme der vorderen Russschicht viel weniger durch den Russ, als durch den Glimmer fort, sodass nach einiger Zeit die vordere Fläche des Glimmers wärmer wird, als die hintere des Russes. Während diese Hinterseite des Russes sich zu Anfang durch Absorption plötzlich erwärmt, und daher die erste plötzliche Ablenkung des Flügels hervorbringt, verursacht die dem Glimmer durch Leitung zugeführte Wärme eine ganz allmähliche Temperatursteigerung und infolge dessen nur eine ganz allmähliche Ablenkung des Radiometerflügels. Wird nun, nachdem der Apparat unter der Einwirkung der Bestrahlung eine feste Ruhelage eingenommen hat, wobei also die durch den Ueberschuss der Temperatur der Vorder- über die Rückseite erzeugte Drehkraft im Gleichgewicht gehalten wird durch die Torsion des Glasfadens, plötzlich die Bestrahlung unterbrochen, so verliert die Rückseite des Russes plötzlich die ihr durch Absorption in jedem Augenblicke der Bestrahlung zugeführte Wärmemenge, während die der Glimmerfläche durch Leitung mitgetheilte Wärme ebenso langsam abnimmt, wie sie im Anfange zugenommen hat. Daher ist im ersten Augenblicke der Beschattung die Temperaturdifferenz beider Flächen um dieselbe Grösse, wenn auch im umgekehrten Sinne, vermehrt, wie im ersten Augenblicke der Bestrahlung, und diese Zunahme der Temperaturdifferenz erzeugt eine ebenso starke und plötzliche Ablenkung des Flügels wie im ersten Falle, nur im entgegengesetzten Sinne. Wenn dann durch das plötzliche Erkalten der vorderen Russschicht eine allmähliche Temperaturabnahme an der vorderen Glimmerfläche stattfindet, so hört die Differenz beider Seiten allmählich auf, und der Flügel kehrt langsam in seine ursprüngliche Ruhelage zurück.

Dass übrigens dieser so prägnante Effect der Wärmeleitung bei den gewöhnlichen Glimmerradiometern nicht zu Tage tritt, ist ein deutlicher Beweis, wie unbrauchbar diese Apparate sind, wenn es sich darum handelt, die Ursachen ihrer Bewegung zu ergründen. Wird nämlich ein solches Radiometer einseitig so bestrahlt, das immer die hellen

Flächen der Flügel beleuchtet, die dunkeln im Schatten sind, so genügt jedesmal der erste, durch die Absorption der Rückseite des Russes hervorgebrachte Ausschlag, um die betreffenden bestrahlten Flügel vollständig aus dem Bereiche der Strahlung herauszubringen und einen neuen Flügel in denselben zu führen, der seinerseits durch den ersten Ausschlag die Drehung des Radiometerkreuzes in demselben Sinne fortsetzt, sodass eine constante Rotation mit vorangehendem Glimmer eintritt, und die Wirkung der Wärmeleitung vollständig verschwindet.

Obgleich also schon bei den Versuchen mit dem berussten Glimmerflügel eine Wirkung der Wärmeleitung unzweideutig hervorgetreten war, so wurden dennoch die entsprechenden Experimente mit einer sehr gut leitenden Substanz vorgenommen, um zu sehen, ob durch die gute Leitungsfähigkeit des Flügels die Erscheinungen wesentlich beeinflusst werden. Zu diesem Zwecke wurde ein Flügel aus sehr dünner Kupferfolie, sogenanntem Rauschgold, also einem vorzüglichen Wärmeleiter, hergestellt und in den Apparat eingeführt. Zunächst wurden einige Versuche angestellt mit dem auf beiden Seiten blanken, unberussten Flügel, welche den früher mitgetheilten Beobachtungen mit dem durchsichtigen Glimmerflügel entsprachen.

Bei Bestrahlung mit Sonnenlicht zeigte sich hier, im Gegensatz zum Glimmer, eine positive Ablenkung mit zurückweichender bestrahlter Seite Diese Erscheinung beweist deutlich, dass trotz der guten Leitungsfähigkeit und der geringen Dicke des Flügels die Absorption eine dauernde Temperaturdifferenz zwischen der Vorder- und der Rückseite hervorbrachte. Dass eine etwaige Verschiedenheit in der Gestalt der beiden Seiten nicht die Ursache der Ablenkung war, konnte man daraus ersehen, dass eine Bestrahlung der anderen Seite des Flügels auch einen Ausschlag in der entgegengesetzten Richtung zur Folge hatte. Die Grösse dieses Ausschlages betrug etwa 50 Scalentheile.

Eine einseitige seitliche Bestrahlung der Glaswand durch Sonnenlicht brachte, wie vorauszusehen war, ebenso wenig eine Ablenkung hervor, wie bei dem Glimmerblättchen.

Wenn eine helle Gasflamme als Wärmequelle benutzt wurde, zeigte sich eine etwas schwächere Ablenkung als bei Sonnenlicht, die ausserdem auch einen ganz anderen Charakter hatte. Während nämlich die Sonne einen plötzlichen Ausschlag hervorbrachte, geschah hier die Ablenkung ganz allmählich und liess schon dadurch erkennen, dass ihre Ursache eine ganz andere war. In der That scheint es mir sehr wahrscheinlich, dass im Rauschgold durch die Absorption der von der Gasflamme ausgehenden Strahlen nur eine sehr geringe Temperaturdifferenz entsteht, und dass der grösste Theil der Ablenkung durch die Absorption in der Glaswand hervorgebracht wird. Dafür spricht die Thatsache, dass bei gleicher Entfernung der Wärmequelle die Ablenkung bei seitlicher Bestrahlung einer Hälfte der Glaswand und bei voller Bestrahlung des Apparats von vorn fast genau dieselbe war.

Es ergab sich nämlich, wenn die Gasflamme von dem Flügel um 305 mm entfernt war, im Mittel eine Ablenkung des Lichtindex:

bei seitlicher Bestrahlung um 23,5 mm
„ Bestrahlung von vorn „ 23,0 „ .

Die durch directe Absorption im Rauschgold hervorgebrachte Kraft scheint also fast genau ebenso gross zu sein, wie die durch die Erwärmung des hinteren Theiles der Glaswand erzeugte.

Ebenso wie bei dem Glimmerflügel gelang es auch hier, durch äusserliche Berussung der hinteren Hälfte der Glaswand den Sinn der Ablenkung umzukehren, bei Sonnenlicht direct, bei der Gasflamme durch Anwendung von Glasplatten. Darauf wurde das Rauschgoldblättchen über einer Terpentinölflamme auf einer Seite berusst und wieder in den Apparat eingeführt.

Die Bestrahlung der blanken Seite mit Sonnenlicht ergab einen sehr starken positiven Ausschlag, wobei die blanke Seite so weit zurückwich, bis die Russeite anfing in den Bereich der Strahlung zu kommen, worauf ein heftiges Hin- und Herschwanken erfolgte.

Wurde die blanke Seite des Flügels durch die Flamme

eines Bunsen'schen Brenners bestrahlt, so zeigte sich wieder ein positiver Ausschlag, welcher je nach der Entfernung und Grösse der Flamme zwischen 100 und 200 Scalentheilen variirte.

Bei Bestrahlung der berussten Seite verhielten sich, wie vorauszusehen war, das Glimmer- und das Rauschgoldblättchen ganz analog, indem beide eine sehr starke positive Ablenkung erfuhren.

Ausser durch eine Verschiedenheit der Substanz und Temperatur der beiden Flächen eines Radiometerflügels kann die Bewegung auch hervorgebracht werden durch einen Unterschied der Form und endlich durch eine Verschiedenheit der Stellung gegen die Glaswand. Mit gekrümmten Radiometerflügeln sind sehr viele Versuche angestellt worden, besonders von Crookes[1]) und Zöllner[2]), die jedoch nicht vollständig mit einander übereinstimmen. Jedoch geht aus allen diesen Experimenten mit Sicherheit hervor, dass die convexe Fläche der geschwärzten Seite bei gewöhnlichen Radiometern, die concave Seite der hellen entspricht. Sehr eigenthümlich sind die Resultate, die Crookes mit einseitig und zweiseitig berussten gekrümmten Aluminiumflügeln gefunden hat, da dabei immer, wenn überhaupt eine Bewegung erzeugt wurde, bei Benutzung einer leuchtenden Wärmequelle die concave Seite voranging, selbst wenn beide Seiten berusst waren, und die concave Fläche allein bestrahlt wurde. Die von Crookes zur Erklärung dieser Erscheinung angenommene, durch die gute Wärmeleitung des Aluminiums hervorgebrachte, vollständige Temperaturgleichheit beider Seiten scheint mir nach den oben mitgetheilten Versuchen über den Einfluss der Wärmeleitung sehr unwahrscheinlich zu sein. Uebrigens hat Crookes auf Vorschlag von Stokes einen Versuch mit einem Radiometer mit eigenthümlich gekrümmten Flügeln ausgeführt, der es sehr wahrscheinlich macht, dass die Rotation nicht eine Folge der Formver-

1) Crookes, Proc. of the London Roy. Soc. **25.** p. 312—314. Compt. rend. **83.** p. 1289—1291. 1876. Nature **19.** p. 88. 1878. Phil. Trans. **169.** (1) p. 294—302. 1878.

2) Zöllner, Pogg. Ann. **160.** p. 160, 164 u. 165. 1877.

schiedenheit beider Seiten an sich ist, sondern vielmehr von ihrer verschiedenen Stellung zur Glaswand herrührt. Der Einfluss der Stellung der Flügel gegen die Glaswand zeigt sich im wesentlichen bei den Radiometern mit durchsichtigen schräg gestellten Flügeln, und dabei ergibt sich, dass die der Glaswand am nächsten gegenüberstehende Seite am stärksten zurückgestossen wird. Auf diese Ursache ist wohl auch die von Crookes[1]) bemerkte Erscheinung zurückzuführen, dass ein Radiometerkreuz in einem kleineren Gefässe stärker rotirt als in einem grösseren.

Gesetze der Radiometerbewegung.

Die Resultate der von den verschiedenen Beobachtern mit den radiometrischen Apparaten ausgeführten Versuche lassen sich nicht ohne weiteres zu allgemeinen Sätzen zusammenstellen, aus denen es möglich wäre, den Verlauf einer jeden Erscheinung mit Sicherheit vorauszusagen. Denn erstens sind bei den meisten Versuchen so verschiedene Einflüsse thätig, dass es selbst bei genauer Kenntniss der Gesetze, welche jeden einzelnen beherrschen, schwer wäre, das Resultat ihres Zusammenwirkens zu berechnen, ausserdem aber sind wir noch weit davon entfernt, im einzelnen Falle die in Betracht kommenden Eigenschaften der verschiedenen Theile des Apparates — wie Absorptionsfähigkeit für die gerade angewandte Art der Bestrahlung, Emissionsvermögen, innere und äussere Leitungsfähigkeit, spec. Wärme etc. — zahlenmässig angeben zu können, und noch viel weniger kennen wir die Gesetze, nach welchen sich die Wirkung dieser verschiedenen Eigenschaften im Apparate selbst regelt.

Um dennoch die Gesetze der Radiometerbewegung in möglichst einfache Sätze zusammenzufassen, wollen wir uns zunächst die experimentellen Bedingungen vergegenwärtigen, von denen das Eintreten der Bewegung abhängig ist. Die erste Bedingung, welche den Apparat — Radiometer, Otheoskop oder Torsionsapparat — erst zu dem macht, was wir einen „radiometrischen Apparat“ nennen, ist die, dass das

1) Crookes, Compt. rend. **83.** p. 1233. 1876. Proc. of the London Roy. Soc. **25.** p. 308 u. 309. 1876.

in dem Instrumente eingeschlossene Gas bis unter den neutralen Punkt verdünnt ist. Dann ergibt sich als allgemeinster Satz folgender:

Auf die beweglichen Theile eines radiometrischen Apparates wirken Kräfte ein, sobald innerhalb desselben das Temperaturgleichgewicht gestört ist.

Eine nähere Angabe, wie und in welcher Richtung diese Kräfte wirken, wovon ihre Grösse abhängt u. s. w., lässt sich vor der Hand nicht machen, sondern man muss rein empirisch die Versuche zu grösseren Classen vereinigen und kann so folgende Regeln geben:

1) Ein bestrahlter ebener Radiometerflügel sucht mit der wärmeren Seite zurückzuweichen.

2) Ein erwärmter gekrümmter Radiometerflügel sucht mit der convexen Seite zurückzuweichen.

3) Ein einer erwärmten Fläche gegenüber aufgehängter Radiometerflügel sucht von dieser zurückzuweichen.

Mit diesen Sätzen ist jedoch wenig gewonnen, wenn wir sie nicht unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt bringen können, der uns den Vorgang verständlich macht und uns zeigt, worauf es dabei eigentlich ankommt.

Zu einem solchen allgemeinen Gesichtspunkt werden wir gelangen, wenn wir uns überlegen, welcher Vorgang bei den radiometrischen Erscheinungen eigentlich derjenige ist, bei welchem die Kraft einsetzt. Die Bewegung entsteht durch die Bestrahlung des Apparates; die Kraft der Bewegung muss also der Kraft der Strahlung entnommen sein.

Untersucht man nun die durch die Bestrahlung in dem Apparate successive hervorgebrachten Veränderungen, so gelangt man sehr leicht zu der Erkenntniss, dass die Bewegung der Flügel nur durch einen Wärmeübergang vom Flügel an das Gas, oder umgekehrt, hervorgebracht werden kann, und in der That haben sich alle Radiometertheorien, die auf einer anderen Grundlage beruhen, sehr bald als unbrauchbar erwiesen.

Betrachten wir die Radiometerbewegung unter diesem

Gesichtspunkte, so wird der erste[1]) ausgesprochene Satz die Form annehmen:

Ein bestrahlter ebener Radiometerflügel sucht mit derjenigen Seite zurückzuweichen, welche die grösste Wärmemenge an das Gas abgibt.

Da es misslich ist, bei solchen Sätzen auf die Form der mitwirkenden Körper Rücksicht zu nehmen, wollen wir lieber auf die Flächenelemente zurückgehen und sagen:

Ein Flächenelement, welches Wärme an die verdünnte Luft überleitet, sucht zurückzuweichen mit einer Kraft, die mit der Intensität des Wärmestromes wächst.

Wir sind sogar im Stande, anzugeben, nach welchem Gesetze die Kraft mit der Quantität der abgegebenen Wärme zunimmt. Crookes[2]) hat nämlich mit Hülfe eines sehr empfindlichen Torsionsapparates, in welchem ein berusster Markbalken als bestrahltes Object diente, nachgewiesen, dass, wenn der Apparat möglichst vor Ausstrahlung nach aussen geschützt war, die Ablenkungen im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung der Lichtquelle von dem Balken zunahmen. Da nun die zur Torsion des Fadens nöthige Kraft dem Torsionswinkel proportional ist, so wuchs die von der Strahlung hervorgebrachte Kraft ebenfalls in jenem Verhältnisse. Ganz ebenso wächst aber auch die Intensität der auf jedes Flächenelement des Markbalkens fallenden Strahlung, wenn wir die Dimensionen desselben gegen seine Entfernung von der Lichtquelle vernachlässigen dürfen. Daher nimmt die von jedem Element der Russoberfläche absorbirte Wärmemenge, und somit die Temperaturerhöhung eines jeden Elements in demselben Maasse zu. Nun ist die von einem Flächenelement im Zeitelement an die umgebende Luft abgegebene Wärmemenge proportional der Temperaturdifferenz zwischen Russ und Luft, also ist die Zunahme des Wärmestromes proportional der Temperaturzunahme des Russes, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle. In demselben Verhältnisse nimmt aber,

---

1) vgl. p. 25.

2) Crookes, Phil. Trans. **46.** (2) 1876.

wie wir oben gezeigt haben, die auf den ganzen Markbalken, mithin auch die auf jedes Oberflächenelement desselben wirkende Kraft zu. Da diese Kraft nun verschwindet, wenn die übergeführte Wärmemenge Null ist, so ist sie proportional der von dem Elemente in der Zeiteinheit abgegebenen Wärmemenge.

Wir können also den Satz aussprechen:

Ein Flächenelement, welches Wärme an die verdünnte Luft überleitet, sucht zurückzuweichen mit einer Kraft, die der Intensität des Wärmestroms proportional ist.

Hier drängt sich sofort die Frage auf, ob nicht eine ähnliche Kraft an einem Flächenelement auftreten wird, welches Wärme an das Gas nicht überleitet, sondern von diesem empfängt. Auf diese Frage antwortet der p. 25 unter 3) aufgestellte Satz, wenn wir ihn unter dem Gesichtspunkte der Wärmeleitung betrachten, den wir allgemein für die Radiometerbewegung gewonnen haben.

Denn die Wärme, welche von der ersten erwärmten Fläche an das Gas abgegeben wird, tritt an der Oberfläche des Radiometerflügels einfach wieder aus dem Gase heraus, und, indem sie an den Flügel übergeht, ertheilt sie ihm eine zurückweichende Bewegung. Nach der Analogie des obigen Vorganges werden wir auch hier schliessen dürfen, dass die zurückstossende Kraft proportional der übergehenden Wärmemenge ist. Dies stimmt auch mit der Erfahrung überein, dass diese Kraft mit der Temperaturdifferenz zwischen erwärmter Fläche und Gas und mit der Annäherung beider Flächen gegen einander wächst. Wir können also den obigen Satz dahin erweitern, dass wir sagen:

Ein Flächenelement, an welchem Wärme in die verdünnte Luft ein- oder aus ihr austritt, erfährt eine Zurückstossung, deren Grösse proportional der Intensität des an ihm auftretenden Wärmestromes ist.

In diesem Satze sind nicht nur die drei oben angegebenen Regeln, sondern überhaupt alle Sätze enthalten, die sich über die Radiometerbewegung aussprechen lassen. So geht aus ihm der Einfluss direct hervor, den eine günstige

Stellung des Flügels gegen die Glaswand auf die Bewegung hat. Denn je näher der Flügel der Glaswand gegenübersteht, desto schneller geben die Lufttheilchen ihre Wärme an diese Wand ab, desto schneller geht also die Leitung vor sich, und desto mehr Wärme wird daher dem Flügel in der Zeiteinheit entzogen. Da Stokes — wie schon p. 23 erwähnt — auch die bei Radiometern mit gekrümmten Flügeln auftretenden Erscheinungen auf die günstige Stellung der convexen Seite gegen die Glaswand zurückgeführt hat, so enthält unser Satz also auch die p. 25 unter 2) aufgeführte Regel in sich.

Theorie der Radiometerbewegung.

Bis jetzt haben wir von dem Gesichtspunkt aus, dass die Radiometerbewegung durch den Wärmeübergang zwischen einer Fläche und einem Gas erzeugt wird, die Gesetze dieser Bewegung zu ergründen gesucht, ohne uns irgend eine theoretische Vorstellung darüber zu bilden, wieso ein solcher Wärmeübergang im Stande ist, die Bewegung hervorzurufen. Ueber diesen Punkt gibt es nun zwei ganz verschiedene Erklärungsweisen, nämlich die Theorie der Luftströmungen und diejenigen Radiometertheorien, die sich auf die kinetische Gastheorie stützen.

Diejenige Ansicht, welche die Bewegung auf Luftströmungen[1]) zurückführen will, lässt sich wohl kaum rechtfertigen. Da nämlich die analogen Erscheinungen unter Atmosphärendruck gerade den Radiometerbewegungen entgegengesetzt verlaufen, so müsste man zur Haltung dieser Theorien annehmen, dass in der verdünnten Luft die Luftströmungen ganz anderen Gesetzen folgen, als unter gewöhnlichem Drucke.

Diese Gesetze könnte man aber höchstens aus den Radiometerbewegungen schliessen und geriethe so in einen circulus vitiosus. Uebrigens ist es zweifellos, dass in den Radiometern Luftströmungen entstehen; diese sind jedoch bei den hohen Verdünnungen sehr schwach, und sie sind

1) Neesen, Pogg. Ann. **156.** p. 144—156. 1875. **160.** p. 143—153. 1877. O. E. Meyer, Kinetische Theorie d. Gase, Breslau p. 154. 1877.

nicht die Ursache der Bewegung, sondern pflegen derselben gerade entgegenzuwirken.

Von der Unmöglichkeit, die Bewegung auf Luftströmungen zurückzuführen, kann man sich übrigens durch eine sehr einfache Erscheinung überzeugen, die ich zu beobachten Gelegenheit hatte. Ein Radiometer oder richtiger Otheoskop besass ein bewegliches Kreuz mit vier in einem Winkel von etwa 45° gegen die Horizontalebene geneigten, radial eingestellten Glimmerflügeln, die auf ihrer oberen Seite berusst waren. Unmittelbar über diesem Kreuze befand sich ein ebenfalls um eine verticale Axe leicht drehbares, horizontal hängendes, kreisförmiges Glimmerscheibchen. Horizontal einfallendes Sonnenlicht erzeugte eine Rotation des Kreuzes mit vorangehender glatter Seite und eine entgegengesetzte Rotation der Scheibe.

Dieselbe Bewegung blieb bestehen, wenn man einen Theil des Lichtkegels so abschnitt, dass nur die berussten Seiten der Flügel bestrahlt wurden, während sich die glatten Seiten im Schatten befanden. Beschattete man dagegen die berussten und bestrahlte die hellen Seiten der Flügel, so kehrte sich die Bewegung des Kreuzes um, sodass jetzt die berussten Seiten vorangingen. Das Glimmerscheibchen dagegen behielt seine frühere Rotationsrichtung bei, und es drehten sich also jetzt Flügel und Scheibchen in derselben Richtung.

Dabei ist es wohl undenkbar, dass infolge des Wechsels der Beleuchtung die Luftströmungen sich an einer Stelle umkehren sollen, während sie unmittelbar darüber dieselbe Richtung haben wie vorher.

Von einer sehr sicheren und schon durch mannigfaltige andere Erfahrungen fast zur Gewissheit gewordenen Grundlage gehen diejenigen Theorien aus, die sich auf die kinetische Gastheorie stützen.

Der gemeinsame Gedanke aller dieser Theorien ist der, dass das „Vacuum", mit welchem wir es bei den Radiometern zu thun haben, durchaus kein leerer Raum ist, sondern dass sich darin noch immer eine ungeheure Anzahl von Luftmolecülen befindet. Wenn diese Molecüle nun auf eine

Fläche von höherer Temperatur treffen, so geht ein Theil der in der Fläche enthaltenen Wärmemenge an die betreffenden Gasmolecüle über, diese werden wärmer, d. h. nach der kinetischen Gastheorie: sie prallen mit grösserer Geschwindigkeit zurück, als sie angekommen sind. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Action und Reaction muss die wärmere Fläche von diesen mit grösserer Geschwindigkeit fortfliegenden Theilchen einen grösseren Rückstoss erleiden, als wenn sie dieselbe Temperatur besässe wie das umgebende Gas. Infolge dessen ist die wärmere Seite des Radiometerflügels einem grösseren Rückstoss oder Druck ausgesetzt, als die kältere, bewegt sich also rückwärts. Ebenso stossen diese erwärmten Gasmolecüle eine Fläche, an die sie anprallen, zurück, indem sie derselben ihre überschüssige Geschwindigkeit abgeben.

Uebrigens ist nach dieser Erklärung unser p. 27 über die Radiometerbewegung aufgestellter Satz etwas zu modificiren, da ein Flächenelement hiernach überhaupt immer einen Rückstoss erfährt, auch wenn es dieselbe Temperatur besitzt wie das Gas. Da aber in Wirklichkeit niemals eine Fläche der Bewegung durch das Gas ausgesetzt ist, ohne dass sich ihre Rückseite ebenfalls in dem verdünnten Gase befindet, so ist diese Modification unseres Satzes in praxi überflüssig.

Bis jetzt haben wir aber noch nicht erklärt, wieso diese Bewegung erst eintritt, wenn das Gas einen gewissen Grad der Verdünnung erreicht hat, und dieser Punkt ist es, in dessen Erklärung die verschiedenen hierher gehörigen Theorien wesentlich voneinander abweichen.

Von diesen allen scheint mir die von Osborne Reynolds aufgestellte Theorie, die von Schuster[1]) mitgetheilt und adoptirt wird, der Wahrheit am nächsten zu kommen.

Dieselbe beruht wesentlich auf der Annahme, dass die durch den Wärmeübergang von einem wärmeren Körper an das Gas den Gasmolecülen ertheilte überwiegende Bewegung in einer bestimmten Richtung durch keine Zusammenstösse dem Gase wieder entzogen werden kann, sondern dass dies nur geschieht, wenn die Bewegung aus dem Gase wieder an

1) Schuster, Nature 17. p. 143. 1877.

einen festen Körper übergeht. An den Stellen nun, wo die einseitige Bewegung in das Gas ein- und aus ihm austritt, werden gewisse Kräfte wirksam.

Diese Theorie stimmt vollkommen mit dem oben über die Radiometerbewegung aufgestellten allgemeinen Gesetze überein, und die an dem festen Körper auftretende Bewegung erklärt sich ganz einfach durch den Anprall der Gastheilchen und die Reaction der Wand. Dass dabei die auf ein Flächenelement wirkende Kraft proportional ist der Intensität des Wärmestroms, folgt aus unserer Annahme unmittelbar, wenn wir voraussetzen, dass die Verdünnung eine so grosse ist, dass auf beiden Seiten des Radiometerflügels jedes Flächenelement in der Zeiteinheit von der gleichen Zahl Molecüle mit derselben mittleren Geschwindigkeit getroffen wird. Sei diese Zahl n, und die zu dem Flächenelemente senkrechte Componente der mittleren Geschwindigkeit der anprallenden Molecüle v, so ist, wenn wir annehmen, dass eine Seite des Flügels dieselbe Temperatur besitzt wie das Gas, und wenn wir die Masse eines Molecüls $= 1$ setzen, die auf dieser Seite dem Flächenelement in der Zeiteinheit mitgetheilte Bewegungsgrösse gleich $2nv$. Prallen auf der wärmeren Seite des Flügels die Molecüle mit der mittleren normalen Geschwindigkeitscomponente $v + \Delta v$ ab, so ist die hier dem Flächenelement in der Zeiteinheit mitgetheilte Bewegungsgrösse $2n(v + \Delta v)$; also ist die zur Geltung kommende Kraft $2n\Delta v$, d. h. proportional der von dem Flächenelement an das Gas abgegebenen Wärmebewegung.

Was die umgekehrte Bewegung bei höherem Drucke betrifft, so wird diese zweifellos durch die an der wärmeren Seite aufsteigenden Luftströmungen hervorgerufen, welche bei zunehmender Verdünnung immer schwächer werden und endlich an dem neutralen Punkte der entgegengesetzten Kraft der Luftmolecüle gerade das Gleichgewicht halten. Da diese Luftströmungen, je nach der Gestalt der Fläche, an der sie entstehen, nach der Leitungsfähigkeit der warmen Substanz, nach der Form des Gefässes etc., von verschiedener Stärke und Richtung sind, so erklärt sich die Abhängigkeit der Lage des neutralen Punktes von allen diesen Dingen.

Die complicirten Erscheinungen bei den sogenannten electrischen Radiometern lassen sich, so weit sie in den höchsten Verdünnungen vor sich gehen, wohl nicht als analoge Wärmewirkungen auf die Luftmolecüle ansehen, sondern sind vielmehr bedingt durch die Gesetze der electrischen Erscheinungen in sehr verdünnten Räumen, sodass ihr Studium wohl für die Aufklärung dieser Gesetze, aber nicht für die der Radiometerbewegung von Wichtigkeit ist.

II. *Eine Wellenlängenmessung im ultrarothen Sonnenspectrum; von Ernst Pringsheim.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1 u. 2.)

Für die Untersuchung des Sonnenspectrums ist es von besonderem Interesse, die Wellenlänge der äussersten von der Sonne ausgesandten Strahlen zu kennen und so die Ausdehnung des gesammten Spectrums festzustellen. Um die Wellenlänge der am wenigsten brechbaren Strahlen zu bestimmen, beobachtete Müller[1]) und später Lamansky[2]) mit Hülfe einer Thermosäule den Brechungsexponenten der äussersten Strahlen eines von einem Crownglas-, resp. Steinsalzprisma entworfenen Spectrums und berechnete aus diesem Brechungsexponenten mittelst einer empirischen Formel, deren Richtigkeit nur innerhalb der Grenzen der sichtbaren Strahlen controlirbar war, die Grösse der Wellenlänge. Die Unzuverlässigkeit dieser Methode liegt auf der Hand, und so rechnete Müller auch aus derselben Beobachtung durch zwei verschiedene Formeln für die äusserste Wellenlänge die Werthe 0,00177 mm und 0,0048 mm aus.

Eine sichere Bestimmung der Wellenlänge ist nur mit Hülfe der Interferenz der Strahlen möglich, und diesen Weg schlug Abney[3]) ein, dem es gelang, den ultrarothen Theil eines Diffractionsspectrums zu photographiren. Da dabei die

1) Müller, Pogg. Ann. **105.** p. 352ff. 1858.
2) Lamansky, Pogg. Ann. **146.** 1872.
3) Abney, Phil. Trans. **2.** p. 653—667. 1880.

äussersten Strahlen des Spectrums erster Ordnung mit den Lichtstrahlen des Spectrums zweiter Ordnung zusammenfielen, so konnte er aus der bekannten Wellenlänge dieser Lichtstrahlen leicht auf die der äussersten Wärmestrahlen schliessen. Er fand dabei für diese die Zahl 0,001 075 mm.

Jedoch ist man keineswegs berechtigt, die so definirten Strahlen wirklich als die äussersten, von der Sonne zur Erde gelangenden Wärmestrahlen anzusehen, sondern die so gefundene Zahl hat lediglich eine individuelle, auf den bestimmten angestellten Versuch bezügliche Bedeutung und lehrt für die Sonnenstrahlung weiter nichts, als dass sich in derselben Strahlen bis zu einer Wellenlänge von 0,001 075 mm befinden. Daher ist die Untersuchung keineswegs abgeschlossen, sondern es ist wünschenswerth, durch neue Beobachtungen Strahlen von noch grösserer Wellenlänge in dem Sonnenspectrum nachzuweisen.

Eine solche Untersuchung habe ich im Laufe des Sommers 1882 im physikalischen Institute der Universität Berlin ausgeführt.

I. Apparat.

Da es darauf ankommt, das Vorhandensein von Strahlen nachzuweisen, deren Intensität eine sehr geringe zu sein scheint, so ist das Gelingen der Untersuchung wesentlich von zwei Hauptbedingungen abhängig. Man muss nämlich erstens dafür sorgen, dass die Intensität des beobachteten Spectrums eine möglichst bedeutende ist, und muss zweitens zum Nachweise der gesuchten äussersten Strahlen ein Instrument anwenden, welches eine möglichst grosse Empfindlichkeit für die betreffende Strahlengattung besitzt.

Zur Herstellung eines möglichst intensiven Spectrums benutzte ich einen vorzüglichen, von Chapman mit der Rutherford'schen Maschine verfertigten, planen, metallenen Gitterspiegel, der eine quadratische Apertur von 43,3 mm Seitenlänge besass und nach Angabe des Verfertigers 17296 Striche per Zoll hatte. Daraus ergibt sich der Abstand d zweier Theilstriche des Gitters gleich 0,001 468 52 mm.

Zur Controle dieser Angabe wurden mit dem Gitter Beobachtungen der Linien D und F vorgenommen, und aus

den bekannten Wellenlängen dieser Linien ergab sich im Mittel $d = 0{,}001\,484\,9$ mm, sodass wir mit hinreichender Sicherheit:

$$d = 0{,}001\,485 \text{ mm}$$

setzen können.

Um einen möglichst grossen Theil der Sonnenstrahlung zur Erzeugung des Spectrums zu benutzen, wurden alle von dem Metallspiegel eines Duboscq'schen Heliostaten reflectirten Sonnenstrahlen vermittelst eines kreisförmigen Silberspiegels von 90 mm Durchmesser und ca. 200 mm Brennweite auf die quadratische Oeffnung eines Spaltes von 1,3 mm Seitenlänge concentrirt, der im Brennpunkt des Spiegels aufgestellt war. Dieser Spalt diente als leuchtendes Object, und von ihm entwarf ein zweiter Silberspiegel von denselben Dimensionen in der Entfernung von etwa 1700 mm ein Bild. In den Gang der von diesem zweiten Spiegel ausgehenden Strahlen wurde der Gitterspiegel so eingeschaltet, dass der Lichtkegel gerade die ganze Apertur desselben bedeckte. Daher entwarf der Hohlspiegel nicht ein einfaches Bild des Spaltes, sondern das Gitter erzeugte zu beiden Seiten dieses Bildes noch eine Reihe von Diffractionsspectren. Eines der dabei auftretenden Spectren erster Ordnung wurde zu der Wellenlängenmessung benutzt.

Die oben erwähnten Silberspiegel waren durch Versilbern und Poliren der concaven Seite planconcaver Gläser hergestellt; der Spalt bestand aus zwei je 2 mm breiten, durch Querstreifen verbundenen Streifen von Metallblech.

Um die äussersten ultrarothen Strahlen bemerkbar zu machen, wurde nicht, wie bei Abney, ihre chemische Wirksamkeit benutzt, sondern ihre Wärmewirkung wurde durch einen von mir construirten radiometrischen Torsionsapparat sichtbar gemacht. Die Einrichtung dieses Apparats habe ich in einer früheren Arbeit des näheren beschrieben[1]), hier genüge die Angabe, dass die auf die Russseite eines im Vacuum aufgehängten, einseitig berussten Glimmerscheibchens fallenden Strahlen eine Bewegung dieses Scheibchens hervor-

1) Pringsheim, Ueber das Radiometer. Inaug.-Diss. p. 4 u. 5. Berlin 1882. Wied. Ann. **18.** p. 1 ff. 1883.

riefen. Gleichzeitig mit dem Scheibchen drehte sich ein damit verbundenes Spiegelchen, mit dessen Hülfe ein Lichtreflex auf eine Scala geworfen wurde. Die Bewegung dieses Reflexes diente als Zeichen und Maass der Ablenkung des Flügels. Der Apparat stand mit einer Quecksilberluftpumpe in Verbindung; jedoch hätte es für die vorliegende Untersuchung genügt, denselben in etwas vereinfachter Form so herzustellen, dass er nach einmaliger Auspumpung zugeschmolzen werden konnte.

Den Gang der Strahlen bei der Versuchsanordnung verdeutlicht die beigegebene schematische Zeichnung (Fig. 1):

Die von dem ausserhalb des Fensters aufgestellten Heliostaten H ausgehenden Strahlen gelangen zunächst durch einen Ausschnitt A des geschlossenen Fensterladens in das fast vollständig verdunkelte Zimmer, gehen dann durch eine an den Fensterladen direct anschliessende, etwa 500 mm lange Pappröhre P_1 und fallen in einer Entfernung von ca. 2510 mm vom Heliostaten auf den ersten Silberspiegel S_1. Von diesem werden sie auf den Spalt s concentrirt, gelangen dann zu dem zweiten Silberspiegel S_2, von dort auf das Gitter G und werden hier theilweise direct reflectirt, sodass ein Bild des Spaltes s in B entsteht, theilweise zerstreut. Die äussersten ultrarothen Strahlen des einen Spectrums erster Ordnung mögen sich in T vereinigen, wo sie auf das Glimmerblättchen des Torsionsapparats fallen.

Der Deutlichkeit wegen sind in der Figur die Einfallswinkel der Strahlen auf die Spiegel S_1 und S_2 viel zu gross gezeichnet. In Wirklichkeit wurden die Strahlen so nahe bei einander vorbeigeführt, als es die Breite der den Spalt s bildenden Metallstreifen gestattete.

Um den Torsionsapparat vor allen seitlichen Strahlungen und vor Luftströmungen zu schützen, war derselbe zunächst von einem mit Watte gefüllten Blechkasten K umgeben, der dem Glimmerscheibchen gegenüber einen Ausschnitt zum Einlassen der Strahlen besass. Vor diesem Ausschnitt wurde ein Papprohr P_2 aufgestellt, welches durch eine verticale Pappscheibe hindurchgesteckt war. Dem Spiegelchen des Torsionsapparates gegenüber befand sich in einer Entfernung

von ca. 1040 mm die Millimeterscala *M*, auf welcher die Lampe *L* mit Hülfe der Linse *l* und einer zweiten Oeffnung des Kastens *K* den Lichtreflex *L'* hervorbrachte.

Da die Wirkung der Strahlen auf unseren Apparat sich weit über den dunkeln Zwischenraum zwischen den Spectren erster nnd zweiter Ordnung hinaus erstreckte, und somit die Wirkung der leuchtenden Strahlen des zweiten Spectrums sich mit der der Wärmestrahlen des ersten vereinigte, so mussten diese beiden räumlich zusammenfallenden Spectren voneinander getrennt werden. Dazu wurde zunächst eine Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff benutzt, welche in den Gang der Strahlen bei *J* eingeschaltet wurde und alle sichtbaren Strahlen absorbirte, während sie die dunkeln Wärmestrahlen grösstentheils hindurchliess. Diese Lösung befand sich in einer Glasröhre, welche an beiden Enden abgeschliffen und mit Steinsalzplatten von 2 mm Dicke geschlossen war. Da es sehr unbequem und schwierig ist, die Steinsalzflächen auf längere Zeit rein und klar zu erhalten, so ist diese Art der Strahlenfiltration eine mühevolle und kostspielige. Ich benutzte daher später statt der Jodlösung eine dünne, 0,3 mm dicke, vollständig schwarze Ebonitplatte, da diese Substanz nach Abney und Festing[1]) für Strahlen von grosser Wellenlänge sehr diatherman sein soll. Diese Platte zeigte sich auch in der That sehr durchlässig für die äussersten ultrarothen Strahlen, und ihre Anwendung ist eine sehr bequeme.

Bei unserer Aufstellung fanden alle Reflexionen an Metallflächen statt, und ein Durchgang der Strahlen durch Glas war vollständig vermieden bis auf die sehr dünne Glaskugel des Torsionsapparats, durch welche die Strahlen hindurch mussten, ehe sie den Radiometerflügel trafen. Da jedoch eine Absorption von Strahlen in dieser Glashülle auf den Flügel im gleichen Sinne bewegend wirkt, wie die Absorption in der Russschicht[2]), so kamen auch die in der Glashülle etwa absorbirten Strahlen zur Wirksamkeit.

---

1) Abney u. Festing, Chem. News. **43**. p. 176—177. 1881.

2) Vgl. Pringsheim, Ueber das Radiometer. Inaug.-Diss p. 6—17. Berlin 1882. Wied. Ann. **18**. p. 7 ff. 1883.

Obwohl das Uebereinanderfallen der leuchtenden Strahlen des zweiten und der dunkeln des ersten Spectrums ein bequemes Mittel gewährt, die Wellenlänge der an jeder Stelle auftretenden dunkeln Strahlen annähernd zu schätzen, so richtete ich die Aufstellung doch derart ein, dass eine exacte Messung der Wellenlängen möglich war. Zu diesem Zwecke stellte ich den Gitterspiegel G auf dem um eine verticale Axe drehbaren Tischchen eines Spectrometers auf, dessen Fernrohre entfernt wurden. An dem in Intervalle von fünf Bogenminuten eingetheilten Theilkreise liess sich die Stellung des Tischchens mittelst eines am letzteren durch einen Arm befestigten Mikroskopes ablesen, dessen Fadenkreuz mit Hülfe einer Mikrometerschraube seitlich verschoben werden konnte, sodass dadurch die Ablesung bis auf ganze Minuten direct ermöglicht wurde. Das Spectrometer hatte an seinem Fussgestell drei Stellschrauben, ferner stand das Tischchen gesondert auf drei Schrauben, und endlich war der Spiegel G in ein Gehäuse eingesetzt, welches wieder auf drei Stellschrauben ruhte, sodass man das Tischchen willkürlich gegen das Spectrometer, und die Ebene des Spiegels gegen die des Tischchens verstellen konnte.

II. Methode.

Da bei unserer Anordnung nur das Gitter drehbar, alle anderen Theile des Apparates aber fest aufgestellt waren, so musste eine etwas andere Art der Messung angewandt werden wie bei der Wellenlängenbestimmung im sichtbaren Spectrum, wo in der Regel das Gitter fest aufgestellt und das beobachtende Fernrohr drehbar ist.

Seien E und E' (Fig. 2) zwei als parallel angenommene einfallende Strahlen, die in O und O' auf zwei benachbarte Theilstriche des Gitters fallen, und seien A und A' die beiden ebenfalls parallel gedachten Strahlen, die bei der allgemeinen Interferenz in T (Fig. 1) übrig bleiben, und deren Wellenlänge gemessen werden soll. Sind N und N' die in O und O' auf der Gitterebene errichteten Normalen, so hatten wir bei unserer Aufstellung den in der Zeichnung ebenfalls berücksichtigten Fall, dass der einfallende und der

beobachtete Strahl auf derselben Seite der Gitternormale liegen. Ziehen wir $O'P$ senkrecht auf E, $O'Q$ senkrecht auf A, und setzen wir $OO' = d$, Winkel $(NOE) = (N'O'E') = \delta$, Winkel $(AOE) = (A'O'E') = \delta_1$, so ist die Wegdifferenz der Strahlen A und A', wenn sie zur Interferenz gelangen, also die Wellenlänge λ der an dieser Stelle übrig bleibenden Strahlen des Spectrums erster Ordnung:

$$\lambda = PO + OQ$$
$$\lambda = d[\sin(PO'O) + \sin(QO'O)]$$
$$\lambda = d[\sin\delta + \sin(\delta + \delta_1)].$$

Die vollständige Theorie der Interferenz lehrt, dass diese Formel bestehen bleibt, wenn statt der beiden Strahlen E und E' eine noch so grosse Anzahl von Strahlen vorhanden ist, die auf mehrere Oeffnungen von der Weite d fallen. Da die Grösse d bekannt ist, genügt also zur Bestimmung von λ die Messung der Winkel δ und δ_1.

Um den Einfallswinkel δ zu finden, wurde zunächst das Tischchen mit dem Gitter so eingestellt, dass die Gitternormale mit dem einfallenden Strahle zusammenfiel, und sodann wurde die Zahl der Scala notirt, auf welcher das Fadenkreuz des Mikroskopes in dieser Stellung stand. Diese Zahl wollen wir mit a bezeichnen. Dann wurde der Gitterspiegel so gestellt, dass das directe Bild des Spaltes unseren Torsionsapparat traf; die entsprechende Stellung des Fadenkreuzes sei b. Endlich wurde durch eine fernere Drehung des Tischchens dem Spiegel diejenige Lage gegeben, in welcher der Torsionsapparat gerade noch von den äussersten auf ihn wirksamen Strahlen getroffen wurde. Bei dieser Einstellung befinde sich das Fadenkreuz auf der Zahl c. Da das Fadenkreuz des Mikroskopes mit der Gitternormale einen constanten Winkel bildet, so können wir die Zahlen a, b und c auch direct auf die Stellung der Gitternormale in den drei verschiedenen Lagen beziehen. Die Zeichnung (Fig. 2) bezieht sich auf die dritte Stellung, wo die Gitternormale durch die Zahl c bestimmt ist, während dem einfallenden Strahl E, der in der ersten Stellung mit der Gitternormale zusammenfällt, immer die Zahl a zukommt. Daher ist der Einfallswinkel:

$$\delta = a - c,$$

wenn, wie es bei unserer Aufstellung der Fall war, der Spiegel von der ersten Stellung zur dritten im Sinne der abnehmenden Zahlen gedreht werden musste.

Da in der zweiten Stellung der directe Reflex dieselbe Lage hat, wie der Strahl *A* in der Zeichnung, so ist der Winkel δ_1 zwischen *A* und *E* gleich dem Winkel zwischen dem directen Reflex in der zweiten Stellung und dem einfallenden Strahl *E*. Der Winkel zwischen der Spiegelnormale in der zweiten Stellung und dem Strahl *E* ist nun gleich $b - a$, da der Spiegel von der ersten zur zweiten Lage im Sinne der wachsenden Zahlen gedreht werden musste; also ist der Winkel δ_1 zwischen dem directen Reflex und *E*:

$$\delta_1 = 2(b - a).$$

Aus der Beobachtung der Grössen a, b und c können wir also δ und δ_1, mithin auch λ berechnen.

III. Messung.

Damit die an dem Theilkreise des Spectrometers abgelesenen Grössen a, b, c mit den Winkeln δ und δ_1 wirklich in der oben angenommenen Weise zusammenhängen, ist es nöthig, dass die Einfallsebene der Strahlen bei allen Stellungen des Gitters dieselbe bleibt und parallel zu der Ebene des Theilkreises ist. Um dies zu bewirken, wurde zunächst das Spectrometer mit Hülfe der an seinen Füssen angebrachten Stellschrauben so aufgestellt, dass die Ebene des Theilkreises horizontal stand, was durch eine darauf gesetzte Libelle sichtbar war. Dann wurde das Tischchen mittelst seiner besonderen Schrauben so gestellt, dass es eine horizontale Lage hatte und bei der Drehung um 360° in jeder Stellung beibehielt. Darauf wurde das Gitter auf das Tischchen aufgesetzt, und zwar zunächst in der Stellung, in welcher die auffallenden Strahlen gegen die Gitterebene senkrecht waren.

Um diese Einstellung genauer machen zu können, wurde statt der Pappröhre P_1 (Fig. 1) vor die Oeffnung *A* im Fensterladen eine Pappscheibe vorgesetzt, welche in der Mitte einen rechtwinkligen Ausschnitt von 16 mm Höhe und 3 mm Breite besass. Dadurch wurde das einfallende Licht-

bündel ein weit schmaleres und daher eine genauere Einstellung ermöglicht. Ausserdem wurde in dem Spalte *s* ein Fadenkreuz von feinem Metalldraht angebracht und das Gitter so eingestellt, dass das Bild des Fadenkreuzes, welches von dem Spiegel *G* gegen den Spiegel S_2 zurückgeworfen wurde, durch den Spalt *s* hindurch auf den Spiegel S_1 fiel und von diesem reflectirt auf dem in *A* angebrachten Schirm in etwas vergrössertem Maassstabe erschien. Die Einstellung wurde dann so gemacht, dass die Abweichung in der Horizontalebene durch Drehung des Tischchens, worauf das Gitter stand, corrigirt wurde, während die Abweichung in der Verticalen zur Hälfte durch eine der am Fussgestell des Gitters angebrachten Stellschrauben, zur anderen Hälfte durch Veränderung der Höhenstellung des Spiegels S_2 beseitigt wurde. Auf diese Weise wurde die Aufstellung so regulirt, dass die Mitte des Fadenkreuzes gerade in die Mitte des rechteckigen Ausschnittes zu liegen kam. Um auch bei einer beliebigen anderen Stellung des Gitters die Einfallsebene unverändert zu erhalten, wurde die Lage des alle Spectren durchlaufenden horizontalen Striches, welcher von dem horizontalen Faden des Fadenkreuzes herrührte, auf der vor dem Torsionsapparat aufgestellten Pappscheibe durch einen Bleistiftstrich fixirt und dann die beiden anderen an dem Gestell des Gitterspiegels befindlichen Schrauben so gestellt, dass der horizontale Strich bei jeder beliebigen Drehung des Tischchens immer dieselbe Lage beibehielt. Darauf wurde der Spiegel wieder in die vorhergehende Lage zurückgedreht und dieselbe Manipulation so lange fortgesetzt, bis das Gitter in allen Lagen die richtige Stellung hatte.

Auch bei der zweiten Einstellung, wo der direct reflectirte Strahl auf den Torsionsapparat fiel, wurde nicht die ganze Oeffnung *A*, sondern nur der kleine Ausschnitt benutzt, um eine genauere Einstellung möglich zu machen. Dabei war es natürlich erforderlich, darauf zu achten, dass das Bild des Auschnittes gerade auf die Mitte aller Spiegel fiel.

Damit die direct reflectirten Strahlen in dieser Stellung auch wirklich dieselbe Lage einnahmen, wie die äussersten

wirksamen Strahlen bei der dritten Stellung des Gitters, war es nöthig, diejenige Stelle des Radiometerflügels zu fixiren, welche bei der dritten Stellung von den äussersten ultrarothen Strahlen getroffen wird. Da die Intensität der dunkeln Wärmestrahlen mit ihrer Entfernung vom rothen Ende des Spectrums abnimmt, und da die Wirksamkeit der auf den Radiometerflügel fallenden Strahlen mit der Entfernung von der Drehungsaxe des Flügels wächst, so wurde der Torsionsapparat so aufgestellt, dåss die äusserste, empfindlichste Kante des Flügels dem rothen Ende des untersuchten Spectrums zugekehrt war. Wenn dann die auf den Flügel fallenden Strahlen überhaupt eine Bewegung hervorriefen, so konnte man sicher sein, dass auch auf die äusserste Kante des Flügels wirksame Strahlen fielen. Deshalb wurde bei der zweiten Stellung des Gitters das direct reflectirte Bild des Spaltes so eingestellt, dass der verticale Faden des Fadenkreuzes mit der Kante des Flügels zusammenfiel. Die Bestrahlung des dem sichtbaren Spectrum näheren Theiles der Glaswand des Torsionsapparates, die möglicherweise eine Bewegung hätte hervorbringen können, wurde durch den den Apparat umgebenden Blechkasten abgeschnitten.

Die dritte Einstellung des Gitters wurde in der Art vorgenommen, dass dasselbe zunächst in eine solche Stellung gebracht wurde, bei der die Bewegung des Torsionsapparates eine sehr geringe war. Dann wurde die feinere Einstellung mittelst der an dem Dreharm des Tischchens angebrachten Mikrometerschraube gemacht. Sehr kleine Ablenkungen des Radiometerflügels konnten durch tactmässiges Unterbrechen und Wiederherstellen der Bestrahlung sehr leicht und schnell multiplicirt werden. In der ersten Lage des Gitters, in der sich keine Wirkung mehr zeigte, konnte man mit Gewissheit behaupten, dass die äussersten wirksamen Strahlen auf die Grenzkante des Flügels fielen. In dieser Stellung wurde die Ablesung c gemacht.

IV. Resultate.

Leider konnte wegen ungünstiger Witterung nur eine geringe Zahl von Messungen ausgeführt werden. Dabei er-

gab sich, wenn man von dem rothen Ende des ersten Spectrums aus stetig bis zu der Stelle vordrang, wo die Wirkung auf den Apparat aufhörte:

	a	*b*	*c*	*λ*
am 25. Juli mit Jodlösung	139° 40′ 0,0″	159° 0′ 0,0″	130° 21′ 55,5″	0,001 328 1 m
„ 7. Aug. „ „	167 30 0,0	183 57 47,0	154 57 19,4	0,001 365 8 m
„ Ebonit	165 46 39,9	184 27 45,8	154 38 56,6	0,001 383 4 m

Die Lage der äussersten ultrarothen Strahlen fiel hier überall noch in das Roth des zweiten Spectrums hinein, wie man sich durch eine eingeschaltete rothe Glasplatte leicht überzeugen konnte, da diese das blaue Ende des dritten Spectrums, welches mit dem rothen Ende des zweiten zusammenfiel, absorbirte.

Drehte man das Gitter noch weiter, so kam zunächst ein schmaler Streifen der Unempfindlichkeit, sehr bald jedoch zeigte sich wieder eine Wirkung der dunklen Strahlen auf den Torsionsapparat. Dieselbe begann noch innerhalb des Lichtspectrums zweiter Ordnung und dehnte sich bis an das äusserste Ende dieses Spectrums aus, wo der Uebergang in den dunklen Theil des Spectrums zweiter Ordnung eine Trennung beider Spectren nicht mehr zuliess.

Somit ist erwiesen, dass noch Strahlen im Sonnenspectrum vorkommen, deren Wellenlänge doppelt so gross ist, wie die der äussersten sichtbaren rothen Strahlen, also ungefähr:

$$\lambda = 0{,}00152 \text{ mm}.$$

Um die Breite des unwirksamen Streifens festzustellen, wurde die Wellenlänge der ersten wieder wirksamen Strahlen gemessen. Dabei ergab sich:

	a	*b*	*c*	*λ*
am 7. Aug. mit Jodlösung	165° 3′ 32,0″	183° 31′ 21,4″	153° 34′ 21,5″	0,001 390 8
„ Ebonit	166 25 14,3	182 41 9,3	153 13 51,5	0,001 386 4

Der unempfindliche Streifen erstreckte sich also bei Benutzung der Jodlösung von $\lambda = 0{,}001\,365\,8$ mm bis $\lambda =$

0,001 390 8 mm, bei der Ebonitplatte $\lambda = 0{,}001\,383\,4$ mm bis $\lambda = 0{,}001\,386\,4$ mm. Ueber den Grund dieser Unempfindlichkeit lässt sich vorläufig nichts genaues angeben. Doch sind drei Möglichkeiten vorhanden: Entweder befindet sich an dieser Stelle ein Complex von Fraunhofer'schen Linien, oder sowohl Ebonitplatte wie Jodlösung sind für Strahlen dieser bestimmten Brechbarkeit adiatherman, oder der Russ absorbirt diese Strahlen nicht mehr. Dass der Streifen bei Anwendung der Jodlösung viel breiter ist als bei der Ebonitplatte, würde bei allen drei Erklärungsweisen seinen Grund darin finden, dass die Jodlösung überhaupt an dieser Stelle des Spectrums weniger durchsichtig ist als der Ebonit.

V. Praktische und theoretische Grenzen.

Wir sind bei unserer Untersuchung auf die praktische Schwierigkeit gestossen, dass die dunklen Strahlen des Spectrums erster Ordnung mit denen zweiter Ordnung zusammenfielen. Wenn uns auch vorläufig noch die Mittel fehlen, diese beiden Strahlengattungen zu trennen, so ist es doch sehr wahrscheinlich, dass es gelingen wird, durch sorgfältige Untersuchung der Diathermansie verschiedener Stoffe eine solche Substanz aufzufinden, die für die ersten ultrarothen Strahlen undurchdringlich ist und erst von einer gewissen sehr grossen Wellenlänge an die Strahlen durchlässt.

Zur Untersuchung der Diathermansie beliebiger Körper ist nun unsere oben beschriebene Aufstellung sehr bequem, da man die betreffende Substanz nur vor den Torsionsapparat zu bringen hat, um bei Drehung des Gitters alle Stellen des Spectrums mit Leichtigkeit zu constatiren, an denen der Körper die Strahlen hindurchlässt. Ja selbst eine quantitative Bestimmung der Diathermansie würde sich aus der Stärke des hervorgebrachten Ausschlages wenigstens annähernd herleiten lassen.

Wenn wir auf diese Weise einen Körper von der verlangten Eigenschaft gefunden hätten und denselben bei unserer Aufstellung in den Gang der Strahlen einschalteten, so würde er uns die Wärmespectren erster und zweiter Ord-

nung ebenso trennen, wie die Ebonitplatte das leuchtende Spectrum von dem dunklen schied.

Ein zweiter Umstand, welcher der ferneren Untersuchung der äussersten ultrarothen Strahlen nach der von uns gewählten Methode eine Grenze setzen könnte, wäre der, dass der Russ des Radiometerflügels für Strahlen von so grosser Wellenlänge nicht mehr die nöthige Absorptionsfähigkeit besässe. Sollte sich dies herausstellen, so müsste man als radiometrische Substanz statt des Russes einen anderen Körper wählen, der eine grössere Empfindlichkeit für die betreffenden Strahlen besässe. So sind diese praktischen Grenzen der Untersuchung wohl nicht allzuschwer immer weiter hinauszurücken.

Anders steht es jedoch mit einer aus der Theorie folgenden Beschränkung, welche direct aus der Formel (p. 38) hervorgeht. Da nämlich:

$$\lambda = d[\sin\delta + \sin(\delta + \delta_1)]$$

ist, so kann, da $\sin\delta + \sin(\delta + \delta_1)$ allerhöchstens gleich 2 werden kann — eine Grenze, die praktisch übrigens nie zu erreichen ist —, λ niemals grösser werden als $2d$. Wenn noch grössere Wellenlängen in der Sonnenstrahlung vorkämen, so würden die betreffenden Strahlen im Interferenzspectrum gar nicht zur Erscheinung kommen, und ihre Constatirung nach unserer Methode wäre unmöglich. Da nun die Breite des Spectrums immer geringer wird, je grösser man d macht, so ist diese Beschränkung der Methode eine sehr bedeutende, weil die Genauigkeit der Bestimmung wesentlich von der Breite des Spectrums abhängt. Bei dem von uns angewandten Gitterspiegel würde dieser theoretische Maximalwerth von λ:

$$\lambda_m = 0{,}002\,970$$

betragen, also durchaus von derselben Grössenordnung sein, wie der aus der Beobachtung gefundenen Werthe von λ.

Wenn also in der That in der Sonne Strahlen von so hoher Wellenlänge vorkämen, so würde diese Methode, wie jede andere auf der Untersuchung eines Diffractionsspectrums beruhende, nicht im Stande sein, dieselben zu consta-

tiren. Vorläufig jedoch wird es noch möglich sein, durch die Vervollkommnung der Mittel auf dem oben bezeichneten Wege mittelst unserer Methode Strahlen von noch grösserer Wellenlänge, als die von uns gefundenen, im Sonnenspectrum nachzuweisen.

III. *Fluorescenz nach Stokes' Gesetz; von Ed. Hagenbach.*

Eine Erwiderung von Hrn. Lommel[1]) auf meine kleine Abhandlung „das Stokes'sche Gesetz"[2]), sowie eine Arbeit von Hrn. Lubarsch[3]) über den gleichen Gegenstand veranlassen mich zu einer Replik, um anzugeben, welche Stellung ich zu den gemachten Einwendungen einnehme.

Leider haben anderweitige Arbeiten die definitive Redaction dieser Bemerkungen verzögert, die schon vor mehr als einem Jahre zum Abschluss bereit lagen.

Die Frage, ob die schiefe Stellung des Spectralapparates zur Oberfläche der fluorescirenden Flüssigkeit im Vergleich zu der senkrechten Stellung eine Steigerung der Lichtstärke im Apparate nach sich ziehe, habe ich in meiner Abhandlung unter Zuziehung des Lambert'schen Cosinusgesetzes für die Ausstrahlung verneinend beantwortet. Dabei hielt ich mich zu der Annahme des Cosinusgesetzes berechtigt durch die Analogie der fluorescirenden Oberfläche mit einem glühenden festen Körper und einige darauf bezügliche Versuche.

Hr. Lommel tritt nun vorerst theoretisch auf die Frage der Abhängigkeit der Ausstrahlung von dem Ausstrahlungswinkel näher ein. Er wendet dabei die von Fourier für

---

1) Lommel, Wied. Ann. **10.** p. 449. u. 631. 1880.

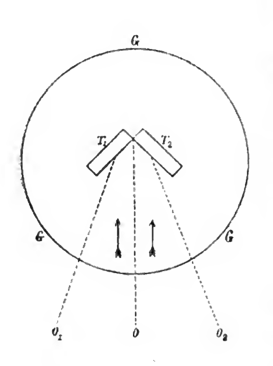
2) Hagenbach, Wied. Ann. **8.** p. 369. 1879.

3) Lubarsch, Wied. Ann. **9.** p. 665; **11.** p. 46. 1880.

die Wärmestrahlung eingeführte Betrachtungsweise auf das das Licht an und leitet daraus das Lambert'sche Cosinusgesetz für undurchsichtige Körper und ein davon abweichendes Gesetz für fluorescirende Körper ab.

In diesem Punkte muss ich nach eigener Prüfung Hrn. Lommel Recht geben; sowohl mit der Ableitung als mit dem gefundenen Resultate erkläre ich mich einverstanden. Was die Versuche betrifft, welche zeigen sollen, dass die Helligkeit des ausgestrahlten Fluorescenzlichtes mit wachsendem Emanationswinkel zunimmt, so mag die folgende von mir getroffene Anordnung vielleicht noch einfacher und deutlicher als die Lommel'schen Versuche die Richtigkeit seiner Behauptung darthun.

In ein mit Wasser gefülltes cylindrisches Glasgefäss G (siehe beistehende Figur) werden zwei durch parallele Glaswände begrenzte, mit Fluoresceïnlösung gefüllte Tröge T_1 und T_2 senkrecht zu einander eingesetzt. Das Licht fällt in der Richtung der Pfeile so auf, dass beide Tröge unter gleichen Winkeln getroffen werden. Bewegt man dann das beobachtende Auge von O nach O_1 oder O_2, so kann man sich von der Zunahme der Helligkeit bei wachsendem Emanationswinkel sehr gut überzeugen, und zwar besonders deutlich, wenn man durch ein blaues oder grünes Glas hindurchsieht.



Wenn ich nun auch in diesem Punkte der Photometrie Hrn. Lommel vollkommen beistimme, so mag es doch gestattet sein, die Bemerkung beizufügen, dass für die Praxis der Gewinn der Helligkeit durch schiefe Stellung des Spectralapparates ganz unbedeutend ist, wenn man bedenkt, dass der Cosinus des Grenzwinkels der Totalreflexion etwa 0,7 beträgt, und somit der Gewinn das 1,4fache nicht übersteigen kann.

Ich gehe nun über zum Einfluss der Entfernung des Spectralapparates auf die Lichtstärke.

Die Lommel'sche Behauptung, dass die Annäherung der Spalte des Spectralapparates an die fluorescirende Substanz die absolute Lichtintensität vermehre, hatte ich bestritten, jedoch, wie ich deutlich sagte, nur unter der Voraussetzung, dass die leuchtende Fläche den Oeffnungswinkel des Collimators ganz ausfülle. Sobald diese gleiche Annahme gemacht wird, gelangt auch Hr. Lommel zu dem Resultat, dass die in den Apparat gelangende Lichtmenge von der Entfernung des Spectroskopes zu der fluorescirenden Schicht unabhängig sei.

In diesem Punkte sind also Hr. Lommel und ich einig. Es lag hier nur ein Missverständniss vor, daher rührend, dass Hr. Lommel von einem kleinen, den Oeffnungswinkel nicht ausfüllenden leuchtenden Element ausging, während ich die Ausfüllung des Oeffnungswinkels durch die leuchtende Fläche voraussetzte. Bei meinen Versuchen suchte ich stets durch Annäherung der Spalte des Spectralapparates an die fluorescirende Fläche, oder durch Projection derselben vermittelst einer Linse auf die Spalte die genannte Bedingung zu erfüllen, da ja dadurch die Helligkeit gesteigert wird; es sei denn, dass ich aus besonderen Gründen[1]) ohne Collimator beobachtete, in welchem Falle dann natürlich die Lichtstärke mit der Entfernung abnimmt.

Hr. Lommel hat ferner behauptet, dass die Entfernung des Auges oder des Spectralapparates von der fluorescirenden Oberfläche einen Einfluss habe auf die Zusammensetzung des Lichtes; während ich denselben bestritt.

Nach den obigen Auseinandersetzungen kann die Lommel'sche Behauptung sich nur auf die Fälle beziehen, wo der Oeffnungswinkel nicht ausgefüllt wird; in diesen Fällen wird aber gewöhnlich im Vergleich zu dem Abstand der Spalte des Spectralapparates von der fluorescirenden Oberfläche die Tiefe der fluorescirenden Schicht ganz verschwindend klein sein und somit auch ganz entsprechend den

1) Hagenbach, Wied. Ann. 8. p. 391. 1879.

Lommel'schen Formeln keinen merklichenEinfluss auf die Zusammensetzung ausüben können.

In Betreff der Abhängigkeit der Farbe des Fluorescenzlichtes von der Concentration behauptet Hr. Lommel, dass bei wachsender Concentration die stärker absorbirenden Bestandtheile immer mehr gegen die minder absorbirbaren zurücktreten.

Ich gab dies nicht zu für den bei der vorliegenden Untersuchung gültigen Fall stark fluorescirender Flüssigkeiten, wo man die Tiefe als unendlich betrachten kann, und begründete meine Anschauung mit dem Ausdruck:

$$\frac{a'}{a''} \cdot \frac{k + k''}{k + k'} \cdot \frac{1 - e^{-\nu(k+k')R}}{1 - e^{-\nu(k+k'')R}},$$

der von ν unabhängig wird, wenn R ins Unendliche wächst.

Ein solches Verfahren hält Hr. Lommel nicht für zulässig, da, man möge sich R so gross vorstellen, als man will, jede der vorkommenden Exponentialgrössen für $\nu = 0$ den Werth Eins und mit wachsendem ν nach und nach alle Werthe zwischen Eins und Null annehme.

Diese Einwendung halte ich nicht für berechtigt.

Es drückt ν das Verhältniss aus, in welchem bei Aenderung der Concentration die Absorption zunimmt. Die Allgemeinheit der Betrachtung leidet nicht, wenn wir stets zu dem mehr absorbirenden Körper übergehen; dann ist aber ν stets grösser als Eins und nie gleich Null. Ich bleibe also bei der Behauptung, dass der erwähnte Ausdruck für $R = \infty$ von ν unabhängig wird.

Allerdings, wenn R nicht gleich unendlich gesetzt werden darf, was für wenig tiefe Gefässe oder nur schwach fluorescirende Flüssigkeiten gilt, dann ist die Lommel'sche Behauptung in Betreff der Abhängigkeit der Farbenmischung von der Concentration vollkommen richtig; allein gerade auf die bei der Beurtheilung des Stokes'schen Gesetzes in Frage kommenden Versuche findet das keine Anwendung.

Ich gehe nun über zu dem Vergleich des Absorptionsspectrums mit dem fluorescirenden Spectrum.

Hier muss ich vorerst gestehen, dass der diesen Punkt

berührende Abschnitt meiner Arbeit[1]), zwei plumpe Fehler enthält.

Der erste ist ein Rechnungsfehler; in der Formel auf der Mitte der Seite muss — statt + stehen, und es muss heissen:

$$\frac{F_1'}{F'} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{2 - (k_1 + k')\,R}{2 - (k + k')\,R}.$$

Der zweite Fehler ist eine unsinnige Behauptung. Das die Schicht durchsetzende Licht ist e^{-kR}; wie ich dazu kam, dafür $1 - e^{kR}$ zu setzen, was, wie Hr. Lommel richtig bemerkt, bei wachsender Dicke eine negative Lichtintensität gäbe, ist mir jetzt nachträglich unbegreiflich.

Diese „Reihe von Irrthümern", die Hr. Lommel mit Recht aufgedeckt hat, kann ich nicht entschuldigen und noch viel weniger rechtfertigen, ich kann nur um Nachsicht einkommen und bitten, den Abschnitt[2]) von „oder bei Vernachlässigung . . . ." bis zu den Worten „ . . . . Missverständniss vorliegen", zu streichen. Was dafür einzusetzen ist, werden wir weiter unten sehen; einstweilen wende ich mich zu den Abschnitten 10. und 11. in der Arbeit des Hrn. Lommel, wo das Verhältniss des Absorptions- und Fluorescenzspectrums besprochen wird.

Auch hier ist vorerst ein Rechnungsfehler zu erwähnen; wenn nämlich $k_1 > k$, so ist:

$$\frac{1 - e^{-(k_1 + k')\,R}}{1 - e^{-(k + k')\,R}}$$

kein echter, sondern ein unechter Bruch. Es muss also das Product:

$$\frac{k + k'}{k_1 + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1 + k')\,R}}{1 - e^{-(k + k')\,R}},$$

auf Echtheit untersucht werden. Die Entwicklung gibt bei Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$\frac{2 - (k_1 + k')\,R}{2 - (k + k')\,R},$$

was allerdings auch noch ein echter Bruch ist, aber bei verschwindendem R nach der Einheit convergirt.

1) Hagenbach, Wied. Ann. 8. p. 379. 1879.

2) Hagenbach, Wied. Ann. 8. p. 379. 1879.

Die von Hrn. Lommel aufgestellte Ungleichheit $A_1 / A > F_1 / F$, die für $R = 0$ in die Gleichheit übergeht. besagt also nur, dass das Verhältniss der in verschwindend dünnen Schichten absorbirten Lichtmengen grösser ist als das Verhältniss der Intensitäten des Fluorescenzlichtes bei nicht verschwindend dünnen Schichten, denselben aber bei ebenfalls verschwindend dünnen Schichten gleich wird; ein Resultat, das auch ohne Rechnung aus einfachen Betrachtungen leicht abzuleiten ist.

Allein abgesehen von dem erwähnten allerdings unbedeutenden Rechnungsfehler bin ich mit dem Gedankengang des Hrn. Lommel in den Abschnitten 10 und 11 und somit auch mit den aus den Formeln gezogenen Folgerungen nicht einverstanden.

Wenn wir in Betreff der optischen Deutlichkeit das Absorptionsspectrum mit dem Fluorescenzspectrum vergleichen wollen, so müssen wir das Verhältniss der Lichtstärken im ersteren dem Verhältniss der Lichtstärken im letzteren gegenüberstellen. Nun ist aber die Lichtstärke im Absorptionsspectrum die des durchgegangenen und nicht, wie Hr. Lommel annimmt, die des absorbirten Lichtes. Es gestalten sich somit die Betrachtungen, die in meiner Abhandlung[1]) an Stelle des Abschnittes, den ich zu streichen bitte, einzuschalten wären, folgendermassen:

Die Lichtmenge Eins wird infolge der Absorption in zwei Schichten von der Dicke R und den Extinctionscoëfficienten k und k_1, wobei $k_1 > k$, reducirt auf die durchgegangenen Lichtmengen:

$$D = e^{-kR} \quad \text{und} \quad D_1 = e^{-k_1 R},$$

und wir haben somit das Verhältniss:

$$\frac{D}{D_1} = \frac{e^{-kR}}{e^{-k_1 R}} = e^{(k_1 - k)R};$$

dies ist zu vergleichen mit dem Verhältniss der Intensitäten an zwei Stellen des fluorescirenden Spectrums[2]):

$$\frac{F_1}{F} = \frac{k_1}{k} \cdot \frac{k + k'}{k_1 + k'} \cdot \frac{1 - e^{-(k_1 + k')R}}{1 - e^{-(k + k')R}}.$$

1) Hagenbach, Wied. Ann. **8.** p. 379. 1879.

2) Hagenbach, Wied. Ann. **8.** p. 379. 1879. und **10.** p. 633. 1880.

Wir haben in beiden Gleichungen den grösseren Werth in den Zähler gesetzt, vergleichen also miteinander die unechten Brüche.

Lassen wir nun R von Null bis ins Unendliche wachsen, so nimmt D/D_1 von Eins bis ins Unendliche zu, F_1/F hingegen von k_1/k bis $(k_1/k).(k+k'/k_1+k')$ ab. Bei ganz dünnen Schichten sind also die Intensitätsunterschiede schroffer im Fluorescenzspectrum als im Absorptionsspectrum; nimmt dann R zu, so gelangen wir zu einem Punkte, wo das Verhältniss der beiden gleich ist, bei weiterem Wachsen von R zeigt dann stets das Absorptionsspectrum schroffere Unterschiede.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass zum Auffinden der Unterschiede im Fluorescenzspectrum eine ganz dünne Schicht genügt, ja sogar einigen Vortheil bietet. Zur Untersuchung des Absorptionsspectrums ist eine ganz dünne Schicht, wie sich das im Grunde von selbst versteht, ungeeignet, da zur Bildung eines Absorptionsstreifens stets eine gewisse Dicke erforderlich ist. Aus dem Umstande, dass beim Absorptionsspectrum mit zunehmender Dicke das Verhältniss der Intensität stets wächst, darf aber nicht geschlossen werden, dass unter allen Umständen eine möglichst dicke Schicht das Studium des Absorptionsspectrums am meisten begünstige, indem, wie Hr. Lommel ganz richtig bemerkt hat, der dunkle Grund schliesslich einen ganzen Theil des Spectrums überzieht und die einzelnen Streifen verschlingt; es ist das unter anderem an der von mir publicirten Darstellung der Absorption im Blattgrün deutlich zu erkennen.[1]) Es entspricht deshalb jedem Absorptionsstreifen eine Schichtendicke oder Concentration, bei welcher er am deutlichsten hervortritt; wir finden sie, wenn wir die Dicke wachsen lassen, bis eine weitere Zunahme ein Verschmelzen des Streifens mit dem allgemeinen dunklen Grunde bewirkt. Es ist somit ganz wohl möglich, dass Streifen zuerst im Fluorescenzspectrum entdeckt werden; immer müssen sie aber im Absorptionsspectrum sich auch finden lassen, wenn man die richtige Schichtendicke zur Beobachtung wählt. Diese Folgerungen

---

1) Hagenbach, Pogg. Ann. **141.** Taf. II. Fig. 8. 1870.

passen nicht mehr ganz für das brechbarere Ende des Spectrums, wo die verhältnissmässig schwache Wirkung auf die Retina das Auffinden der Absorptionsstreifen mit dem Auge erschwert, während andererseits die oft sehr starke Fluorescenzerregung auch die Unterschiede in derselben deutlich hervortreten lässt.

Soviel über meine Auffassung des Zusammenhanges vom Absorptionsspectrum und fluorescirendem Spectrum.

Bis dahin habe ich von den bei Anstellung der Versuche Einfluss ausübenden Nebenumständen gesprochen; es bleibt mir übrig, einiges über die Hauptsache, nämlich über die allgemeine Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes zu sagen.

Ich habe zur Abklärung meines Urtheiles in dieser Frage aufs neue eine Reihe von Versuchen angestellt, bei der Erregung das Sonnenlicht, das electrische Licht und das Licht der Natriumflamme verwandt und damit theils meine früheren Versuche, theils die von den Hrn. Lommel und Lubarsch angestellten wiederholt; infolge dessen sehe ich mich keineswegs veranlasst, meine frühere Behauptung der Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes für alle von mir untersuchten Körper zu modificiren.

In einigen Fällen existirt ein bestimmter Widerspruch zwischen dem, was die anderen Herren, und dem, was ich gesehen habe.

So behauptet Hr. Lommel, dass man bei Anwendung complementär gefärbter Gläser die durch das rothe Glas erzeugte Fluorescenz ganz deutlich durch das grüne Glas sehe. Ich habe diesen Versuch oft wiederholt und verschiedenen wissenschaftlichen Freunden gezeigt, und nie war es mir möglich durch Zerstreuung an einer fluorescirenden Substanz das durch das rothe Glas gegangene Licht so umzuändern, dass es dann auch durch das grüne Glas ging; falls bei Zerstreuung an einer ohne Fluorescenz reflectirenden Substanz nichts durchging.

Aehnliches gilt für das Uebergreifen des abgeleitenden Spectrums über das abgelenkte, welches die Hrn. Lommel und Lubarsch beim Naphthalinroth beobachtet haben,

während meine Versuche mich das nicht erkennen liessen; sowie für die von mir bei Naphthalinroth stets wahrgenommene, von Hrn. Lommel aber nicht zugegebene, sehr deutliche Reduction des Fluorescenzspectrums auf der brechbaren Seite, wenn man bei der Erregung von dem brechbaren violetten, blauen oder grünen Licht über *D* zu dem weniger brechbaren gelben oder rothen Lichte unterhalb *D* übergeht; was für mich ein Hauptbeweis für das Stokes'sche Gesetz ist.

Ebenso war es mir nicht möglich, den Versuch von Lubarsch[1]) zu bestätigen, bei welchem die spectralische Zerlegung des erregenden Lichtes mit absorbirenden Medien combinirt wurde, wie das folgende zeigt:

Ich projicirte auf die freie Oberfläche der in einem Glastrog enthaltenen Lösung von Naphthalinroth ein scharfes Spectrum; darauf brachte ich ein grünes Glas vor die Spalte, wodurch das fluorescirende Spectrum auf der unteren (weniger brechbaren) Seite reducirt wurde. Nun wurde ein dunkler Schirm mit scharfem Rand von der brechbaren Seite des Spectrums so weit vorgeschoben, bis gerade das ganze fluorescirende Spectrum abgeschnitten war und ein kleines Zurückrücken des Schirmes Fluorescenzlicht auf der Flüssigkeitsoberfläche erkennen liess. Darauf nahm ich das grüne Glas von der Spalte weg, wodurch natürlich wieder das von den wenig brechbaren Strahlen erregte Fluorescenzlicht sichtbar wurde, dasselbe verschwand jedoch vollkommen, sobald ich das gleiche grüne Glas vor das auf die Flüssigkeitsoberfläche gerichtete Auge hielt; es war mir also so nicht möglich, mit Hülfe einer fluorescirenden Flüssigkeit Licht, welches wegen der zu geringen Brechbarkeit vom grünen Glas absorbirt wurde, in solches umzuwandeln, welches das grüne Glas durchsetzte.

Nicht so bestimmt wie in den genannten Fällen zeigt sich der Widerspruch zwischen dem, was die anderen Herren, und dem was ich gesehen, bei einigen anderen Versuchen.

So gebe ich zu, dass in der durch die Natriumflamme hervorgerufenen Fluorescenz auch etwas grünes Licht sein

1) Lubarsch, Wied. Ann. **11.** p. 68. 1880.

kann, aber nur insofern als die Natriumflamme kein homogenes gelbes Licht enthält; ich füge in dieser Hinsicht noch die Bemerkung bei, dass die Natriumflamme stets das von der Verbrennung des Leuchtgases herrührende Kohlenstoffspectrum zeigt, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann, wenn man durch ein Prisma mit gerader Durchsicht nach einer vor dunklem Hintergrunde brennenden Natriumflamme sieht.

Auch in Betreff der mit reinen Spectralfarben erzeugten Fluorescenz gebe ich zu, dass wenn man z. B. homogenes Licht aus der Gegend von *D* mit einer Spalte aus dem Spectrum herausschneidet und zur Erregung des Naphthalinrothes verwendet, unter Umständen grünes Licht mit Hülfe des Spectralapparates im Fluorescenzlicht gefunden werden kann. Allein nach allen meinen, in mannigfacher Weise modificirten Versuchen zeigt sich dasselbe um so besser, je unreiner das Spectrum ist, und tritt in dem Maasse zurück, als die Vorsichtsmaassregeln zur Reinigung des Spectrums verschärft werden. Auch leugne ich nicht, dass die durch Dispersion an Collimatorlinse und Prisma erzeugte Aureole störend bei der Beobachtung wirken kann, doch ist dieser Umstand nicht im Stande, meine Bedenken gegen die Lommel'sche Auffasung zu heben. Bei der Beurtheilung dieser Verhältnisse ist noch folgendes in Betracht zu ziehen. Mit dem Auge können wir nie entscheiden, ob Licht vorhanden ist oder nicht, sondern nur ob die vorhandene Lichtmenge noch im Stande ist, einen Eindruck auf die Netzhaut hervorzurufen. Nun ist leicht begreiflich, dass die gleiche absolute Lichtmenge schwach oder gar nicht wahrgenommen werden kann, je nachdem sie auf eine kleinere oder grössere Fläche der Netzhaut ausgebreitet wird. Wenn nun etwas schwaches Licht, das spectralisch beobachtet sich von *D* bis gegen das Violette erstreckt, auf Naphthalinroth wirkt, so wird dasselbe zum grössten Theil in solches umgewandelt, das im Spectrum eine viel kürzere Strecke einnimmt und dadurch verhältnissmässig intensiver auf eine bestimmte Stelle der Retina einwirken kann; es ist das die Erscheinung, die ich früher[1]) als Zusammen-

1) Hagenbach, Wied. Ann. 8. p. 388. 1879.

ziehung des Spectrums beschrieben habe. Es ist deshalb sogar möglich, dass das Fluorescenzlicht im Spectrum gerade noch wahrnehmbar wird, wenn das diese Fluorescenz erzeugende Licht infolge seiner grösseren Zerstreuung im Spectralapparat unter die Grenze der Wahrnehmbarkeit fällt. Die Menge des grünen Lichtes, das als Beweis für die Abweichung vom Stokes'schen Gesetze dienen soll, ist so ausserordentlich gering und nur für ein sehr empfindliches Auge wahrnehmbar, dass man berechtigt ist, bei der Aufsuchung der erregenden Ursache ebenso minutiös zu Werke zu gehen. Ich kann mich deshalb nicht dazu verständigen, in den erwähnten Fällen den schwachen Schimmer von grünem Licht aus gelbem entstehen zu lassen und damit für wenige Körper eine Ausnahme aufzustellen, so lange noch eine andere Erklärungsweise mir zulässig scheint.

Auch diese Bemerkungen kann ich wie die frühere Abhandlung mit dem Satze schliessen, dass einstweilen, natürlich für mich, kein Grund vorliegt, das Stokes'sche Gesetz zu verwerfen, und dass auch die von Lommel gegebene Eintheilung der fluorescirenden Körper auf keinem wesentlich verschiedenen Verhalten derselben beruhe. Ich sagte schon früher und sage jetzt wieder „einstweilen", das Stokes'sche Gesetz ist ein empirisches Naturgesetz und muss deshalb weichen, sobald Versuche in schlagender unzweideutiger Weise auch nur bei einem einzigen Körper die Unrichtigkeit desselben darlegen; nach meiner Ansicht thun das die Versuche der Hrn. Lommel und Lubarsch nicht. Hoffentlich werden noch andere Forscher mit neuen Methoden sich an die gleichen Aufgaben machen und dadurch weitere Aufklärung bringen.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass ich es nicht wage, die Versuche des Hrn. Lamansky[1]), der die absolute Richtigkeit des Stokes'schen Gesetzes dargethan zu haben glaubt, als einen neu hinzutretenden Beweis für meine Auffassung hervorzuheben; aus den Zahlen, soweit sie publicirt sind, geht zwar deutlich hervor, dass die Brechbarkeit durch die

1) Lamansky, Compt. rend. **88.** p. 1192—94. 1879. Wied. Ann. **8.** p. 624. 1879; **11.** p. 908. 1880.

Fluorescenz vermindert werden kann, eine Thatsache, die niemand bezweifelt; um auch zu beweisen, dass das Umgekehrte nicht stattfindet, hätte, wie mir scheint, das gesammte erregende Licht innerhalb der Grenzen des vollständigen Fluorescenzspectrums genommen werden müssen, was nicht geschah.

Basel, Mitte October 1882.

IV. *Die Isogyrenfläche der doppelbrechenden Krystalle; allgemeine Theorie der Curven gleicher Schwingungsrichtung; von E. Lommel.*

(Aus den Sitzungsberichten der physikal.-medicin. Societät zu Erlangen vom 17. Juli 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Erscheinung, welche eine Krystallplatte im convergenten polarisirten Lichte darbietet, ist erschöpfend charakterisirt durch zwei das Gesichtsfeld durchziehende Systeme krummer Linien: die Curven gleichen Gangunterschiedes, deren jede durch alle jene Punkte des Gesichtsfeldes geht, von welchen die beiden durch Doppelbrechung entstandenen Strahlen mit gleichen Gangunterschieden zum Auge gelangen, und die Curven gleicher Schwingungsrichtung, welche alle Punkte des Gesichtsfeldes verbinden, von denen die Strahlen mit der nämlichen Schwingungsrichtung ausgehen. Während erstere bei Anwendung von weissem Licht in ihrer ganzen Erstreckung die nämliche Interferenzfarbe zeigen und daher isochromatische Linien oder Isochromaten genannt werden, geben letztere, welche man passend isogyrische Linien oder Isogyren nennen kann, zu den „farblosen" Büscheln Anlass, welche im Polarisationsbilde die Farbenringe durchsetzen.

Die Isogyren bieten, wie die Isochromaten, je nach der Richtung, nach welcher die Krystallplatte geschnitten ist, die mannigfachsten Gestaltungen dar. Sie sind bisher jedoch nur für den speciellen Fall, in welchem sie am auffallendsten in

die Erscheinung treten, nämlich für senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen geschnittene Platten eingehender untersucht worden.[1])

Als ein Fortschritt in der Theorie der Farbenringe der Krystalle ist die Einführung der isochromatischen Fläche durch Bertin[2]) anzusehen, welche durch eine mit der Oberfläche der Platte parallele Ebene geschnitten in den Durchschnittsfiguren die isochromatischen Curven liefert. Indem diese Fläche alle unzähligen Einzelfälle unter einem einheitlichen Bilde zusammenfasst, lässt sie die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, soweit die isochromatischen Linien in Frage kommen, mit einem Blick übersehen.

Um den bequemen Ueberblick über die Erscheinungen vollständig zu machen, muss aber dieser Fläche eine zweite an die Seite treten, welche in ähnlicher Weise als Schnittfiguren mit der Krystalloberfläche die Curven gleicher Schwingungsrichtung ergibt. Die Ermittelung dieser Isogyrenfläche soll nun die nächste Aufgabe der gegenwärtigen Abhandlung bilden; weiterhin sollen die wichtigsten Specialfälle aus ihr abgeleitet, der Discussion unterworfen und mit der Erfahrung verglichen werden.

I.

Die mittlere Elasticitätsaxe des Krystalls sei die y-Axe, die Halbirungslinie des spitzen Winkels 2δ der beiden optischen Axen die z-Ae eines Systems rechtwinkliger Raumcoordinaten. Damit die durch den Anfangspunkt gelegten Ebenen:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = o,$$
$$x \cos\alpha' + y \cos\beta' + z \cos\gamma' = o$$

je durch eine der beiden optischen Axen gehen, muss:

$$\cos\alpha = \sin\beta \cos\delta, \quad \cos\gamma = -\sin\beta \sin\delta,$$
$$\cos\alpha' = \sin\beta' \cos\delta, \quad \cos\gamma' = \sin\beta' \sin\delta$$

gesetzt werden. Demnach sind:

---

1) Müller, Pogg. Ann. **44.** p. 273. 1838. Lommel, Pogg. Ann. **120.** p. 69. 1863. Kurz, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. **15.** p. 209. 1870.

2) Bertin, Compt. rend. **52.** p. 1213. 1861. Ann. de chim. et de phys. **68.** p. 57. 1861.

(1) $A = x \sin\beta \cos\delta + y \cos\beta - z \sin\beta \sin\delta = o,$

(2) $A' = x \sin\beta' \cos\delta + y \cos\beta' + z \sin\beta' \sin\delta = o$

die Gleichungen zweier durch die beiden optischen Axen gelegter Ebenen, deren Schnittlinie wir als die Normale einer im Krystall sich fortpflanzenden Welle betrachten. Die beiden zu dieser Fortpflanzungsrichtung gehörigen Schwingungsebenen sind alsdann die Halbirungsebenen des von den Ebenen A und A' gebildeten Winkels und seines Nebenwinkels und werden daher durch die Gleichungen:

(3) $$\begin{cases} A - A' = (\sin\beta - \sin\beta')\cos\delta \,.\, x + (\cos\beta - \cos\beta')\, y \\ \qquad - (\sin\beta + \sin\beta')\sin\delta \,.\, z = o, \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} A + A' = (\sin\beta + \sin\beta')\cos\delta \,.\, x + (\cos\beta + \cos\beta')\, y \\ \qquad - (\sin\beta - \sin\beta')\sin\delta \,.\, z = o \end{cases}$$

dargestellt.

Die beiden Geraden, in welchen diese Ebenen die Austrittsfläche des Krystalles schneiden, geben die Schwingungsrichtungen an, welche dem Punkte x, y, z der letzteren zugehören. Die Gleichung dieser Krystalloberfläche sei:

(5) $$ax + by + cz - e = o,$$

wo a, b, c die Cosinus der drei Winkel bezeichnen, die ihre Normale mit den drei Coordinatenaxen einschliesst, und e ihren Abstand von dem Anfangspunkt der Coordinaten bebedeutet. Dieser Abstand ist nichts anderes als die Dicke der Platte, wenn wir den Coordinatenanfang, als Ausgangspunkt des die Platte durchsetzenden Strahlenkegels, in der Eintrittsfläche liegend annehmen.

Bezeichnet man mit ξ, η, ζ die Coordinaten der letzteren, so liefert ihre Gleichung:

(6) $$a\xi + b\eta + c\zeta = o$$

mit den Gleichungen der beiden Schwingungsebenen:

(7) $$\begin{cases} (\sin\beta - \sin\beta')\cos\delta \,.\, \xi + (\cos\beta - \cos\beta')\,\eta \\ \qquad - (\sin\beta + \sin\beta')\sin\delta \,.\, \zeta = o, \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} (\sin\beta + \sin\beta')\cos\delta \,.\, \xi + (\cos\beta + \cos\beta')\,\eta \\ \qquad - (\sin\beta - \sin\beta')\sin\delta \,.\, \zeta = o \end{cases}$$

combinirt, zwei Gerade, welche mit dem zu dem Punkte x, y, z der Austrittsfläche gehörigen Schwingungsrichtungen parallel sind.

Trägt man auf einer dieser Geraden, z. B. auf der durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmten, vom Anfangspunkte aus eine Strecke = 1 auf, sodass die Coordinaten ξ, η, ζ ihres Endpunktes die Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{9}$$

erfüllen, so sind ξ, η, ζ die Cosinus der drei Winkel, welche die zugehörige Schwingungsrichtung mit den Coordinatenaxen macht. Nimmt man daher in der Gleichung (7) die Grössen ξ, η, ζ als constant an, so drückt sie die Bedingung aus, der die Winkel β und β', welche die Richtung der Wellennormale bestimmen, unterworfen sein müssen, damit diese die Austrittsfläche des Krystalls in einem Punkte x, y, z treffe, dem jene gegebene Schwingungsrichtung zugehört. Man braucht also nur aus den Gleichungen (1), (2) und (7) die Grössen β und β' zu eliminiren, um eine Gleichung zwischen x, y, z, d. i. die Gleichung einer Fläche zu erhalten, welche im Vereine mit (5) die Reihenfolge aller zu dieser Schwingungsrichtung gehörigen Punkte bestimmt. Diese Fläche ist demnach die gesuchte **Isogyrenfläche**, welche in jedem Falle die Curven gleicher Schwingungsrichtung als Durchschnittslinien auf die Krystalloberfläche zeichnet.

Man findet aber aus den Gleichungen (1) und (2), indem man sie nach β und β' auflöst:

$$\sin\beta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2}},$$

$$\cos\beta = -\frac{x\cos\delta - z\sin\delta}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2}},$$

$$\sin\beta' = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}},$$

$$\cos\beta' = -\frac{x\cos\delta + z\sin\delta}{\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung (7) ein, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$[(\eta x - \xi y)\cos\delta + (\zeta y - \eta z)\sin\delta]\sqrt{y^2 + (x\cos\delta + z\sin\delta)^2}$$
$$= [(\eta x - \xi y)\cos\delta - (\zeta y - \eta z)\sin\delta]\sqrt{y^2 + (x\cos\delta - z\sin\delta)^2},$$

oder, wenn man die Wurzeln wegschafft und in geeigneter Weise reducirt:

$$\big((x-\xi y)^2\cos^2\delta+(\zeta y-\eta z)^2\sin^2\delta\big)xz$$
$$+(\eta x^2\cos^2\delta+y^2+z^2\sin^2\delta)(\eta x-\xi y)(\zeta y-\eta z)=o.$$

Anders zusammengefasst, schreibt sich dieselbe auch so:

$$\big((\eta x-\xi y)x\cos^2\delta+(\zeta y-\eta z)z\sin^2\delta\big)\big((\eta x-\xi y)z+(\zeta y-\eta z)x\big)$$
$$+(\eta x-\xi y)(\zeta y-\eta z)y^2=o,$$

und da sich jetzt der Factor y loslöst, so ergibt sich die Gleichung der Isogyrenfläche in folgender Gestalt:

$$\text{(J)}\qquad (\eta x-\xi y)(\zeta x-\xi z)x\cos^2\delta+(\eta x-\xi y)(\zeta y-\eta z)y$$
$$+(\zeta y-\eta z)(\zeta x-\xi z)z\sin^2\delta=o,$$

oder noch übersichtlicher:

$$(\text{J}_1)\qquad \frac{x\cos^2\delta}{\zeta y-\eta z}+\frac{y}{\zeta x-\xi z}+\frac{z\sin^2\delta}{\eta x-\xi y}=o.$$

Zu derselben Gleichung wird man geführt, wenn man von der Gleichung (8) statt von der Gleichung (7) ausgeht.

Die Isogyrenfläche ist hiernach eine Kegelfläche dritter Ordnung, welche durch das Linienpaar:

$$y=o,\quad z=\pm x\operatorname{ctg}\delta,$$

d. i. durch die beiden optischen Axen hindurchgeht. Ausserdem nimmt sie noch die mit der Schwingungsrichtung parallele Gerade:

$$\zeta y-\eta z=o,\quad \zeta z-\xi z=o,\quad \eta x-\xi y=o,$$

sowie deren Projectionen auf die drei Coordinatenebenen:

$$x=o,\ \zeta y-\eta z=o,\ y=o,\ \zeta x-\xi z=o,$$
$$z=o,\ \eta x-\xi y=o$$

in sich auf.

Für einaxige Krystalle ($\delta=o$) zerfällt die Isogyrenfläche in eine durch die optische Axe und die Schwingungsrichtung gelegte Ebene $\qquad \eta x-\xi y=o$

für die extraordinären, und einen Kegel zweiten Grades

$$x(\zeta x-\xi z)+y(\zeta y-\eta z)=o$$

für die ordinären Strahlen.

Die Isogyrenfläche ist nun allerdings kein festes, nur von den optischen Constanten des Krystalls abhängiges Gebilde; ihre jeweilige Gestalt ist vielmehr, vermöge der Gleichung (6), von der Richtung der Krystalloberfläche abhängig.

Nichtsdestoweniger bietet sie den Vortheil, dass durch ihre Einführung alle Einzelfälle von der einzigen Gleichung (J) umfasst werden, welche mit der Gleichung (5) der Austrittsfläche combinirt und unter Berücksichtigung der Relationen (6) und (9) die Gleichung der Isogyren in jedem Fall in übersichtlicher Form liefert.

Die so gewonnene Curvengleichung gibt zunächst die Isogyre nicht in der Gestalt, welche sie nach dem Austritt der Strahlen dem Auge darbietet, sondern vielmehr so, wie sie durch den innerhalb des Krystalls verlaufenden Strahlenkegel auf die Innenseite der Austrittsfläche gezeichnet wird. Aus diesem Bilde könnte nun unter Anwendung der Gesetze der Doppelbrechung jene Gestalt mit aller Strenge hergeleitet werden. Man kann sich jedoch von der Form der gesehenen Isogyren auch durch folgendes für die Praxis genügendes Annäherungsverfahren Rechenschaft geben. Die beiden Wellen, deren gemeinschaftliche Normale innerhalb des Krystalls mit der Normalen der Austrittsfläche den Winkel ϱ bildet, schreiten nach dem Austritte in zwei verschiedenen, aber nur wenig voneinander abweichenden Richtungen fort. Vernachlässigt man den kleinen Winkel, den ihre Normalen jetzt miteinander bilden, und nimmt an, dass der Austritt in einer einzigen mittleren Richtung nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz erfolge, so bestimmt sich der Winkel ε, den dieselbe mit dem Lothe der Austrittsfläche bildet, durch die Gleichung:

$$\sin \varepsilon = \mu \sin \varrho ,$$

wenn μ einen geeignet zu wählenden constanten mittleren Brechungscoëfficienten bezeichnet. Ist aber r die Entfernung eines Punktes einer inneren Isogyre von der Mitte des Gesichtsfeldes, und e die Dicke der Platte, so ist:

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{r}{e} ;$$

bezeichnet ebenso r' den Radius vector des entsprechenden Punktes der gesehenen Isogyre, so ist:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r'}{e} \cdot$$

Sind nun die Winkel ε und ϱ so klein, dass man ihre Tangenten mit den Sinus vertauschen kann, so hat man:

$$r' = \mu r.$$

Insoweit also die angegebenen Vernachlässigungen zugelassen werden, erscheint die gesehene Isogyre der inneren ähnlich, und zwar derart, dass ihre Dimensionen zu den entsprechenden der letzteren im Verhältniss von $\mu : 1$ stehen.

Die Krystallplatte befinde sich in einem Polarisationsapparat für convergentes Licht (in einer Turmalinzange, oder in einem Polarimikroskop), dessen zwei Schwingungsrichtungen die Azimute β und γ einnehmen. Die eine Axe des in der Krystalloberfläche gelegenen Coordinatensystems, auf welches die Isogyren bezogen sind, liege im Azimut χ, und demnach die zu einer beliebigen Isogyre gehörigen beiden Schwingungsrichtungen, welche mit dieser Coordinatenaxe die Winkel φ und ψ bilden, in den Azimuten $\varphi + \chi$ und $\psi + \chi$. Alsdann sind: $\quad A \,.\, \cos(\varphi + \chi - \beta)\cos(\varphi + \chi - \gamma) \,.\, \sin qt$

und: $\quad A\cos(\psi + \chi - \beta)\cos(\psi + \chi - \gamma)\sin(qt + \vartheta)$,

die Ausschläge der beiden Schwingungsbewegungen, welche in dem betrachteten Punkte des Gesichtsfeldes zur Interferenz kommen. In diesen Ausdrücken bezeichnet A die Amplitude des ursprünglich einfallenden Lichtes, t die laufende Zeit, q die Grösse $2\pi v/\lambda$, wo v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum, und λ die Wellenlänge des zunächst homogen gedachten Lichtes bedeutet, und endlich ϑ den Phasenunterschied der beiden interferirenden Wellen.

Für homogenes Licht ergibt sich nun hieraus als Lichtstärke der resultirenden Bewegung:

$$A^2\left(\cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma)\right)$$
$$+2A^2\cos(\varphi+\chi-\beta)\cos(\varphi+\chi-\gamma)\cos(\psi+\chi-\beta)\cos(\psi+\chi-\gamma)\cos\vartheta.$$

Ist das einfallende Licht zusammengesetzt, z. B. weiss, so hat man für jeden seiner homogenen Bestandtheile den vorstehenden Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu summiren. Man erhält so die Intensität:

$$\left(\cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma)\right)\Sigma A^2$$
$$+2\cos(\varphi+\chi-\beta)\cos(\varphi+\chi-\gamma)\cos(\psi+\chi-\beta)\cos(\psi+\chi-\gamma)\Sigma A^2\cos\vartheta,$$

wo sich die Summenzeichen Σ über alle vorkommenden verschiedenen Werthe der Wellenlänge λ erstrecken.

Der Phasenunterschied ϑ aber stellt sich wie folgt dar:

$$\vartheta = 2\pi \frac{e}{\lambda} u,$$

wenn u eine von den optischen Constanten des Krystalls und von der Lage des betrachteten Punktes im Gesichtsfelde abhängige Grösse bezeichnet. Je grösser nun eu im Verhältniss zur Wellenlänge λ ist, desto häufiger wird $\cos\vartheta$, wenn λ alle den verschiedenfarbigen Strahlen des Spectrums entsprechenden Werthe durchläuft, alle möglichen Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen, und desto kleiner wird die Summe $\Sigma A^2 \cos\vartheta$ im Vergleiche mit der Summe ΣA^2 ausfallen. Dies wird namentlich der Fall sein, wenn u nicht Null, und die Dicke e der Platte im Verhältniss zu λ genügend gross ist. Für dicke Platten und weisses Licht stellt sich daher, wenn wir $\Sigma A^2 = 1$ setzen, die Lichtstärke wie folgt dar:

(L) $L = \cos^2(\varphi+\chi-\beta)\cos^2(\varphi+\chi-\gamma)+\cos^2(\psi+\chi-\beta)\cos^2(\psi+\chi-\gamma)$,

d. h. sie ist die nämliche, als ob zwischen den beiden Wellen gar keine Interferenz stattfände, sie ist nicht mehr von deren Gangunterschieden, sondern nur noch von ihren Polarisationsverhältnissen abhängig. Das Bild enthält also in diesem Falle keine isochromatischen Curven, sondern zeigt nur noch in farbloser Schattirung die Isogyren und ist daher zur ungestörten Beobachtung der letzteren besonders geeignet.

Die bis hierher entwickelte allgemeine Theorie der Isogyren soll nun im Folgenden auf die wichtigeren Specialfälle in Anwendung gebracht werden.

II.

Die Krystalloberfläche sei mit der Ebene der optischen Axen parallel. Alsdann hat man:

$$a = o,\quad b = 1,\quad c = o,\quad y = e,\quad \eta = o,$$

und die Gleichung der Isogyren ergibt sich in folgender Gestalt:

(10) $$(\xi\cos^2\delta . x - \zeta\sin^2\delta . z)(\xi z - \zeta x) = e^2\xi\zeta,$$

welche sofort erkennen lässt, dass jede Isogyre eine Hyperbel ist, deren beide Asymptoten durch die Gleichungen:

(11) $$\xi z - \zeta x = o\,,$$ und:

(12) $$\xi \cos^2\delta \,.\, x - \zeta \sin^2\delta \,.\, z = o$$

gegeben sind.

Die Gleichung (10) ändert sich nicht, wenn man in ihr:

$$\zeta \sin^2\delta \text{ statt } \xi \quad \text{und } \zeta \cos^2\delta \text{ statt } \zeta$$

setzt. Die Grössen ξ und ζ geben aber die eine der beiden Schwingungsrichtungen an, welche der Hyperbel (10) zugehören, denn sie sind resp. der Cosinus und der Sinus des Winkels φ, den diese Schwingungsrichtung mit der positiven x-Axe einschliesst, sodass:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\zeta}{\xi}$$

ist. Die eben bemerkte Vertauschbarkeit lehrt demnach, dass die andere derselben Hyperbel entsprechende Schwingungsrichtung mit der x-Axe den Winkel ψ bildet, welcher durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\xi}{\zeta} \,.\, \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta}\,,$$ oder:

(13) $$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg}^2\delta \,.\, \operatorname{ctg} \varphi\,,$$

bestimmt wird, und man sieht zugleich, dass die Asymptoten einer jeden Hyperbel mit den beiden ihr zugehörigen Schwingungsrichtungen parallel laufen.

Führt man den Winkel φ, durch welchen ja vermöge Gleichung (13) der Winkel ψ mitbestimmt ist, in die Hyperbelgleichung (10) ein, so lässt sich dieselbe leicht auf folgende Form bringen:

(14) $$-x^2 \cos^2\delta + \frac{1 + \cos 2\delta \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} xz - z^2 \sin^2\delta = e^2.$$

Da diese Gleichung sich nicht ändert, wenn man φ mit $-\varphi$, und gleichzeitig x mit $-x$, oder z mit $-z$ vertauscht, so erkennt man, dass, während die der Schwingungsrichtung φ entsprechende Hyperbelschaar den ersten und dritten Quadranten ausfüllt, eine gleiche mit dieser in Bezug auf die Coordinatenaxen symmetrische Hyperbelschaar mit der Schwingungsrichtung $-\varphi$ den zweiten und vierten Quadranten einnimmt.

Transformirt man vorstehende Gleichung zu den Hauptaxen, indem man:

$$x = x' \cos \alpha - z' \sin \alpha, \quad z = x' \sin \alpha + z' \cos \alpha$$

setzt, so ergibt sich der zwischen 45° und 90° liegende Winkel α, den die reelle Axe einer jeden Hyperbel der ersten Schaar mit der ursprünglichen x-Axe einschliesst, aus der Gleichung:

(15) $$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1 + \cos 2\delta \cos 2\varphi}{\cos 2\delta \sin 2\varphi},$$

und ihre auf die Axen reducirte Gleichung nimmt die folgende Gestalt an:

(16) $$\begin{cases} (\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos 2\delta \cos 2\varphi} - \sin 2\varphi)\, x'^2 \\ -(\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos 2\delta \cos 2\varphi} + \sin 2\varphi)\, z'^2 = 2e^2 \sin 2\varphi, \end{cases}$$

oder auch, wenn man statt des Winkels φ lieber den gemäss (15) davon abhängigen Winkel α als veränderlichen Parameter einführt:

(16_a) $$x'^2 \cos(\alpha + \delta)\cos(\alpha - \delta) - z'^2 \sin(\alpha + \delta)\sin(\alpha - \delta) = -e^2 \cos 2\alpha.$$

Es ergibt sich sonach, dass die reelle Halbaxe a und die imaginäre Halbaxe b der zu dem Werthe φ oder α gehörigen Hyperbel resp. durch die Ausdrücke:

(17) $$a^2 = \frac{2e^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos 2\delta \cos 2\varphi} - \sin 2\varphi},$$

(18) $$b^2 = \frac{2e^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 2\delta + 2\cos 2\delta \cos 2\varphi} + \sin 2\varphi},$$

oder einfacher durch:

(17_a) $$a^2 = -\frac{e^2 \cos 2\alpha}{\cos(\alpha + \delta)\cos(\alpha - \delta)},$$

(18_a) $$b^2 = -\frac{e^2 \cos 2\alpha}{\sin(\alpha + \delta)\sin(\alpha - \delta)},$$

dargestellt sind. Für $\varphi = o$ wird $\psi = 90°$, $\alpha = 45°$, $a = b = o$, und die Hyperbeln ziehen sich, wie zu erwarten, auf die beiden ursprünglichen Coordinatenaxen zurück.

Der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel, oder, was dasselbe ist, der Winkel zwischen den beiden ihr zugehörigen Schwingungsrichtungen bestimmt sich, wie aus Gleichung (13) leicht folgt, aus:

(19) $$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = \frac{2\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi - \delta)}{\sin 2\varphi}$$

oder auch aus:

(19ₐ) $$\cos(\psi - \varphi) = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\delta};$$

er wird $= o$, wenn $\varphi = \psi = \alpha = \pm(90 - \delta)$ ist.

Betrachtet man in Gleichung (17_a) die Grösse a als Radius vector einer Curve und α als den zugehörigen Polarwinkel, so stellt sie in Polarcoordinaten den Ort der Scheitel aller Hyperbeln, oder die Scheitelcurve der Hyperbelschaar vor. Diese Curve, deren Gleichung in Orthogonalcoordinaten sich wie folgt gestaltet:

(20) $$(x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta)(x^2 + z^2) + e^2(x^2 - z^2) = o,$$

ist von der vierten Ordnung; sie besitzt im Coordinatenanfang einen Doppelpunkt, in welchem sie von den beiden Geraden: $$z = \pm x$$

berührt wird, und hat die beiden optischen Axen:

$$z = \pm x \operatorname{ctg}\delta$$

zu Asymptoten. Nur wenn δ seinen Grenzwerth 45^0 erreicht, reducirt sich die Scheitelcurve auf die beiden Geraden:

$$z = \pm x,$$

welche unter 45^0 zu den Coordinatenaxen geneigt sind, d. i. auf die optischen Axen selbst, und gleichzeitig wird:

$$\psi = 90^0 - \varphi, \quad a^2 = \frac{e^2\sin 2\varphi}{\sin^2(45^0 - \varphi)}, \quad b^2 = \frac{e^2\sin 2\varphi}{\cos^2(45^0 - \varphi)}.$$

Zur weiteren Charakteristik unserer Hyperbelschaar sei noch bemerkt, dass die Punkte, in welchen die Hyperbeln der x-Axe am nächsten kommen, oder wo ihre Tangenten der x-Axe parallel laufen, auf der Hyperbel:

$$x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta = e^2$$

liegen, diejenigen Punkte aber, in welchen sie der z-Axe am nächsten kommen, auf der Hyperbel:

$$-x^2\cos^2\delta + z^2\sin^2\delta = e^2.$$

Ferner werden sämmtliche Hyperbeln des Systems von der Hyperbel: $$x^2\cos^2\delta - z^2\sin^2\delta = e^2\cos 2\delta$$

rechtwinklig geschnitten. Die drei letztgenannten Hyperbeln haben die beiden optischen Axen zu gemeinschaftlichen Asymptoten.

Um in einem concreten Fall über die Verhältnisse des Hyperbelsystems einen Ueberblick zu gewähren, sind in der folgenden Tabelle für Gyps ($\delta = 28^0\,45'$) mit den in der

ersten Columne enthaltenen gegebenen Werthen von φ die unter successiver Anwendung der Gleichungen (13), (19_a) und (17_a) berechneten Werthe von ψ, α und a/e zusammengestellt.

Tabelle I.

Gyps. $\delta = 28^0 45'$

φ	ψ	α	$\frac{a}{e}$	φ	ψ	α	$\frac{a}{e}$
0°	90° 0'	45° 0'	0,00000	20°	83° 45'	51° 52'	1,2589
2	89 24	45 42	0,30830	30	80 9	55 4	1,8884
4	88 48	46 24	0,44654	40	75 50	57 55	2,9291
6	88 11	47 6	0,56119	50	70 16	60 8	5,5041
8	87 35	47 47	0,66430	60	62 28	61 14	46,7722
10	86 58	48 29	0,76323	61 15'	61 15	61 15	∞

Für einaxige Krystalle ($\delta = o$) hat man stets $\psi = 90^0$, d. h. die Schwingungsrichtung des ausserordentlichen Strahls ist allenthalben der Krystallaxe parallel, und diese ist gemeinschaftliche Asymptote sowohl sämmtlicher Hyperbeln als auch ihrer Scheitelcurve:

$$x^2(x^2 + z^2) + e^2(x^2 - z^2) = o.$$

Die zur optischen Axe parallelen beiden Geraden:

$$x = \pm e$$

begegnen allen Hyperbeln rechtwinklig in den Punkten, wo diese sich der x-Axe am meisten nähern. Hinsichtlich der Lage und Grösse der Hyperbelaxen gelten jetzt die Beziehungen:

$$\alpha = 45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi, \quad a^2 = \frac{e^2 \sin\varphi}{\sin^2(45 - \frac{1}{2}\varphi)}, \quad b^2 = \frac{e^2 \sin\varphi}{\cos^2(45 - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Nach diesen Formeln ist in der folgenden Tabelle das Hyperbelsystem der einaxigen Krystalle berechnet.

Tabelle II.

Einaxige Krystalle.

φ	α	$\frac{a}{e}$	φ	α	$\frac{a}{e}$
0°	45°	0,00000	30°	60°	1,41421
2	46	0,26893	40	65	1,89707
4	47	0,38726	50	70	2,55903
6	48	0,48317	60	75	3,59554
8	49	0,56864	70	80	5,58244
10	50	0,64828	80	85	11,38620
20	55	1,01962	90	90	∞

Wird nun eine zur Ebene der optischen Axen parallel geschnittene dicke Krystallplatte in einen Polarisationsapparat gebracht, dessen Schwingungsebenen sich rechtwinklig kreuzen, und zwar resp. in den Azimuten $\beta = o$ und $\gamma = 90^0$ sich befinden, so herrscht in jedem Punkte der zur Schwingungsrichtung φ gehörigen Hyperbel die Lichtstärke (siehe oben p. 63):

$$L = \tfrac{1}{4}\sin^2 2(\varphi + \chi) + \tfrac{1}{4}\sin^2 2(\psi + \chi),$$

wenn unsere bisherige, zur Mittellinie der optischen Axen senkrecht angenommene x-Axe im Azimute χ liegt.

Bei einaxigen Krystallen, für welche stets $\psi = 90^0$ ist, gestaltet sich der Intensitätsausdruck noch einfacher, nämlich so:

$$L = \tfrac{1}{4}\sin^2 2\chi + \tfrac{1}{4}\sin^2 2(\varphi + \chi)$$

und zeigt, dass vollkommene Dunkelheit nur eintreten kann, wenn die optische Axe mit einer der beiden Schwingungsrichtungen des Polarisationsapparates zusammenfällt ($\chi = o$ oder $\chi = 90^0$), und zwar nur längs der beiden mit diesen Schwingungsrichtungen übereinstimmenden zu einander senkrechten Durchmesser des Gesichtsfeldes ($\varphi = o$ oder $\varphi = 90^0$). Dreht man aber die Platte aus dieser Stellung um einen kleinen Winkel χ, so ist die Lichtstärke ein Minimum ($= \tfrac{1}{4}\sin^2 2\chi$), wenn:

$$\sin^2 2(\varphi + \chi) = o$$

ist, also sowohl längs der Hyperbel $\varphi_1 = -\chi$, als auch längs der Hyperbel $\varphi_2 = 90^0 - \chi$. Von diesen beiden Hyperbeln, deren Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, ist die erstere, welche sich mit ihren Scheiteln bis nahe zur Mitte des Gesichtsfeldes erstreckt, der Beobachtung zugänglich, die letztere dagegen fällt weit hinaus gegen dessen Grenze und entzieht sich daher der Wahrnehmung.

Diese Folgerungen werden durch die Beobachtung vollkommen bestätigt. Bringt man z. B. eine 5 mm dicke, zur Axe parallel geschnittene Bergkrystallplatte in den Polarisationsapparat, dessen Schwingungsrichtungen zu einander senkrecht gestellt sind, so zeigt sie, wenn ihre optische Axe mit einer dieser beiden Schwingungsrichtungen parallel ist, ein dunkles Kreuz, dessen vier Quadranten sich nach aussen hin ganz allmählich erhellen. Dreht man nun die Platte ein

wenig, so zerbricht das Kreuz in zwei hyperbolische dunkle Schatten, welche sich, wie die Theorie es verlangt, in diejenigen beiden gegenüberliegenden Quadranten zurückziehen, in die bei der Drehung die optische Axe des Krystalles eingetreten ist. Die Beobachtung dieser dunklen Büschel bildet daher ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Lage der optischen Axe bei einer parallel zu dieser geschnittenen Platte eines einaxigen Krystalls.

Diese hyperbolischen Büschel sind, wie zu erwarten, weder vollkommen dunkel, noch scharf gezeichnet, ihre Ränder verlieren sich vielmehr mit sehr allmählicher Schattenabstufung in dem helleren Grunde des Gesichtsfeldes. Letzteres erklärt sich aus dem Umstande, dass beim Uebergang von einer unserer Hyperbeln zu einer benachbarten die Schwingungsrichtung sich nur wenig ändert, oder dass, wenn man so sagen darf, das gegenwärtige Isogyrensystem nur sehr kleine Gradienten besitzt.

Das hierdurch bedingte unscheinbare Aussehen dieser Büschel ist wohl der Grund dafür, dass dieselben bisher übersehen worden oder wenigstens unbeachtet geblieben sind. Abgesehen von ihrem theoretischen Interesse dürften dieselben aber, vermöge der oben gezeigten Anwendung zur Bestimmung der Lage der optischen Axe, auch in experimenteller Hinsicht der Beachtung wohl werth sein.

III.

Steht die Oberfläche des Krystalls senkrecht zur Mittellinie der optischen Axen, so hat man:

$$a = o, \quad b = o, \quad c = 1, \quad \zeta = o, \quad z = e$$

zu setzen und findet die Gleichung der Isogyren sofort in folgender Gestalt:

$$(21) \qquad (\eta x - \xi y)(\xi \cos^2 \delta . x + \eta y) - e^2 \xi \eta \sin^2 \delta = o,$$

welche zeigt, dass jede derselben eine durch die beiden Endpunkte der optischen Axen:

$$y = o, \quad x = \pm e \operatorname{tg} \delta$$

gehende Hyperbel mit den Asymptoten:

$$(22) \qquad \eta x - \xi y = o \qquad \text{und:}$$

(23) $$\xi \cos^2 \delta . x + \eta y = o$$

ist. Diese Asymptoten sind parallel mit den beiden der Hyperbel zugehörigen Schwingungsrichtungen. Denn die Gleichung (21) bleibt ungeändert, wenn man in ihr:

$$-\eta \text{ statt } \xi \quad \text{und:} \quad \xi \cos^2 \delta \text{ statt } \eta$$

setzt. Da aber: $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta}{\xi}$$

die eine zur Hyperbel gehörige Schwingungsrichtung angibt, so muss die andere durch:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\xi}{\eta} \cos^2 \delta$$ oder durch:

(24) $$\operatorname{tg} \psi = -\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi$$

gegeben sein.

Der Winkel $\varphi - \psi = 2\mu$ zwischen den Asymptoten (oder den beiden zusammengehörigen Schwingungsrichtungen), welcher durch die Gleichung:

(25) $$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \operatorname{tg} 2\mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \delta}$$

bestimmt wird, ist (ausser wenn φ oder ψ Null oder 90^0, oder $\delta = o$ ist) niemals ein Rechter, sondern für zweiaxige Krystalle stets kleiner als 90^0. Seinen kleinsten Werth $2\mu_m$, gegeben durch die Gleichung:

(26) $$\operatorname{tg} 2\mu_m = \frac{2 \cos \delta}{\sin^2 \delta} \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg} \mu_m = \cos \delta$$

erreicht er, wenn:

(27) $$\operatorname{tg} \varphi_m = \cos \delta, \ \operatorname{tg} \psi_m = -\cos \delta$$

ist, also für diejenige Hyperbel, deren reelle Axe in die Ebene der optischen Axen fällt. Dieser kleinste Asymptotenwinkel ist, so lange der Axenwinkel klein ist, sehr nahe ein Rechter, d. h. die Hyperbeln sind nahezu gleichseitig. Er beträgt z. B. $89^0\ 56'$ beim Salpeter ($2\delta = 5^0\ 20'$), beim Aragonit ($2\delta = 18^0\ 18'$) $89^0\ 16'$, beim Glimmer ($2\delta = 45^0$) $85^0\ 28'$, beim Gyps ($2\delta = 57^0\ 30'$) $82^0\ 29'$. Da der Winkel δ den Grenzwerth 45^0 niemals überschreitet, so beträgt das absolute Minimum, bis zu welchem $2\mu_m$ herabsinken kann, $70^0\ 31'\ 47''$.

Aus der Hyperbelgleichung, welcher man nach Einführung des Winkels φ auch die folgende Gestalt:

(28) $x^2 \cos^2 \delta - (\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi) xy - y^2 = e^2 \sin^2 \delta$

geben kann, findet man:

(29) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cos^2 \delta - (\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi) y}{2y + (\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi) x}.$$

Hieraus ergibt sich für $y = o$:

(30) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{2 \cos^2 \delta}{\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \delta}}$$

als Tangente des Winkels, unter welchem jede Hyperbel die Abscissenaxe schneidet; derselbe ist stets grösser als 2φ, nähert sich aber diesem Werthe mit abnehmendem Axenwinkel δ. Jede Hyperbel kommt der Ordinatenaxe am nächsten in jenen Punkten, für welche $dy/dx = \infty$ ist; diese Punkte liegen sonach auf der Geraden, deren Gleichung:

(31) $$2y + (\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi) x = o$$

ist. Eliminirt man aus derselben und aus der Gleichung (28) der Hyperbelschaar den Winkel φ, so findet man als geometrischen Ort aller dieser Abscissenminima die Ellipse:

(32) $$x^2 \cos^2 \delta + y^2 = e^2 \sin^2 \delta,$$

deren grosse Axe der Abstand $2e \operatorname{tg} \delta$ der Endpunkte der optischen Axen, und deren kleine Axe $2e \sin \delta$ ist.

Aus der vorstehenden Ellipsengleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cos^2 \delta;$$

für den Punkt aber, in welchem die Ellipse von der Hyperbel (φ) geschnitten wird, ist vermöge (31):

$$\frac{x}{y} = -\frac{2}{\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi},$$

und demnach:

(33) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 \delta}{\cos^2 \delta \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi},$$

was genau derselbe Werth ist, der oben (30) für $(dy/dx)_0$ gefunden wurde. Es läuft also die Tangente der Ellipse in dem Punkte, in welchem sie von einer unserer Hyperbeln geschnitten wird, parallel mit der Tangente der Hyperbel in ihrem Schnittpunkte mit der x-Axe.

Bemerkenswerth ist noch, dass die Ellipse:

(34) $$x^2 \cos^2 \delta + y^2 = e^2 (1 + \cos^2 \delta),$$

welche der vorigen ähnlich ist, sämmtliche Hyperbeln rechtwinklig schneidet.

Setzt man, um die Hyperbelgleichung (28) zu ihren Axen zu transformiren:

$$x = x' \sin\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

so bestimmt sich der Winkel α, den die Axe einer jeden Hyperbel mit der ursprünglichen x-Axe bildet, durch die Gleichung:

$$\text{(35)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2\delta - (1 + \cos^2\delta)\cos 2\varphi}{(1 + \cos^2\delta)\sin 2\varphi},$$

und die transformirte Gleichung lautet:

$$\text{(36)} \quad (1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha)\,x'^2 - (1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha)\,y'^2 = e^2\sin^2\delta\cos 2\alpha.$$

Es ergeben sich hieraus die Quadrate der reellen Halbaxe a und der imaginären Halbaxe b wie folgt:

$$\text{(37}_a\text{)} \qquad a^2 = e^2\sin^2\delta \,.\, \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha},$$

$$\text{(37}_b\text{)} \qquad b^2 = e^2\sin^2\delta \,.\, \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha},$$

woraus sich für den oben (25) bereits ausgedrückten Asymptotenwinkel μ noch die Formel:

$$\text{(38)} \qquad \operatorname{tg}^2\mu = \frac{1 - \sin^2\delta\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\delta\sin^2\alpha} \qquad \text{oder einfacher:}$$

$$\text{(38}_b\text{)} \qquad \cos^2\mu = \frac{\sin^2\delta\cos 2\alpha}{1 + \cos^2\delta} \qquad \text{ableitet.}$$

Die Gleichung (37$_a$) ist, wenn man in ihr a als Radius vector und α als den zugehörigen Polarwinkel ansieht, die Polargleichung der Scheitelcurve des Hyperbelsystems, aus welcher sich die auf das ursprüngliche Coordinatensystem bezogene Orthogonalgleichung sofort in folgender Form ergibt:

$$\text{(39)} \qquad (x^2\cos^2\delta + y^2)(x^2 + y^2) = e^2\sin^2\delta\,(x^2 - y^2).$$

Die Scheitelcurve ist hiernach eine geschlossene Curve vierter Ordnung, welche im Coordinatenanfang, wo sie einen Doppelpunkt besitzt, von den beiden Geraden:

$$y = \pm x$$

berührt wird und sich durch diesen Punkt und die beiden Axenendpunkte:

$$y = o, \quad x = \pm e \operatorname{tg}\delta$$

in Form einer Acht hindurchschlingt.

Ist der Axenwinkel 2δ so klein, dass man statt $\cos\delta$ die Einheit setzen und demnach auch $\sin\delta$ mit $\operatorname{tg}\delta$ verwechseln kann, und bezeichnet man $e\sin\delta$ oder $e\operatorname{tg}\delta$ mit p, so vereinfacht sich die Gleichung (28) zu:

$$x^2 - 2xy\operatorname{ctg}2\varphi - y^2 = p^2 \tag{40}$$

und stellt nun das bekannte System gleichseitiger Hyperbeln vor, welche die in der Gleichung:

$$\big((p+x)^2+y^2\big)\big((p-x)^2+y^2\big)=k^4$$

enthaltenen Lemniscaten, die in diesem Falle die isochromatischen Linien sind, rechtwinklig schneiden. Der Ort der Abscissenminima der Hyperbeln ist jetzt der über dem Abstand der Axenendpunkte als Durchmesser beschriebene Kreis: $x^2+y^2=p^2$, dessen Tangente in dem Punkte, wo er von der Hyperbel φ geschnitten wird, mit der Abscissenaxe denselben Winkel 2φ bildet, unter welchem die Hyperbel die Abscissenaxe schneidet. Als Scheitelcurve ergibt sich die durch die Axenendpunkte und deren Mitte gehende Lemniscate:

$$(x^2+y^2)^2=p^2(x^2-y^2).$$

Diese bekannten[1]) Resultate ergeben sich sonach durch Specialisirung aus der vorstehenden allgemeineren Behandlung der Aufgabe.

Für einaxige Krystalle ($\delta = o$) zerfällt die Gleichung (21) der Isogyren in die Gleichungen:

$$\eta x - \xi y = o \quad \text{und:} \quad \xi x + \eta y = o \qquad \text{oder:}$$
$$y = x\operatorname{tg}\varphi \quad \text{und:} \quad y = -x\operatorname{ctg}\varphi$$

der beiden aufeinander senkrecht stehenden Geraden, welche in bekannter Weise die kreisförmigen Farbenringe als farbloses Kreuz durchsetzen.

Die hyperbolischen Büschel der zweiaxigen Krystalle, sowie das Kreuz der einaxigen sind so allgemein bekannte Erscheinungen, dass es überflüssig erscheint, auf ihre Uebereinstimmung mit der entwickelten Theorie noch besonders hinzuweisen. Es mag nur noch erwähnt werden, dass nicht nur, wie oben nach Müller[2]) empfohlen wurde, sehr dicke

1) Lommel, Pogg. Ann. **102.** p. 80. 1863.
2) Müller, Pogg. Ann. **44.** p. 273. 1838.

Krystallplatten geeignet sind, um diese Büschel ungestört von den isochromatischen Linien zu beobachten, sondern auch sehr dünne Platten, welche die isochromatischen Curven so erweitert zeigen, dass dieselben grösstentheils ausserhalb des Gesichtsfeldes fallen. Ein Viertelwellen-Glimmerblättchen z. B. eignet sich zur Beobachtung der dunklen Hyperbeln sehr gut.

Steht die Krystalloberfläche senkrecht zur zweiten Mittellinie der optischen Axen, so bleiben offenbar die vorstehend entwickelten Gleichungen sammt allen daraus gezogenen Folgerungen ungeändert in Geltung, nur dass jetzt der Winkel δ von 45 bis 90° geht. Für $\delta = 90^0$ kommt man man auf den vorigen Fall zurück, indem jetzt die Platte zu einer einaxigen wird, deren Oberflächen mit der optischen Axe parallel laufen.

IV.

Um die Gleichung der Isogyren im allgemeinsten Falle bezogen auf ein in der Krystalloberfläche gelegenes ebenes Coordinatensystem zu entwickeln, transformiren wir die Gleichung der Isogyrenfläche (J oder J_1) zu einem neuen Coordinatensystem, dessen x'-, y'-, z'-Axe mit den bisherigen Axen Winkel bilden, deren Cosinus resp. sind:

$$a_1,\ b_1,\ c_1, \qquad a_2,\ b_2,\ c_2, \qquad a_3,\ b_3,\ c_3,$$

Grössen, für welche bekanntlich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= o, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, & a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= o, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1, & a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= o \end{aligned}$$

gelten. Alsdann hat man:

$$(41) \qquad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \quad y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z', \end{cases}$$

und, wenn ξ', η', ζ' die Cosinus der Winkel bedeuten, welchen die in Bezug auf die früheren Axen durch ξ, η, ζ gegebene Schwingungsrichtung mit den neuen Axen bildet:

$$\xi = a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 \zeta', \quad \eta = b_1 \xi' + b_2 \eta' + b_3 \zeta',$$
$$\zeta = c_1 \xi' + c_2 \eta' + c_3 \zeta'.$$

Lassen wir die z'-Axe mit der Normale der Krystalloberfläche zusammenfallen, indem wir $a_3 = a$, $b_3 = b$, $c_3 = c$

nehmen, so muss vermöge Gleichung (6) $\zeta' = o$ sein, und die vorstehenden Relationen reduciren sich auf:

(42) $\xi = a_1 \xi' + a_2 \eta', \quad \eta = b_1 \xi' + b_2 \eta', \quad \zeta = c_1 \xi' + c_2 \eta',$

wo: $\xi' = \cos\varphi, \quad \eta' = \sin\varphi$

den Winkel φ bestimmen, welchen die der Isogyre zugehörige Schwingungsrichtung mit der x'-Axe des neuen Coordinatensystems einschliesst. Aus (41) und (42) ergibt sich nun leicht:

$$(43) \begin{cases} \eta x - \xi y = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\eta' x' - \xi' y') + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\xi' z' \\ \qquad + (a_3 b_2 - a_2 b_3)\eta' z' \\ \zeta x - \xi z = (a_1 c_2 - a_2 c_1)(\eta' x' - \xi' y') + (a_3 c_1 - a_1 c_3)\xi' z' \\ \qquad + (a_3 c_2 - a_2 c_3)\eta' z' \\ \zeta y - \eta z = (b_1 c_2 - b_2 c_1)(\eta' x' - \xi' y') + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\xi' z' \\ \qquad + (b_3 c_2 - b_2 c_3)\eta' z'; \end{cases}$$

man braucht nun nur die durch die Gleichungen (41) und (43) ausgedrückten Werthe in die Gleichung (J) der Isogyrenfläche zu substituiren und $z' = e$ zu setzen, um die Gleichung der Isogyren in der gewünschten Form zu erhalten.

Wenn z. B. die Krystalloberfläche auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht, also mit der y-Axe parallel läuft, und ihre Normale mit der z-Axe den Winkel γ bildet, so ist:

$$a_1 = \cos\gamma, \quad b_1 = o, \quad c_1 = -\sin\gamma, \quad a_2 = o, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = o,$$
$$a_3 = \sin\gamma, \quad b_3 = o, \quad c_3 = \cos\gamma,$$

ferner:

(41ₐ) $x = x'\cos\gamma + z'\sin\gamma, \quad y = y', \quad z = x'\sin\gamma + z'\cos\gamma,$

und:

$$(43_a) \begin{cases} \eta x - \xi y = (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\cos\gamma + z'\sin\varphi\sin\gamma, \\ \zeta x - \xi z = -z'\cos\varphi, \\ \zeta y - \eta z = (x'\sin\varphi - y'\cos\varphi)\sin\gamma - z'\sin\varphi\cos\gamma. \end{cases}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Gleichung (J), setzt $z' = e$ und lässt schliesslich die Accente weg, so ergibt sich nach einigen leicht ersichtlichen Reductionen die Isogyrengleichung dritter Ordnung:

$$(44) \begin{cases} (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 y \sin 2\gamma \\ -2e(x\sin\varphi - y\cos\varphi)\big(x\cos\varphi\cos(\gamma+\delta)\cos(\gamma-\delta) + y\sin\varphi\cos 2\gamma\big) \\ -e^2\sin 2\gamma(x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi) - e^3\sin 2\varphi\sin(\gamma+\delta) = o, \end{cases}$$

welche eine Schaar von Curven darstellt, deren jede durch die zwei Punkte:

$$y = o, \qquad x = -e\,\mathrm{tg}(\gamma - \delta), \quad \text{und}$$
$$y = o, \qquad x = -e\,\mathrm{tg}(\gamma + \delta),$$

d. i. durch die Endpunkte der beiden optischen Axen hindurchgeht.

Steht die Krystalloberfläche senkrecht zu der einen optischen Axe, so ist $\gamma = \delta$, und die Gleichung der Isogyren wird:

$$(45)\left\{\begin{aligned}&(x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2 y - 2e\,\mathrm{ctg}\,2\delta(x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\\&\qquad - e^2(x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi) = o.\end{aligned}\right.$$

Sind nun x und y so klein, dass ihre höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden können, d. h. beschränkt man sich auf einen hinlänglich kleinen Bereich um die Mitte des Gesichtsfeldes, so reducirt sich vorstehende Gleichung auf die einer geraden Linie:

$$(46) \qquad x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi = o.$$

In erster Annäherung kann also der dunkle Büschel, welcher bekanntlich bei gekreuzten Schwingungsebenen des Polarisationsapparates in diesem Falle den Axenendpunkt durchsetzt, als geradlinig angesehen werden. Aus der Gleichung (46) ist ersichtlich, dass, wenn man die Krystallplatte in ihrer Ebene dreht, der Büschel in entgegengesetzter Richtung mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit fortschreitet.

Werden in zweiter Annäherung auch noch die zweiten Potenzen der Coordinaten berücksichtigt, so zieht sich die vollständige Gleichung (45) auf die genähert gültige:

$$(47)\left\{\begin{aligned}&(x\sin\varphi - y\cos\varphi)(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \tfrac{1}{2}e\,\mathrm{tg}\,2\delta(x\sin 2\varphi\\&\qquad - y\cos 2\varphi) = o\end{aligned}\right.$$

zurück. Dieselbe verwandelt sich, wenn man den Coordinatenanfang in die Mitte zwischen die Axenpunkte verlegt, indem man $x = x' - \tfrac{1}{2}e\,\mathrm{tg}\,2\delta$ setzt, in die folgende:

$$x'^2 - 2x'y\,\mathrm{ctg}\,2\varphi - y^2 = \tfrac{1}{4}e^2\,\mathrm{tg}^2\,2\delta,$$

oder, wenn man der Kürze wegen den Abstand $e\,\mathrm{tg}\,2\delta$ der Axenendpunkte wie oben mit $2p$ bezeichnet:

(48) $$x'^2 - 2x'y \operatorname{ctg} 2\varphi - y^2 = p^2$$

und stellt sonach ein System gleichseitiger Hyperbeln dar, welches mit demjenigen identisch ist, das im vorigen Abschnitt für einen kleinen Axenwinkel auftrat (Gl. 40), hier aber für jeden beliebigen Axenwinkel Geltung hat. Jede Hyperbel geht durch die beiden Axenendpunkte und wird daselbst von der Geraden (46) berührt, während ihre Asymptoten mit den beiden zugehörigen Schwingungsrichtungen parallel laufen.

Die Curven dritter Ordnung, welche durch die vollständige Gleichung (45) dargestellt sind, gehen alle durch die beiden Endpunkte der optischen Axen, nämlich einerseits durch den Coordinatenanfang, andererseits durch den Punkt:

$$x = -e \operatorname{tg} 2\delta, \quad y = o$$

und werden dort sowohl von den soeben besprochenen Hyperbeln (47), als auch von der Geraden (46) berührt. Der dritte Schnittpunkt der Abscissenaxe mit der Curve liegt im Unendlichen.

Die Tangente im Anfangspunkt:

(46) $$x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi = o$$

hat mit der Curve noch einen Schnittpunkt (Tangentialpunkt) gemein, dessen Coordinaten:

(49) $$x_1 = -e \operatorname{ctg} 2\delta \cdot \frac{\cos 2\varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad y_1 = -e \operatorname{ctg} 2\delta \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

sind. Die Tangentialpunkte liegen auf einer Parabel, deren Gleichung:

(50) $$y_1^2 + 4ex_1 \operatorname{ctg} 2\delta - 4e^2 \operatorname{ctg}^2 2\delta = o$$

erhalten wird, wenn man den Winkel φ aus den beiden Gleichungen (49) eliminirt. Diese Parabel, deren Parameter $2e \operatorname{ctg} 2\delta$ ist, hat den Coordinatenanfang (den Endpunkt der zur Krystalloberfläche senkrechten optischen Axe) zum Brennpunkt; ihre Berührungslinie im Tangentialpunkt, wo sie die Curve dritter Ordnung schneidet, bildet mit der Abscissenaxe den Winkel φ.

Die Gleichung der Curve (45) ergibt sich in einfacherer Gestalt, wenn man sie auf ein neues Coordinatensystem (x',

y') bezieht, dessen Abscissenaxe mit der früheren den Winkel φ bildet. Man erhält die transformirte Gleichung, wenn man:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

demnach:

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$$

setzt und nach x' auflöst, sogleich in folgender Form:

$$x' = \frac{(e^2 + y'^2)\, y'\cos\varphi}{(e^2 - y'^2)\sin\varphi - 2ey'\operatorname{ctg} 2\delta}. \tag{51}$$

Der Nenner von x' wird Null, also $x' = \infty$, für:

$$y_1' = e\frac{\operatorname{ctg} 2\delta}{\sin\varphi}\left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta \sin^2\varphi} - 1\right) \tag{52}$$

$$y_2' = -e\frac{\operatorname{ctg} 2\delta}{\sin\varphi}\left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta \sin^2\varphi} + 1\right). \tag{53}$$

Jede Curve hat demnach die beiden mit der zugehörigen Schwingungsrichtung parallelen Asymptoten (52) und (53). Zwischen ihnen liegt der durch den Anfangspunkt gehende, nach beiden Seiten hin sich ins Unendliche erstreckende Curvenzweig. Ein zweiter offener Curvenzweig liegt oberhalb der Asymptote y_1' im Bereiche der negativen x', ein dritter ebenfalls offener unterhalb y_2' nach der Seite der positiven x'. —

Wir verzichten auf die Besprechung noch weiterer Einzelfälle, da der Nutzen der Isygrenfläche zur Ermittelung der Curven gleicher Schwingungsrichtung an den gegebenen Beispielen wohl hinreichend ersichtlich geworden ist. Indem wir uns damit begnügten, diese physikalisch wichtigen Specialfälle mit Hülfe unserer Fläche übersichtlich zu beschreiben, glaubten wir Erörterungen von rein mathematischem Interesse bei Seite lassen zu dürfen.

V. *Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten; von L. Graetz.*

(Hierzu Taf. I Fig. 3.)

Erste Abhandlung.

Um von der kinetischen Theorie der Gase überzugehen zu einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, fehlen uns vorläufig noch fast alle experimentellen Anhaltspunkte. Bei den Gasen forderte das Mariotte'sche Gesetz eine mechanische Erklärung, und aus dieser ergaben sich dann durch Entwickelung die weiteren Gesetze über Reibung, Wärmeleitung und Diffusion, die dann im allgemeinen von der Erfahrung bestätigt wurden. Bei den Flüssigkeiten scheint der umgekehrte Weg der Forschung eingeschlagen werden zu müssen. Es wird sich zuerst darum handeln, möglichst viele Constanten der Flüssigkeiten in ihrer Abhängigkeit kennen zu lernen, um aus dieser genauer die Richtung zu erkennen, in welcher die kinetische Theorie der Gase abgeändert werden muss, um eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten zu werden. Zum Zweck derartiger weiterer Untersuchungen scheint die Bestimmung der Wärmeleitung der Flüssigkeiten in erster Linie Anhaltspunkte geben zu können. Meine Untersuchungen erstrecken sich demnach zuerst auf die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten in Verbindung mit ihrer Reibung.

Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeiten sind wir erst durch die letzte Arbeit von H. F. Weber[1]) zu einigermassen sicheren Anschauungen gekommen. Die Methode von Weber ist, wie es scheint, im grossen und ganzen einwurfsfrei, sodass seine Zahlen wenigstens relativ wohlbegründet erscheinen. Zu gleicher Zeit hat Weber durch umfassende Kritik die Gründe entwickelt, aus denen es kommt, dass die früheren Zahlen von Winkelmann[2]) und Beetz[3]) mit den seinigen nicht übereinstimmen. Diese Kritik

1) Weber, Wied. Ann. **10.** p. 163. 1880.
2) Winkelmann, Pogg. Ann. **153.** p. 481. 1874.
3) Beetz, Wied. Ann. **8.** p. 435. 1879.

ist im allgemeinen berechtigt, sodass es sich jetzt nur noch darum handeln würde, zu prüfen, ob auch die Weber'schen Zahlen wirklich stichhaltig sind. Ganz exact sind sie jedenfalls nicht, da die Berechnung der Versuche von Weber nicht ganz streng durchgeführt ist; doch ist dieser Mangel durch die dankenswerthe Arbeit von Lorberg[1]) ergänzt worden. Lorberg hat einerseits gezeigt, dass die in den einzelnen Beobachtungen Weber's hervortretenden Abweichungen nicht von der Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur herrühren, und hat zweitens aus den Weber'schen Zahlen möglichst streng den Werth für die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers berechnet. Er fand für Wasser:

$$a^2 = 0{,}08317 \text{ bei } 4^0, \quad a^2 = 0{,}09108 \text{ bei } 23^0 \ \frac{\text{g}}{\text{cm min.}},$$

während Weber selbst berechnet hatte:

$$a^2 = 0{,}0745 \text{ bei } 4^0, \quad a^2 = 0{,}0857 \text{ bei } 23^0.$$

Die exacte Berechnung gibt also Zahlen, die um 10—11 $^0/_0$ von den Weber'schen abweichen. In ähnlichem Verhältniss müssen die übrigen Zahlen von Weber abgeändert werden Gegen die Methode von Weber scheint nur eingewendet werden zu können, dass sie erstens die äussere Wärmeleitungsfähigkeit benutzt, eine bekanntlich unvollkommen definirte Grösse, und dass zweitens in ihr die vollständige oder partielle Diathermansie der Flüssigkeiten nicht berücksichtigt wird. In der That gelten die Grundgleichungen der Fourier'schen Wärmetheorie ohne weiteres nur für den Fall, dass die gesammte von der oberen Kupferfläche abgegebene Wärme in der Flüssigkeit absorbirt und durch Leitung fortgeführt wird. Bei vollständig diathermanen Körpern, wie Schwefelkohlenstoff, kann immerhin ein ziemlich beträchtlicher Theil der Wärmemenge durch Strahlung übergeführt werden, und in geringerem Maasse wird das bei allen Flüssigkeiten der Fall sein, sodass wir nicht wissen können, in welcher Ausdehnung die Weber'schen Beobachtungen uns exacte Zahlen geben. Deswegen schien es angemessen, nach einer anderen Methode zu suchen, welche von diesen

1) Lorberg, Wied. Ann. **14.** p. 291. 1881.

Mängeln frei ist und die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit auf bequeme Weise gestattet. In dieser Arbeit wird nur diese Methode und ihre Theorie auseinandergesetzt und an einigen Beobachtungsreihen ihre Anwendung gezeigt. Eine ausführliche Untersuchung einer Reihe anderer Flüssigkeiten wird in der folgenden Abhandlung veröffentlicht werden.

§. 2. Methode.

Die angewandte Untersuchungsmethode ist folgende. Die zu untersuchende Flüssigkeit von der Temperatur T_1 fliesst unter constantem Druck durch eine enge Messingröhre, die auf der Temperatur T_0 gehalten wird. Es wird die Temperatur U und das Gewicht G der in einer bestimmten Zeit ausgeflossenen Flüssigkeit bestimmt. Aus diesen Daten in Verbindung mit Constanten des Apparates und der Flüssigkeit lässt sich die Wärmeleitungsfähigkeit k berechnen. Der Apparat war demnach in ähnlicher Weise eingerichtet, wie die Apparate zur Bestimmung der Reibung von Flüssigkeiten mittelst Capillaren (s. Fig. 3). Eine Glasröhre A mit drei Ausflussöffnungen, um verschiedene Druckhöhen zu erhalten, taucht mit ihrem unteren U-förmig gebogenen Theile von 18 cm Länge in ein Wasserbad W, das auf beliebige Temperatur gebracht werden kann. Der aus dem Wasser heraustretende Theil B der Glasröhre wurde mit Filz umwickelt und trug kurz vor seinem Ende in einem Ansatzrohr ein Thermometer E_1. In der Oeffnung von B ist durch Kork die enge und dünne Messingröhre R befestigt, welche an dem anderen Ende ebenfalls durch einen Kork in eine horizontale Glasröhre G gesteckt ist, die ein Thermometer E_2 und ein Ausflussrohr H enthält. Die Messingröhre befindet sich in einem Kästchen K aus dünnem Blech (bei neueren Versuchen aus ziemlich starkem Gusseisen), welches an den zwei Seitenwänden Ansätze trägt, in welche die Glasröhren B und G durch Kork und Kautschuk wasserdicht eingesetzt sind. Das Kästchen ist oben offen und enthält unten ein Ausflussrohr. Das Wasser der Wasserleitung strömt in das Kästchen oben ein und unten ab, sodass die Messingröhre fortwährend von fliessendem Wasser umspült wird. Die Temperatur dieses

Wassers wird durch ein Thermometer E_3 bestimmt. Die zu untersuchende Flüssigkeit bleibt in der Röhre A immer in constanter Höhe, indem man durch ein darüber angebrachtes Reservoir soviel Flüssigkeit zufliessen lässt, als bei H ausfliesst. Die Flüssigkeit fliesst langsam durch das Bad B, wird dort auf die Temperatur T_1 erwärmt, gelangt mit dieser Temperatur, die an dem Thermometer E_1 abgelesen wird, in die Messingröhre und wird beim Durchfluss durch diese abgekühlt. Das Bad B besteht aus einem doppelwandigen Kupfergefäss von circa 8 Litern Inhalt, das durch einen darunter befindlichen Brenner erwärmt und durch einen Rührer auf gleichmässiger Temperatur erhalten wird. Dieser Rührer wurde durch eine kleine magnetelectrische Maschine von Hefner-Alteneck, die von drei Daniells gespeist wurde, bewegt. Die Messingröhre ist zwar fortwährend mit frischem Wasser in Berührung, trotzdem zeigte es sich, dass sich an der Röhre selbst eine Schicht von etwas höherer Temperatur bildete. Um diese fortzuschaffen, wurde ein feiner Pinsel benutzt, der fortwährend diese stagnirende Schicht abfegte. Auch dieser Pinsel wurde durch die magnetelectrische Maschine bewegt. Die ausfliessende Flüssigkeit wurde bei der Beobachtung eine bestimmte Zeit hindurch, gewöhnlich eine Minute lang, in gewogenen Gläschen aufgefangen. Es wurde zur Beobachtung immer der stationäre Zustand abgewartet, der 5—10 Minuten lang erhalten werden konnte.

Der Durchmesser der benutzten Messingröhre, der bei der Berechnung herausfällt, war circa 0,06 cm, die Thermometer E_1 und E_2 waren in $^1/_{10}$, E_3 in $^1/_5$ Grade getheilt und mit dem Luftthermometer verglichen. Nach jeder Versuchsreihe wurde die Messingröhre mit destillirtem Wasser und Alkohol ausgespült und durch eine Luftpumpe lange Zeit Luft hindurch gezogen. Das obere Ausflussrohr in A war 71 cm über dem Ausflussniveau von H, das mittlere 50 cm, das untere 17 cm.

Da die Flüssigkeit bei dieser Methode rings von einer auf derselben Temperatur befindlichen Wand umgeben ist, so fällt die Wärmestrahlung von den Wänden fort. Aller-

dings wird die Wärmeleitung auch noch durch die innere Strahlung zwischen den Molecülen der Flüssigkeiten beeinflusst. Doch sind unsere Vorstellungen über dieses Verhältniss noch so wenig ausgebildet, dass an eine Trennung dieser beiden Constanten noch nicht gedacht werden kann. Die innere Strahlung tritt naturgemäss bei allen Versuchen ein, in denen zwei Theile einer Flüssigkeit auf verschiedenen Temperaturen sind, sodass sie nie durch das Experiment, sondern nur durch Rechnung eliminirt werden kann. Auch die äussere Wärmeleitung wird bei dieser Methode gar nicht benutzt, sodass die Methode also von den beiden Hauptmängeln der Weber'schen frei ist.

§ 3. Theorie der Versuche.

Es sei die Axe unserer Röhre die z-Axe, und wir wollen zuerst annehmen, dass die Flüssigkeit mit einer constanten mittleren Geschwindigkeit α durch die Röhre fliesst. Dann ist, wenn r der Abstand eines Punktes der Röhre von der Axe ist, die Differentialgleichung für die Temperatur u bei stationärem Zustand:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) . \; a^2 = \frac{k}{\varrho \, C} .$$

Die Grenzbedingungen sind:

1) für $z = o \;\; u = T_1$, 2) für $r = R \;\; u = o$,

wenn wir die Temperaturen von der Temperatur des die Röhre umspülenden Wassers aus rechnen. Wir setzen:

$$u = A e^{-\beta z} V$$

und haben für V die Differentialgleichung:

$$\left(\beta^2 + \frac{\alpha \beta}{a^2} \right) V + \frac{d^2 V}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d V}{d r} = o , \qquad V = J_0 \left(\sqrt{\beta^2 + \frac{\alpha \beta}{a^2}} \, r \right) .$$

wo J_0 die Bessel'sche Function von der Ordnung 0 ist.

Die Grenzbedingung (2) gibt zur Bestimmung von β die Gleichung:

$$J_0 \left(\sqrt{\beta^2 + \frac{\alpha \beta}{a^2}} \, R \right) = 0 .$$

Die Wurzeln der Gleichung $J_0 = 0$ sind der Reihe nach:

$\sigma_1 = 2{,}404\,928$, $\sigma_2 = 5{,}52024$, $\sigma_3 = 8{,}65387$,
$\sigma_4 = 11{,}79156$ u. s. w.

Es ist also:
$$\frac{\alpha \beta_i}{a^2} + \beta_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{R^2}.$$

Da die ersten σ_i klein und α / a^2 sehr gross ist, so kann man β^2 ohne Fehler vernachlässigen (der Werth von β_1 wird erst in der sechsten Stelle beeinflusst) und die Lösung der Differentialgleichung einfacher schreiben:

$$u = \sum_i A_i e^{-\frac{a^2 \sigma_i^2 z}{\alpha R^2}} J_0 \left(\frac{\sigma_i r}{R}\right).$$

Aus der Grenzbedingung 1) folgt nach der Theorie der Bessel'schen Functionen:

$$A_i = -\frac{2 T_1}{\sigma_i J_0'(\sigma_i)} \qquad \text{also:}$$

$$u = -2 T_1 \sum_i \frac{1}{\sigma_i J_0'(\sigma_i)} e^{-\frac{a^2 \sigma_i^2 z}{\alpha R^2}} J_0 \left(\frac{\sigma_i r}{R}\right).$$

Um den Mittelwerth U der Temperatur in dem Querschnitt an dem Ende der Röhre zu erhalten, hat man statt z einzusetzen l, die Länge der Röhre, über den Querschnitt der Röhre zu integriren und durch $R^2 \pi$ zu dividiren. Dadurch erhält man, wenn man beachtet, dass $\alpha R^2 \pi$ gleich dem Volumen der ausgeflossenen Flüssigkeit ist, und dieses gleich dem Gewicht G dividirt durch die Dichte ϱ ist, für den Mittelwerth der Temperatur:

$$U = 4 T_1 \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} e^{-\frac{a^2 \sigma_i^2 \pi l \varrho}{G}}.$$

Da σ_i^2 stark mit i wächst, so werden die Glieder dieser Reihe nach dem ersten rasch klein, und man braucht höchstens zwei Glieder zu nehmen.

Diese Ableitung gilt aber nur unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Röhre überall dieselbe ist. Dies ist nun nicht der Fall und auch, wie die Berechnung zeigt, nicht einmal zur Vereinfachung anzunehmen erlaubt. Bevor jedoch die Rechnung streng durchgeführt wird, ist erst die Frage zu untersuchen, ob es erlaubt ist, die Temperatur der Innenwand der Messingröhre gleich der der Aussenwand zu setzen. Es scheint das deswegen falsch zu sein, weil fortwährend Flüssigkeit von höherer Tempe-

ratur an die Innenwand kommt, und diese dann jedenfalls eine mehr oder minder von Null abweichende Temperatur hat. Wenn sich zeigen lässt, dass dieser Fehler selbst in dem Falle, dass die Geschwindigkeit in der ganzen Röhre überall die mittlere ist, unbedeutend ist, so ist er ganz zu vernachlässigen in dem wirklichen Falle, wo die Flüssigkeit an der Innenwand der Röhre haftet. Der Einfluss der Messingröhre lässt sich nun leicht in Rechnung ziehen. Es sei v die Temperatur in einem Punkte der Messingröhre, u die in einem Punkte der Flüssigkeit. Dann haben wir die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen:

I. Für die Röhre.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

1) $v = 0$ für $r = R_1$

2) $v = u$ für $r = R_2$

3) $k' \frac{\partial v}{\partial r} = k \frac{\partial u}{\partial r}$ für $r = R_2$[1])

II. Für die Flüssigkeit.

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

1) $u = T_1$ für $z = 0$

2) $u = v$ für $r = R_2$

3) $k \frac{\partial u}{\partial r} = k' \frac{\partial v}{\partial r}$ für $r = R_2$.

Darin ist k' die Wärmeleitungsfähigkeit des Messings, k die der Flüssigkeit, R_1 der äussere, R_2 der innere Radius der Messingröhre. Die Rechnung ist einfach durchzuführen mit Benutzung von Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art, J und Y, und man erhält für die Mitteltemperatur der Flüssigkeit U jetzt:

$$U = 4\,T_1 \sum_{\varkappa} \frac{1}{(\beta_\varkappa R_2)^2} \frac{J_0'^{\,2}(\beta_\varkappa R_2)}{[J_0'^{\,2}(\beta_\varkappa R_2) + J_0^2(\beta_\varkappa R_2)]}\, e^{-\frac{a^2 \beta_\varkappa^2 l}{\alpha}}$$

und zur Bestimmung der β die Gleichung:

$$\frac{\beta}{\gamma} \frac{J_0'(\beta R_1)}{J_0(\beta R_2)} \left[\frac{Y_0(\gamma R_1) J_0(\gamma R_2) - J_0(\gamma R_1)\, Y_0(\gamma R_2)}{J_0'(\gamma R_2)\, Y_0(\gamma R_1) - J_0(\gamma R_1)\, Y_0'(\gamma R_2)} \right] = \frac{k}{k'}$$

$$\gamma = \frac{a^2}{\alpha} \beta^2 .$$

Setzt man $\beta R_2 = y$, $\gamma R_1 = x$, $R_2 / R_1 = \lambda$ und beachtet, dass $J_0' = -J_1$, $Y_0' = -Y_1$ ist, so wird die letzte Gleichung:

$$\frac{\lambda x}{y} \times \frac{J_0(y)}{J_1(y)} \left[\frac{J_1(\lambda x)\, Y_0(x) - J_0(x)\, Y_1(\lambda x)}{Y_0(x) J_0(\lambda x) - J_0(x)\, Y_0(\lambda x)} \right] = \frac{k}{k'} .$$

1) Lorberg, Wied. Ann. **14.** p. 300. 1881.

Es ist $\gamma = (a^2/\alpha)\beta^2$, und da $R^2\pi\alpha = V$ das Ausflussvolumen ist, so ist:

$$x = \frac{a^2 R_1 \pi}{V} y^2.$$

Die Grössenordnung von y und x ist sehr verschieden. Es ist y ungefähr gleich 2,4, und daraus ergibt sich bei den mittleren Verhältnissen der Versuche ($a^2=0{,}09$, $R_1=0{,}06$, $V=9$), x etwa $= 0{,}005$, also sehr klein. Infolge dessen kann man Vereinfachungen eintreten lassen. Es ist:

$$Y_0(x) = J_0(x) \log\text{nat}\, x + 2\left(J_2(x) - \tfrac{1}{2} J_4(x) + \cdots\right)^{1)},$$

$$Y_1(x) = -\frac{J_0(x)}{x} + J_1(x)\log\text{nat}\, x - J_1(x) + 4\left(\tfrac{3}{8} J_3(x) - \cdots\right).$$

Da nun $J_0(x)$ für kleine x nahezu $= 1$, $J_1(x) = x/2$ ist, so bleibt schliesslich zur Bestimmung von $y(=\beta R_2)$ die Gleichung:

$$\frac{k}{k'} = \frac{1}{y}\frac{J_0(y)}{J_1(y)}\frac{1}{\log\text{nat}\frac{R_1}{R_2}}.$$

Bei den folgenden Versuchen ist R_1/R_2 ungefähr $= \frac{3}{2}$, $k/k_1 = 0{,}0044$, und so ergibt sich $y_1 = 2{,}401$. Da mit diesem y der Bruch $J_1^2(y)/(J_1^2(y) + J_0^2(y))$ nur äusserst wenig von Eins verschieden ist, so wird die Temperatur:

$$U = 4T_1 \sum_{\varkappa} \frac{1}{y_\varkappa^2} e^{-\frac{a^2 y_\varkappa^2 \pi l \varrho}{G}},$$

hat also genau dieselbe Form, wie früher, und der Unterschied $y_1 = 2{,}401$ gegen das frühere $\sigma_1 = 2{,}405$ ist zu vernachlässigen. Bei dem wirklichen Vorgang, wo die Wand benetzt wird, ist dieser Einfluss nach dem Gesagten noch geringer.

Die Annahme jedoch, dass die Flüssigkeit in jedem Punkte der Röhre dieselbe mittlere Geschwindigkeit α habe, ist weder in der Natur erfüllt, noch wie die Berechnung zeigt, zur Vereinfachung erlaubt. Wenn man die wirkliche Geschwindigkeit in jedem einzelnen Punkte nach dem Poiseuille'schen Gesetz berechnet und die Rechnung mit dieser durchführt, so ist die Geschwindigkeit:

---

1) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. p. 74. 1867.

$w = 2\alpha\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, wo α die frühere mittlere Geschwindigkeit ist, und es ist nun die Differentialgleichung für die Temperatur:

$$2\alpha\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial u}{\partial z} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

deren Lösung wir die Form geben:

$$u = A e^{-\frac{a^2}{2\alpha}\beta^2 z} V, \qquad \frac{d^2 V}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d V}{d r} + \beta^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) V = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für V führt auf Functionen, welche mit den Bessel'schen im Zusammenhang stehen. Bezeichnet man nämlich die Lösung dieser Differentialgleichung mit $V(r, \beta, R)$, so ist:

$$V(r, \beta, \infty) = J_0(\beta r).$$

Es werden im Folgenden nur die Wurzeln der Gleichung:

$$V(R, \beta, R) = 0$$

gebraucht. Zu dem Ende entwickelt man die Lösung der Differentialgleichung ($\beta r = x$, $\beta R = \mu$ gesetzt):

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d V}{d x} + \left(1 - \frac{x^2}{\mu^2}\right) V = 0$$

nach Potenzen von x. Die Reihe ist ziemlich umständlich:

$$V(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2.4)^2}\left(1 + \frac{2^2}{\mu^2}\right) - \frac{x^6}{(2.4.6)^2}\left(1 + \frac{2^2 + 4^2}{\mu^2}\right)$$
$$+ \frac{x^8}{(2.4.6.8)^2}\left(1 + \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{\mu^2} + \frac{6^2 2^2}{\mu^4}\right)$$
$$- \frac{x^{10}}{(2.4.6.8.10)^2}\left(1 + \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2}{\mu^2} + \frac{6^2 2^2 + 8^2(2^2 + 4^2)}{\mu^4}\right) + \cdots$$

Die Gleichung $V(\mu) = 0$ wird dann:

$$0 = 1 - \mu^2\,0{,}1875 + \mu^4\,0{,}007\,921 - \mu^6\,0{,}000\,144\,04$$
$$+ \mu^8\,0{,}000\,001\,459\,2 - \mu^{10}\,0{,}000\,000\,009\,493\,8 + \cdots.$$

Ihre ersten beiden Wurzeln sind:

$$\mu_1 = 2{,}7043, \qquad \mu_2 = 6{,}50.$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung alle bestimmt, so ist die Temperatur:

$$u = \sum_i A_i e^{-\frac{a^2 n z \varrho \mu_i^2}{2G}} V\left(\frac{\mu_i r}{R}\right).$$

Für $z = 0$, soll $u = T_1$ sein, also:

$$T_1 = \sum_i A_i V\left(\mu_i \frac{r}{R}\right),$$

und daraus müssen sich die A_i ebenso wie bei den Bessel'schen und Kugelfunctionen ergeben. Setzt man $A_i = C_i T_1$, wo C_i von R abhängig ist, so ist:

$$u = T_1 \sum_i C_i e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 n z \varrho}{2G}} V\left(\mu_i \frac{r}{R}\right)$$

und die Mitteltemperatur am Ende der Röhre:

$$U = \frac{2 T_1}{R^2} \sum_i C_i e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 n l \varrho}{2G}} \int_0^R V\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) r\, dr.$$

Aus dem Integral ergibt sich eine neue von R und μ_i abhängige Constante, sodass wir definitiv schreiben können:

$$U = T_1 \sum_i p_i e^{-\frac{a^2 \mu_i^2 n l \varrho}{2G}}.$$

Darin sind die p_i Constanten, die ausser von den μ_i nur von R abhängen. Es wäre natürlich von wesentlichem Vortheil, wenn sich die p_i bestimmt durch R und μ_i ausdrücken liessen. Indess gehört dazu eine eingehende Untersuchung der Function $V(r, \beta, R)$, die wahrscheinlich nicht einfach ist, die aber als Erweiterung der Bessel'schen Function vielleicht selbstständiges mathematisches Interesse besitzt. Für physikalische Zwecke lassen sich dagegen die p_i sehr einfach als Constanten des Apparates experimentell bestimmen.

Diese Bestimmung geschieht dadurch, dass man die Flüssigkeiten mit verschiedenen Geschwindigkeiten durch dieselbe Röhre fliessen lässt. Diese verschiedenen Geschwindigkeiten werden durch die verschiedenen Druckhöhen hervorgebracht. Es wurde aus Analogie mit der einfachen Formel (für $w = \text{const.}$) angenommen, und diese Annahme

zeigte sich durch die Erfahrung gerechtfertigt, dass man von der Reihe für U nur die beiden ersten Glieder zu nehmen braucht. Das zweite Glied macht noch etwa 3 Proc. in dem Werthe von k aus. Unter dieser Annahme berechnen sich die beiden Grössen p_1 und p_2 aus drei Beobachtungsreihen mit drei verschiedenen Geschwindigkeiten folgendermassen. Es seien $T_0^1\, T_1^1\, U^1$ die Temperaturen des Bades, der eintretenden und der austretenden Flüssigkeit bei der grössten Druckhöhe, $T_0^2\, T_1^2\, U^2$ bei der mittleren, $T_0^3\, T_1^3\, U^3$ bei der geringsten Druckhöhe, $V_1\, V_2\, V_3$ die entsprechenden Volumina der in eine Minute ausgeflossenen Flüssigkeit. Dann hat man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{U^1 - T_0^1}{T_1^1 - T_0^1} &= p_1\, e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_1^2}{2 V_1}} + p_2 B_1 \qquad B_1 = e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_2^2}{2 V_1}}, \\
\frac{U^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} &= p_1\, e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_1^2}{2 V_2}} + p_2 B_2 \qquad B_2 = e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_2^2}{2 V_2}}; \\
\frac{U^3 - T_0^3}{T_1^2 - T_0^3} &= p_1\, e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_1^2}{2 V_3}} + p_2 B_3 \qquad B_3 = e^{-\frac{a^2 \pi l \mu_2^2}{2 V_3}}.
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Die $B_1\, B_2\, B_3$ lassen sich berechnen unter der Annahme $a^2 = 0{,}09$ im Mittel und können nachher noch verbessert werden. Dann ergibt sich p_2 aus der Formel:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_1}\frac{V_3}{V_2} = \frac{\log\left[\dfrac{(U^2 - T_0^2)(T_1^1 - T_0^1)}{(U^1 - T_0^1)(T_1^2 - T_0^2)}\right] + \log\left[\dfrac{1 - p_2 B_2 \dfrac{T_1^2 - T_0^2}{U^2 - T_0^2}}{1 - p_2 B_1 \dfrac{T_1^1 - T_0^1}{U^1 - T_0^1}}\right]}{\log\left[\dfrac{(U^3 - T_0^3)(T_1^1 - T_0^1)}{(U^1 - T_0^1)(T_1^3 - T_0^3)}\right] + \log\left[\dfrac{1 - p_2 B_3 \dfrac{T_1^3 - T_0^3}{U^3 - T_0^3}}{1 - p_2 B_1 \dfrac{T_1^1 - T_0^1}{U^1 - T_0^1}}\right]}.$$

Ist p_2 bestimmt, so ergibt sich p_1 aus den drei Gleichungen I auf doppelte Weise. Um diese Constanten des Apparates zu berechnen, benutzte ich die Beobachtungen mit Kupfervitriol. War diese Berechnungsweise richtig, so mussten sich für die anderen Flüssigkeiten mit diesen Constanten übereinstimmende Werthe von k ergeben, ob man nun die oberste, mittelste oder unterste Druckhöhe benutzte.

Dies war in der That innerhalb der Beobachtungsfehler der Fall, sodass diese Berechnungsweise damit gerechtfertigt ist.

Die Wärmeleitungsfähigkeit variirt erheblich mit der Temperatur. Meine Hoffnung, schon aus dem Intervall von zehn Graden die Temperaturcoëfficienten bestimmen zu können, erwies sich als falsch. Ich habe deshalb den Apparat jetzt so eingerichtet, dass er auch in anderen Temperaturintervallen Beobachtungen gestattet. Als Temperatur, auf die sich die berechneten a^2 beziehen, kann am einfachsten die Temperatur $(T_1 + U)/2$ gelten, da die Flüssigkeit mit der Temperatur T_1 in die Röhre ein- und mit U austritt. Bei den Beobachtungen, welche zur Berechnung der Constanten p_1 und p_2 dienten, wurde dafür gesorgt, dass diese Mitteltemperaturen bei den verschiedenen Druckhöhen nur um einige Zehntelgrade voneinander differirten. Es ergeben sich auf auf die oben beschriebene Weise die Werthe der Constanten für die benutzte Röhre:

$$\log p_1 = 9{,}96030, \qquad \log p_2 = 8{,}09658,$$

so dass also zur Berechnung von k die Formel dient:

$$U = T_1 \left(0{,}91264\, e^{-\frac{k}{c}\frac{\pi l (2{,}4013)^2}{2G}} + 0{,}01249\, e^{-\frac{k}{c}\frac{\pi l (6{,}5)^2}{2G}}\right).$$

Man sieht zugleich, dass die Beobachtungen direct die Werthe k/c geben, worin k die Wärmeleitungsfähigkeit, c die spec. Wärme ist. Die Beobachtungen bei der grössten Druckhöhe sind den anderen überlegen, weil die Ausflusstemperatur U sich bei diesen der Einflusstemperatur T_1 am meisten nähert.

§ 4. Beobachtungen.

Im Folgenden sind die Resultate einiger Beobachtungsreihen angeführt. Die Bestimmung der Temperaturcoëfficienten ist bei diesen noch nicht vorgenommen, sodass die Mittelwerthe sich wohl noch um weniges ändern werden. Die Spalte I gibt an, welche Druckhöhe genommen wurde, I bedeutet die oberste, II die mittlere, III die unterste Ausflussöffnung. Die vorletzte Spalte gibt die Mitteltemperatur T an, auf welche sich die Werthe von k beziehen.

Destillirtes Wasser.

Länge der Röhre $l = 9.8$ cm.

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
II	27,02	19,88	9,5	23,8872	0,0923	23,45	0,0924
I	26,88	21,32	9,58	33,0410	0,0882	24,10	0,0883
I	27,33	21,70	9,58	34,7185	0,0909	24,52	0,0910
I	29,97	23,42	9,58	33,8852	0,0905	26,69	0,0906
II	31,53	22,33	9,4	23,9609	0,0955	26,94	0,0957
I	34,72	26,53	9,58	35,2370	0,0962	30,62	0,0964
III	42,92	18,59	9,43	8,6320	0,0924	30,75	0,0926
I	36,12	27,58	9,6	35,2220	0,0944	31,85	0,0946
I	36,42	27,85	9,58	36,4430	0,0965	32,13	0,0967
II	40,23	27,36	9,5	25,1419	0,1015	33,80	0,1017
II	39,84	27,83	9,58	26,1290	0,0969	33,83	0,0971
I	39,24	29,20	9,6	35,6233	0,0968	34,22	0,0970
II	41,72	29,23	9,43	26,4034	0,0940	35,48	0,0943
					Mittel	30,00	0,0945

Es wurde die specifische Wärme bei 23° zu 1,001, bei 35° zu 1,003 angenommen.

Kupfervitriollösung.

3,1 Gewichtstheile Salz in 100 Gewichtstheilen der Lösung. Dichte $\varrho = 1{,}03$. Länge der Röhre $l = 8{,}9$ cm.

Die mit einem Stern bezeichneten Beobachtungen wurden zur Berechnung von p_1 und p_2 benutzt; sie sind die Mittelwerthe aus je fünf Beobachtungen.

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
I	29,80	23,84	7,2	45,9500	0,0987	26,82	0,0938
II	32,00	24,40	7,2	35,0890	0,0956	28,20	0,0907
II	32,2	24,45	7,2	35,3975	0,0982	28,32	0,0933
* II	33,37	25,26	7,2	34,9341	0,0969	29,02	0,0920
* III	37,76	20,87	7,2	13,8571	0,0969	29,18	0,0920
* I	32,76	26,13	7,2	46,2492	0,0969	29,40	0,0920
III	38,5	20,6	7,0	14,4110	0,1002	29,55	0,0952
II	34,5	26,0	7,2	34,4400	0,0962	30,25	0,0913
II	34,8	26,2	7,2	34,8100	0,0974	30,5	0,0925
I	34,3	27,4	7,2	46,1735	0,0940	30,85	0,0891
I	34,7	27,6	7,2	46,6320	0,0970	31,15	0,0921
					Mittel	29,39	0,0922

Die specifische Wärme der Lösung wurde zu 0,95 angenommen.[1])

1) Thomsen, Thermochemische Untersuchungen. 1. p. 51. 1882.

Alkohol.

$\rho = 0{,}815$. Länge der Röhre $l = 9{,}8$ cm.

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
I	26,60	18,80	9,2	15,7295	0,0700	22,70	0,0434
I	30,02	20,88	9,2	16,1730	0,0697	25,45	0,0432
III	41,57	10,54	7,9	3,1790	0,0693	26,00	0,0430
II	34,52	20,48	8,0	11,1685	0,0681	27,50	0,0422
I	33,02	22,40	9,2	15,9455	0,0704	27,71	0,0436
I	35,13	23,49	9,2	16,0945	0,0719	29,31	0,0445
I	39,12	26,58	9,2	17,3435	0,0694	32,85	0,0430
					Mittel	27,36	0,0433

Die specifische Wärme des Alkohols wurde zu 0,62 angenommen.

Chlornatriumlösung.

$\rho = 1{,}037$. $l = 9{,}8$ cm. $c = 0{,}96$. 5,5 g NaCl in 100 g der Lösung.

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
I	26,92	20,65	8,98	33,3013	0,1005	23,78	0,0966
I	34,06	25,58	8,4	35,3380	0,1009	29,82	0,0970
I	34,06	25,58	8,6	34,9550	0,0988	29,82	0,0948
II	35,47	24,58	8,6	25,0960	0,0985	30,02	0,0946
II	37,24	25,58	8,8	25,3632	0,0991	31,41	0,0952
I	36,27	26,80	8,6	35,2120	0,1040	31,53	0,1005
I	38,22	28,68	9,0	36,5595	0,1000	33,45	0,0961
					Mittel	30,26	0,0964

Zinkvitriollösung.

$\rho = 1{,}033$. $l = 9{,}8$ cm. $c = 0{,}94$. 3,7 g $ZnSO_4$ in 100 g der Lösung.

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
I	26,14	20,61	9,6	33,7622	0,0960	23,27	0,0900
I	27,08	21,18	9,7	32,7445	0,0963	24,23	0,0903
I	29,96	23,08	9,6	34,3985	0,0992	26,52	0,0932
I	30,66	23,88	9,7	34,9244	0,0943	27,27	0,0883
I	32,72	25,03	9,6	35,5059	0,1000	28,87	0,0940
I	36,02	27,43	9,6	36,4075	0,0990	31,22	0,0930
I	37,04	28,33	9,7	36,6272	0,0965	32,68	0,0905
I	39,47	29,68	9,6	37,2430	0,1025	34,57	0,0965
					Mittel	28,59	0,0920

Terpentinöl.

$\varrho = 0{,}872. \quad l = 9{,}8. \quad c = 0{,}45.$

Druckhöhe	T_1	U	T_0	G	$\frac{k}{c}$	T	k
I	33,82	24,13	9,2	19,5123	0,0712	28,98	0,0307
II	36,04	22,82	9,2	13,5970	0,0709	29,43	0,0306
I	35,22	24,90	9,2	19,3055	0,0713	30,06	0,0308
II	38,10	23,84	9,2	13,5690	0,0711	30,97	0,0307
I	39,82	27,68	9,2	19,2695	0,0711	33,75	0,0307
					Mittel	30,60	0,0307

Die aus den vorstehenden Versuchsreihen berechneten Werthe der Wärmeleitung k lassen zwar eine Aenderung derselben mit der Temperatur im allgemeinen erkennen, doch lässt sich der Werth derselben aus den Beobachtungen nicht entnehmen. Was die absoluten Werthe von k betrifft, so sind diese in ziemlicher Uebereinstimmung mit den Werthen, die Lorberg aus den Weber'schen Beobachtungen berechnet hat. Es ist für Wasser:

nach	Weber	Lorberg	Graetz.
	$k = 0{,}0857$ bei 23°	0,09108 bei 23°	0,0945 bei 30°

Mit dem von Lorberg berechneten Temperaturcoëfficienten für Wasser würde sich aus den Weber'schen Beobachtungen ergeben 0,0940 bei 30°, was mit dem von mir bestimmten Werth gut übereinstimmt. Auch die übrigen Zahlen von Weber sind kleiner als die meinigen, doch werden diese Differenzen wohl auch bei der exacten Berechnung der Weber'schen Versuche verschwinden. Folgende Zusammenstellung gibt die Werthe von k für die von mir untersuchten Flüssigkeiten, wobei sich meine Zahlen ungefähr auf die Temperatur 30° beziehen, während sich die Weber'schen auf die Temperatur 4° beziehen.

	k (Weber) (4°)	k (Graetz) (30°)	
Wasser	0,0745	0,0945	$\frac{g}{cm\ min.}$
Kupfervitriollösung .	0,0710	0,0922	
Alkohol	0,0292	0,0433	
Zinkvitriollösung . .	0,0711	0,0920	
Kochsalzlösung . . .	0,0692	0,0964	
Terpentinöl	—	0,0307	

Die angegebenen Versuche sollen nur die Anwendbarkeit der Methode zeigen, welche, wenn einmal eingerichtet, eine rasche und bequeme Bestimmung der Wärmeleitung von Flüssigkeiten ermöglicht.

Physikal. Inst. d. Univ. München, 15. Oct. 1882.

VI. *Ueber das Verhältniss der specifischen Wärmen bei Gasen und Dämpfen*[1]; *von P. A. Müller in Königsberg i. Pr.*

(Hierzu Taf. I Fig. 4.)

§ 1. Das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zu derjenigen bei constantem Volumen hat in der neueren Zeit durch die Aufstellung der mechanischen Wärmetheorie eine besondere Wichtigkeit erlangt. Die Werthe dieses Verhältnisses $\varkappa$, welche nur für wenige Stoffe nach verschiedenen Methoden hergeleitet sind, zeigen aber bedeutende Abweichungen, und es erscheint deshalb wohl wünschenswerth, diese Grösse durch eine andere Versuchsanordnung nochmals zu erforschen und für eine Anzahl von Gasen und Dämpfen festzustellen.

Hierzu will ich einen Apparat verwenden, welchen Assmann[2]) angegeben hat. Seit jener Abhandlung ist diese Methode unberücksichtigt geblieben, was wohl daran liegen mag, dass Assmann sagt, er hätte nur schlechte Resultate erzielt, aber sein Werth des Verhältnisses der specifischen Wärme für Luft stimmt mit dem jetzt als richtig angenommenen $\varkappa = 1{,}41$ innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler überein, und beruht seine Ansicht auf dem Vergleich seines Resultates mit den früheren Angaben anderer Beobachter.

Als Vortheile der Methode möchte ich anführen, dass nur die Schwingungszeit einer Flüssigkeitssäule zu beobachten

---

1) Auszug aus der Dissertation. Breslau 1882.

2) Assmann, Pogg. Ann. 85. p. 1. 1852.

ist, ferner, dass der Apparat die Abhängigkeit des Werthes $\varkappa$ vom Druck und der Temperatur zu berechnen gestattet, und nur eine Gasmenge von 2—3 l erforderlich ist, während doch Clément und Desormes 20 l und Röntgen sogar 70 l gebrauchten.

Als Nachtheil der Versuchsanordnung ist zu bezeichnen, dass sich nur solche Gase untersuchen lassen, welche die schwingende Flüssigkeitssäule, in meinem Falle Quecksilber, nicht angreifen, aber durch Anwendung verschiedener Flüssigkeiten wäre vielleicht auch dieser Uebelstand zu beseitigen.

Bevor ich zur Besprechung der Bestimmungsmethode von $\varkappa$ übergehe, fühle ich mich verpflichtet, Herrn Prof. O. E. Meyer für die gütige Unterstützung meiner Arbeit meinen grössten Dank auszusprechen.

§ 2. Denken wir uns eine ∪-förmig gebogene Glasröhre theilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt, so wird diese Flüssigkeit oscilliren müssen, wenn wir die Röhre durch einen Stoss aus ihrer Ruhelage entfernen, und wir können die Schwingungsdauer der Flüssigkeit bestimmen, falls die Glasröhre sogleich nach dem Stosse in ihre frühere Ruhelage zurückgeführt ist und selbst nicht mitschwingen kann.

Wenn wir nun die offenen Enden der Röhre durch Kugeln absperren und den ganzen Apparat auf dieselbe Art wie vorher bewegen, so wird sich die Schwingungsdauer der Flüssigkeitssäule ändern, weil das in den Kugeln enthaltene Gas durch die Schwingungen der Säule comprimirt und dilatirt wird und folglich durch die Compressionen und Dilatationen seinerseits den Bewegungen der Säule entgegenwirkt.

Betrachten wir diese Vorgänge im Apparat näher, so ergibt sich Folgendes:

Sei $A\ B\ C$ die Glasröhre und in diese die betreffende Flüssigkeit bis A und B gefüllt, so wird nach der mitgetheilten Bewegung dieselbe sich bis a in dem einen Schenkel heben und im anderen um ein gleiches Stück bis a^1 senken, wenn wir annehmen, dass der Querschnitt überall derselbe, gleich q sei. Nennen wir nun die Entfernung A bis $a^1 = x$ und l die Länge der ganzen Flüssigkeitssäule, D die Dichtigkeit der Flüssigkeit, ferner g die Beschleunigung der

Schwere, so ist $Aa^1 + Ba = ba = 2x$, und die bewegende Kraft wird $= -2gqxD$, und wir erhalten die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad lqD\frac{d^2x}{dt^2} = -2gqxD \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2gx}{l}.$$

Dieses ist aber die Pendelgleichung, deren Schwingungsdauer sich:

$$\text{(II)} \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi^2}{T^2} = \frac{2g}{l}$$

ergibt.

Denken wir uns nun die beiden Kugeln aufgesetzt, welche das Volumen V_1 und V_2 haben mögen, und sei in beiden der Anfangsdruck derselbe, so erscheint nach ertheiltem Impulse auch die Differenz der beiden Drucke p_1 und p_2 infolge der Compression und Dilatation als bewegende Kraft, und zwar weil sie auf den Querschnitt q wirkt, als:

$$-(p_1 - p_2)q,$$

folglich wird die Differentialgleichung:

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2gx}{l} = \frac{(p_1 - p_2)}{lD},$$

worin sich die Differenz $p_1 - p_2$ auf folgende Art bilden lässt:

Wenn wir annehmen, dass während der Compression oder Dilatation keine Wärme nach aussen übergeht, so gilt die bekannte Formel der mechanischen Wärmetheorie[1]):

$$p = P\left(\frac{V}{v}\right)^{\varkappa}$$

Wird keine Wärme von aussen bei meinen Ballons zugeführt, so ändert sich also der Druck in jedem einzelnen Ballon im umgekehrten Verhältniss der $\varkappa$. Potenz des Volumens.

Es sei im ersten Ballon:

zur Zeit $t = 0$,	der Druck P,	das Volumen V_1
$t = t$,	P_1	$v_1 = V_1 - qx$,

im zweiten Ballon:

für $t = 0$,	P	V_2,
$t = t$,	P_2	$v_2 = V_2 + qx$,

so ist nach jenem Gesetze:

1) Clausius, Mechan. Wärmetheorie. 2. Aufl. **1.** p. 66.

$$p_1 = P\left(\frac{V_1}{v_1}\right) = P\left(\frac{V_1}{V_1 - qx}\right)^{\varkappa} \text{ und}$$

$$p_2 = P\left(\frac{V_2}{v_2}\right)^{\varkappa} = P\left(\frac{V_2}{V_2 + qx}\right)^{\varkappa}.$$

Bisher galt p_1 und p_2 nur für einen Ballon bei den zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten der Compression und Dilatation, da aber diese Compression in dem einen Ballon zugleich mit einer Dilatation im anderen verbunden ist, so dürfen mit p_1 und p_2 auch die zu derselben Zeit herrschenden Drucke für beide Ballons bezeichnet werden, und (III) gilt nun für beide Kugeln.

Folglich wird die in Formel (III):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2gx}{l} - \frac{p_1 - p_2}{lD}$$

vorkommende Differenz:

$$p_1 - p_2 = P\left\{\left(\frac{V_1}{V_1 - xq}\right)^{\varkappa} - \left(\frac{V_2}{V_2 + xq}\right)^{\varkappa}\right\},$$

oder die rechte Seite nach Potenzen von x entwickelt:

$$p_1 - p_2 = P\left\{\left(1 + \frac{\varkappa q}{V_1}x + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}\frac{q^2}{V_1^2}x^2 + \dots\right) - \left(1 - \frac{\varkappa q}{V_1}x + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1.2}\frac{q^2}{V_2^2}x^2 - \dots\right)\right\}.$$

Vernachlässigen wir hier die Glieder mit den höheren Potenzen, so wird:

$$p_1 - p_2 = P\varkappa q\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)x = P\varkappa q\frac{V_1 + V_2}{V_1 . V_2}.$$

Führen wir hierin $P = \sigma g h$ ein, wo h die Höhe bezeichnet, welche in Millimetern Quecksilber dem herrschenden Druck entspricht, und σ die Dichtigkeit des Quecksilbers bedeutet, nehmen wir ferner als schwingende Flüssigkeit auch Quecksilber, so wird $D = \sigma$, und wir erhalten die Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gx}{l}\left\{2 + \varkappa h q\left(\frac{V_1 + V_2}{V_1 . V_2}\right)\right\}.$$

Nach Integration der beiden Formeln (I) und (IV) ergibt sich:

$$\text{(V)} \qquad \varkappa = \left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1\right)\frac{2\,V_1 . V_2}{qh\,(V_1 + V_2)}.$$

§ 3. Die Construction meines Apparates war folgende: Die ∪-förmige Glasröhre *A B* ist an ihren beiden Schenkeln mit Schliffen versehen, sodass die beiden Kugeln V_1 und V_2 sich leicht aufsetzen und entfernen lassen. An die beiden Schenkel sind die Hähne *d* und *e* angeschmolzen, während auf dem entgegengesetzten Punkte der Peripherie die Platindrähte *i* und i^1 durch Siegellack eingekittet wurden. Zwischen die Hähne *d* und *e* wurde durch Gummischläuche die Röhre *c* gefügt, an welche die Röhren *a*, *b* und das Manometer *f* angeschmolzen waren. Um den Apparat evacuiren zu können, wurde *a* mit einer Wasserluftpumpe verbunden, *b* diente zur Einleitung der zu untersuchenden Gase und Dämpfe. Jene wurden durch Kautschukschläuche direct aus dem Entwickelungsapparat nach *b* geführt, diese entwickelten sich in einem kleinen Fläschchen, welches angefüllt mit der betreffenden Flüssigkeit luftdicht an *b* gefügt war. In die Röhre *A B* wurde reines Quecksilber gegossen, dessen Kuppen die Enden der Platindrähte *i* und i^1 berührten, welche mit dem electrischen Registrirapparat in Verbindung gebracht waren.

Der ganze Apparat war auf einem Brett befestigt, welches um eine horizontale eiserne Axe in Schwingungen versetzt werden konnte. (Vgl. Fig. 4.)

Um stets dieselbe Ruhelage zu erhalten und zugleich nur das Quecksilber in der ∪-förmigen Röhre schwingen zu lassen, hatte ich am Fussboden eine Schraube befestigt, gegen die der Apparat durch ein seitlich angebrachtes Gewicht gedrückt wurde. Auf der anderen Seite war eine Schnur angebunden, welche ich über mehrere Rollen bis zu meinem Beobachtungsplatze leitete, sodass ich durch einen Zug an dieser dem Brett eine seitliche Bewegung ertheilen konnte, die durch das Gewicht an der anderen Seite sogleich wieder vernichtet wurde, während das Quecksilber in der Röhre dem Impulse folgend in seiner Bewegung verharrte, bis es durch die entgegengesetzt wirkenden Kräfte nach etwa 50 Schwingungen in seine Ruhelage zurückgeführt war.

Die Berechnung der in meiner Gleichung (V) vorkommenden Grössen geschah folgendermassen:

Als Constanten erscheinen q, V_1, V_2, als Variable T, T_2, h.

Da während meiner Beobachtungen die Röhre AB leider einige mal gesprungen ist, will ich hier nur die Werthe für den Apparat angeben, mit dem ich zuletzt beobachtet habe, und werde ich die anderen Angaben bei der Besprechung der betreffenden Gase mittheilen.

q der Querschnitt der Röhre AB an den Niveaustellen der Hg-Säule und innerhalb des Schwingungsgebietes wurde an zwei kleinen Theilen der Röhre bestimmt, die ich mir vor dem Anschmelzen der Schliffe hatte abschneiden lassen. Ich fand auf der einen Seite:

$q = 4{,}0471$ qcm, auf der anderen
$q = 3{,}9056$ qcm, als das Mittel

$q = 3{,}9763$ qcm.

Die Radien betrugen:

$r = 11{,}35$ mm
$r = 11{,}15$ mm, im Mittel

$r = 11{,}25$ mm.

V_1 und V_2 sind Volumina der beiden Kugeln nebst den betreffenden Stücken der Röhre AB[1]), welche von den Enden der Röhre bis zu den Kuppen der Quecksilbersäule reichen. V_1 und V_2 bestimmte ich durch Wägung mit H_2O und ausserdem durch Ausmessen vermittelst der Pipette, ich erhielt: $V_1 = 1180{,}95$ ccm, $V_2 = 1162{,}80$ ccm.

Die Bestimmung von T, der Schwingungsdauer der Quecksilbersäule bei offenen Schenkeln, T_2 derjenigen, falls beide Kugeln ausgesetzt waren, geschah mit Hülfe eines electrischen Registrirapparates.

Hier will ich noch erwähnen, dass ich die Grössen T und T_2 bis auf die Tausendstel einer Secunde genau erhalten habe.

Da ich die Abhängigkeit von der Temperatur für $\varkappa$ beobachten wollte, die Grösse meines Apparates aber nicht gestattete, ihn allein in einem abgesonderten Raume zu erwärmen, so variirte ich die Temperatur des Zimmers, und

1) Die Volumina der kleinen seitlichen Röhren bis zu den Hähnen d und e sind hierin schon mitenthalten.

zwar bewirkte ich Abkühlung dadurch, dass ich im Winter die Fenster während der Nacht geöffnet liess und dann am folgenden Tage Versuche anstellte, oder dass ich im Frühling bei geöffnetem Fenster vor Sonnenaufgang beobachtete. Die Erwärmung des Zimmers geschah durch Luftheizung und einen Hofmann'schen Gasofen, wodurch ich im Maximum 50° C. erhielt.

Zum Messen der Temperatur ϑ verwandte ich ein zwischen die Kugeln V_1 und V_2 gesetztes Thermometer, später jedoch führte ich in jede Kugel ein kleines Thermometer auf einem Glasstative ein. (Vgl. Fig. 4.)

Zur Variation des Druckes diente eine Wasserluftpumpe, welche mit der Röhre *a* in Verbindung stand. Da die Construction des Apparates die Anwendung von mehr als einer Atmosphäre ausschloss, so konnte ich nur kleinere Drucke benutzen. Die Ablesung geschah an dem Manometer *f*, für dessen Scala ich mir eine Correctionstabelle hergestellt hatte, und ich fand die Grösse h in meiner Formel aus dem abgelesenen Barometerstande H und der Angabe des Manometers h_1 gleich: $h = H \pm h_1$. Hierbei wurde natürlich H auf die Temperatur ϑ reducirt, welche bei dem betreffenden Versuche in den Kugeln herrschte.

In meiner Dissertation habe ich noch Correctionen anzubringen gesucht wegen der Reibung des Quecksilbers an der Wand der Glasröhre und wegen der Funken, welche an den Spitzen *i* und *i'* übersprangen, jedoch zeigte sich, dass sie in die Grenzen der Beobachtungsfehler fielen und also fortgelassen werden konnten.

§ 4. Es mag hier noch die allgemeine Bemerkung eingeschaltet werden, dass der Apparat vor der Beobachtung mehrere mal, meistens drei- bis viermal, mit dem betreffenden Gase gefüllt und wieder evacuirt wurde, sodass eine ungehörige Beimischung eines anderen Stoffes, der etwa vorher untersucht war, nicht möglich gewesen ist.

In den folgenden Tabellen enthält die erste Columne die Schwingungsdauer T bei offenen Schenkeln, die zweite den Werth T_2 bei geschlossenen Schenkeln, die dritte die Temperatur ϑ innerhalb der Kugeln, die vierte die dem

Druck entsprechende Quecksilberhöhe und die letzte den resultirenden Werth von $\varkappa$, dem Verhältniss der beiden specifischen Wärmen.

Luft.

Von der grossen Zahl der angestellten Versuche will ich nur die folgenden mittheilen, welche eine genügende Uebersicht über $\varkappa$ geben, zumal auch die anderen Beobachtungen dieselben Werthe zeigen und nur dienten, zu prüfen, ob nach der Untersuchung eines Stoffes die Brauchbarkeit des Apparates irgendwie gelitten hätte.

Für Luft war:

Tabelle I.

T Sec.	T_2 Sec.	ϑ^0 C.	h cm	$\varkappa$	T Sec.	T_2 Sec.	ϑ^0 C.	h cm	$\varkappa$
0,6307	0,5434	22,0	76,98	1,412	0,7484	0,6443	16,4	73,12	1,401
	0,5721		48,30	1,396		0,6739		61,75	1,401
0,6287	0,5428	13,5	75,95	1,408		0,6925		35,09	1,410
	0,5671		51,55	1,392	0,7484	0,6432	16,5	74,96	1,392
0,6317	0,5456	14,0	76,32	1,397		0,6552		64,18	1,399
	0,5753		45,95	1,401		0,6710		50,86	1,413
0,6299	0,5457	13,5	76,44	1,393	0,7492	0,6432	19,2	74,54	1,411
	0,5813		38,75	1,408	0,7457	0,6 44		70,89	1,403
0,6300	0,5432	12,0	76,32	1,416		0,6652		53,30	1,411
0,6318	0,5466	16,6	74,81	1,406	0,7491	0,6488	14,8	69,35	1,409
0,6312	0,5455	17,0	75,75	1,401		0,6640		56,50	1,416
0,6348	0,5484	10,7	75,09	1,414		0,6807	14,7	44,30	1,397
0,6309	0,5455	16,5	75,95	1,394		0,6954		33,40	1,407
0,6306	0,5461	18,5	74,20	1,407		0,6708	14,8	51,30	1,413
								Mittelwerth	1,4046

Während der ersten vierzehn Beobachtungen war:

$$V_1 = 1221{,}5 \text{ ccm}, \quad V_2 = 1194{,}6 \text{ ccm}, \quad q = 3{,}856 \text{ qcm},$$

bei den folgenden sieben Versuchen:

$$V_1 = 1180{,}95 \text{ ccm}, \quad V_2 = 1162{,}80 \text{ ccm}, \quad q = 3{,}9763 \text{ qcm},$$

und bei den letzten:

$$V_1 = 1175{,}60 \text{ ccm}, \quad V_2 = 1156{,}50 \text{ ccm}, \quad q = 3{,}9763 \text{ qcm}.$$

Die verwendete Luft war durch eine Flasche mit Kalilauge, eine solche mit concentrirter Schwefelsäure und ein Rohr mit Chlorcalcium geleitet worden.

Der gefundene Werth $\varkappa = 1,4046$ erscheint etwas kleiner als der sonst beobachtete 1,410, stimmt jedoch mit demjenigen von Röntgen 1,405 gut überein und weicht auch von den früheren Beobachtungen nicht bedeutend ab.

Eine Abhängigkeit des $\varkappa$ von der Temperatur oder dem Druck kann ich aus der Tabelle nicht schliessen, was ja auch mit den sonst bekannten Eigenschaften der Luft übereinstimmt.

Sauerstoff O_2.

Er wurde aus chlorsaurem Kali und Mangansuperoxyd entwickelt und durch Chlorcalcium und Schwefelsäure getrocknet.

Tabelle II.

$V_1 = 1221,5$ ccm, $V_2 = 1194,6$ ccm, $q = 3,856$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7472	0,6443	16,3	72,43	1,403		0,6964		31,59	1,410
	0,6524		65,23	1,409	0,7475	0,6432	20,5	73,73	1,401
	0,6616		57,96	1,400		0,6573		61,50	1,406
	0,6711	16,0	50,58	1,397		0,6645	20,4	55,93	1,399
	0,6831		41,56	1,393		0,6710		50,54	1,405
	0,6892	16,4	36,72	1,406		0,6853	20,6	39,96	1,401
								Mittelwerth	1,4025

Diese Zahl stimmt sehr gut mit anderen Beobachtungen überein, denn es fanden;

Regnault 1,402, Masson 1,401, Dulong 1,398.

Eine Variabilität mit Druck oder Temperatur ist nicht bemerkbar.

Kohlensäure CO_2.

Dieses Gas wurde entwickelt aus weissem schlesischen Marmor und Salzsäure, geleitet durch Flaschen mit Wasser, kohlensaurem Kali, schwefelsaurer Eisenlösung, durch zwei Flaschen mit einer Lösung von übermangansaurem Kali, und ∪ Röhren mit Holzkohle, getrocknet durch concentrirte Schwefelsäure und Chlorcalcium.

Tabelle III.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7493	0,6514	17,1	75,20	1,260		0,6995		34,63	1,260
	0,6569		69,54	1,269	0,6329	0,5537	33,0	75,89	1,265
	0,6665	16,8	61,24	1,266		0,5632		65,09	1,261
	0,6707		57,78	1,260		0,5722		55,19	1,268
	0,6781		51,20	1,266		0,5816	33,1	45,29	1,272
	0,6853		45,47	1,262		0,5927		34,79	1,261
	0,6911		40,73	1,265	0,7497	0,6481	33,7	78,43	1,265
	0,6985	16,7	34,78	1,271		0,6534		73,50	1,262
	0,7096	16,6	26,55	1,272		0,6603		66,85	1,268
0,7497	0,6521	9,5	74,48	1,268		0,6678		60,40	1,263
	0,6587		68,34	1,267		0,6735		55,22	1,270
	0,6657		62,30	1,263		0,6791	33,4	50,82	1,262
	0,6707	9,4	57,72	1,267		0,6856		45,30	1,266
	0,6775		51,99	1,266		0,6945		38,46	1,260
	0,6853		45,59	1,265		0,7013		33,12	1,265
	0,6916	9,6	40,50	1,268		0,7084		27,82	1,267
								Mittelwerth	1,2653

Bei dem 18. bis 22. Versuch war:

$V_1 = 1221{,}5$ ccm, $V_2 = 1194{,}6$ ccm, $q = 3{,}856$ qcm,

bei allen anderen aber:

$V_1 = 1175{,}6$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Die Werthe von $\varkappa$ zeigen im Maximum eine Abweichung von $^1/_2\,^0/_0$, und dürfte diese Tabelle für die Richtigkeit der Untersuchungsmethode überhaupt gewichtig sein.

Die Zahl $\varkappa = 1{,}2653$ ist in Uebereinstimmung mit anderen Werthen; denn es fanden:

Regnault 1,268 und Masson 1,274,

abweichende Resultate erhielten:

Cazin 1,291, Dulong 1,322 und Röntgen 1,305.

Worauf diese Abweichungen beruhen, ist nicht abzusehen. Eine Aenderung des Werthes $\varkappa$ mit der Temperatur oder dem Drucke ist nicht sichtbar.

Chlorwasserstoff HCl.

Er wurde entwickelt aus Steinsalz und Schwefelsäure, gewaschen durch H_2O und getrocknet durch H_2SO_4 und $CaCl_2$.

Tabelle IV.

$V_1 = 1175{,}6$ ccm, $V_2 = 1156{,}50$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7462	0,6374	18,8	78,49	1,418		0,6728	31,0	50,31	1,391
	0,6475		68,65	1,401		0,6887	30,6	38,57	1,387
	0,6552		61,92	1,407	0,7520	0,6428	41,0	76,19	1,396
	0,6634	18,9	55,61	1,401		0,6747		51,19	1,388
	0,6905		34,76	1,417		0,6862		42,19	1,399
0,7489	0,6424	33,4	75,36	1,396		0,6923	41,1	37,49	1,408
	0,6473		71,62	1,385		0,7010		32,00	1,381
	0,6556	31,7	64,53	1,385		0,7098	41,0	25,66	1,399
	0,6625	31,2	58,10	1,401					
								Mittelwerth	1,398

Dieser Werth weicht von den Beobachtungen Regnault's $\varkappa = 1{,}422$ ab, ist aber denjenigen Masson's $\varkappa = 1{,}392$ fast gleich, und es ist mir die Ursache des Fehlers von ca. 2,4 % nicht bekannt.

Bromwasserstoff HBr.

Er wurde entwickelt durch Auftropfen von Brom auf angefeuchteten rothen Phosphor, gewaschen durch Wasser, und durch eine Röhre mit feuchtem Phosphor und Glasscherben sowie eine Chlorcalciumröhre geleitet.

Tabelle V.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}50$ ccm. $q = 3.9763$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7501	0,6601	10,3	63,92	1,363		0,6563		66,54	1,367
	0,6638		59,92	1,356		0,6635		60,83	1,362
	0,6652	10,1	58,41	1,363		0,6684		56,42	1,368
	0,6776		49,58	1,350		0,6751	30,5	50,96	1,370
	0,6854		42,86	1,353		0,6846		43,97	1,360
0,7505	0,6468	18,8	75,24	1,351	0,7514	0,6480	37,8	74,12	1,363
	0,6501		71,66	1,362		0,6594		63,90	1,370
	0,6569		65,13	1,371		0,6720		53,72	1,366
	0,6791	18,9	47,54	1,363		0,6853		43,21	1,372
	0,6858		42,53	1,361		0,6922		39,19	1,366
	0,7038		29,47	1,365		0,7044		29,39	1,375
0,7512	0,6517	30,8	70,85	1,361					
								Mittelwerth	1,3647

Für HBr ist $\varkappa = 1{,}43$ von K. Strecker gefunden, und zeigt sich also eine grössere Abweichung.

Die Abweichungen vom Mittel betragen 1 % im Maximum und zeigen keine Regelmässigkeit, aus der sich eine Variabilität mit Druck und Temperatur folgern liesse.

Schweflige Säure SO_2.

Sie wurde entwickelt aus Kupfer und Schwefelsäure und geleitet durch Wasser und zwei Flaschen mit Schwefelsäure.

Tabelle VI.

$V_1 = 1221{,}5$ ccm, $V_2 = 1194{,}6$ ccm, $q = 3{,}856$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6345	0,5558	17,5	75,02	1,265		0,5992		27,08	1,257
	0,5655		64,82	1,252	0,6310	0,5523	16,5	75,95	1,258
	0,5740		55,22	1,258		0,5613		65,35	1,263
	0,5919		37,32	1,250		0,5699		56,15	1,259
0,6309	0,5518	15,5	76,88	1,252	0,6311	0,5494	33,7	79,81	1,252
	0,5602		66,98	1,255		0,5621		65,41	1,246
	0,5700		56,48	1,248		0,5723		53,71	1,256
	0,5783		47,18	1,267		0,5803		45,11	1,268
	0,5883		37,58	1,252		0,6020		24,61	1,256
								Mittelwerth	1,2563

Dieser Werth $\varkappa = 1{,}2563$ ist mit dem von Regnault gefundenen 1,256 congruent und differirt mit den Beobachtungen von Masson $\varkappa = 1{,}248$ und Cazin 1,262 nur um ca. 0,7%, eine Grösse, die wohl unter die Beobachtungsfehler fallen dürfte.

Eine Veränderlichkeit mit Druck oder Temperatur ist nicht zu bemerken.

Schwefelwasserstoff H_2S.

H_2S wurde hergestellt aus Schwefeleisen und verdünnter Schwefelsäure, geleitet durch Wasser und Chlorcalcium.

Tabelle VII.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}50$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7485	0,6630	17,4	63,00	1,279		0,6619		63,48	1,272
	0,6702		56,77	1,279		0,6702		56,44	1,270
	0,6755		51,98	1,285		0,6864	30,4	42,70	1,279
	0,6842	17,5	45,26	1,274		0,6920		38,54	1,272
	0,6996		33,37	1,272		0,6989		33,31	1,271
	0,7094		25,90	1,284	0,7485	0,6545	39,5	71,36	1,279
0,7190	0,6576	10,3	68,20	1,277		0,6654		61,83	1,274
	0,6632		62,99	1,282		0,6750		53,20	1,283
	0,6725	10,2	55,57	1,270		0,7010		33,00	1,272
	0,6801		49,01	1,272		0,6572	40,0	69,03	1,276
0,7475	0,6475	30,3	76,74	1,271		0,6667		60,34	1,282
	0,6538		70,52	1,278		0,6736		55,00	1,270
								Mittelwerth	1,2759

Diese Zahl weicht sowohl von dem Werthe Regnault's 1,312 als auch dem Masson's 1,258 bedeutend ab, ist aber sehr nahe dem Mittelwerth beider. Eine Variation mit Druck oder Temperatur zeigt sich nicht.

Schwefelkohlenstoff CS_2.

Käuflicher Schwefelkohlenstoff wurde durch Schütteln mit Quecksilber gereinigt, dann destillirt und besass den Siedepunkt bei 46° C.

Tabelle VIII.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}50$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7492	0,7173	21,3	22,31	1,195
	0,7247		16,99	1,189
	0,7176		22,15	1,192
	0,7241		17,34	1,199
0,7489	0,6967	29,8	39,64	1,184
	0,6997		36,15	1,180
	0,7069	30,0	30,36	1,182
	0,7143		24,33	1,194
	0,7224	30,2	18,29	1,198
	0,7034	30,0	33,05	1,185
	0,7117		26,36	1,194
	0,7205		19,80	1,189
0,7489	0,6818	39,7	50,49	1,199
	0,6895		44,63	1,180
	0,6952		39,90	1,180
	0,7034	39,8	33,15	1,180
	0,6863		47,14	1,186
	0,6923	39,7	42,16	1,188
	0,6988		36,52	1,193
			Mittelwerth	1,1890

Für diesen Dampf ist die Grösse $\varkappa$ bisher noch nicht bestimmt gewesen, der gefundene Werth 1,189 weicht von der nach Regnault's Beobachtungen berechneten Zahl 1,197 um 0,8 % ab, jedoch finden sich in der Tabelle auch mehrere Werthe, die nur um 0,2 % von jenem abweichen.

Ammoniak NH_3.

Er wurde entwickelt aus Salmiak und Aetzkalk, geleitet durch Wasser und Kalihydrat.

Tabelle IX.

$V_1 = 1221{,}5$ ccm, $V_2 = 1194{,}6$ ccm, $q = 3{,}856$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6338	0,5519	17,0	75,64	1,262		0,5758		53,24	1,259
	0,5657		63,54	1,259		0,5842		44,54	1,262
	0,5740		54,34	1,264	0,6331	0,5576	17,5	71,82	1,260
	0,5833		44,54	1,269		0,5647		64,02	1,258
	0,5940		34,54	1,259		0,5737		54,12	1,257
0,6343	0,5555	18,0	75,51	1,260		0,5835		44,02	1,261
	0,5649		64,71	1,262		0,5946		33,32	1,257
	0,5737		55,01	1,267		0,5551	19,0	74,36	1,266
0,6340	0,5545	10,7	75,79	1,269		0,5739		53,76	1,264
	0,5655		63,99	1,258		0,5940		34,46	1,257
	0,5742		54,29	1,263		0,5548		74,36	1,271
0,6344	0,5560	30,1	75,04	1,261	0,6340	0,5650	20,2	64,25	1,261
	0,5657		63,84	1,264		0,5944		34,05	1,267
								Mittelwerth	1,2622

Der gefundene Werth 1,2622 weicht von den bisherigen Beobachtungen ebenso bedeutend ab, wie diese voneinander, denn es erhielt:

Regnault 1,300, Cazin 1,328, Masson 1,239.

Eine Veränderung mit Temperatur oder Druck findet nicht statt.

Methan CH_4.

Dieses Gas wurde durch Erhitzen eines Gemenges aus essigsaurem Natron und Natronkalk entwickelt und durch concentrirte Schwefelsäure, Wasser und Chlorcalcium geleitet.

Tabelle X.

$V_1 = 1239{,}5$ ccm, $V_2 = 1212{,}5$ ccm, $q = 3{,}856$ qcm.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6307	0,5489	18,5	76,21	1,332	0,6307	0,5504	30,0	76,21	1,308
	0,5603		65,81	1,290		0,5602		64,89	1,309
	0,5701		54,71	1,299		0,5811		42,54	1,330
0,6306	0,5491	19,0	76,63	1,323		0,5976		27,64	1,311
	0,5679		55,63	1,331		0,6103		16,39	1,320
	0,5870		36,93	1,326				Mittelwerth	1,316

Eine gute Uebereinstimmung zeigt sich mit der Zahl von Masson 1,315, dagegen findet Regnault 1,265; die Abweichungen vom Mittel betragen circa 1 Proc.

Methylchlorid CH_3Cl.

In eine kochende Lösung von Chlorzink in Methylalkohol wurde trockenes Salzsäuregas geleitet, das freie Methylchlorid gelangte durch einen Rückflusskühler und eine Flasche mit Wasser in einen Gasometer und von dort durch ein Chlorcalciumrohr in den Apparat. (Tab. XI).

Tabelle XI.

T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6290	0,5528	17,2	77,70	1,189	0,7485	0,6550	17,3	74,92	1,202
	0,5605		68,10	1,192		0,6627		67,65	1,200
	0,5707		56,30	1,196		0,6660		64,52	1,201
	0,5804		45,40	1,204		0,6709		60,52	1,191
	0,5907		34,80	1,206		0,6758		55,67	1,199
	0,6015		24,60	1,193		0,6815		50,42	1,205
0,6280	0,5609	16,1	65,51	1,211		0,6876		45,52	1,196
	0,5708		55,11	1,196		0,6949		39,42	1,197
	0,6084		17,01	1,202		0,6571		75,82	1,204
								Mittelwerth	1,1991

Für die Richtigkeit dieses Werthes spricht der Umstand, dass die Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom Mittel sehr gering sind, obgleich zwei verschiedene Volumina verwendet wurden, da ein Apparat inzwischen gesprungen war.

Bei den ersten neun Beobachtungen war:

$V_1 = 1221{,}5$ ccm, $V_2 = 1194{,}6$ ccm, $q = 3{,}856$ qcm

bei den folgenden:

$V_1 = 1180.95$ ccm, $V_2 = 1162{,}8$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm

Frühere Beobachtungen zum Vergleich liegen nicht vor.

Chloroform $CHCl_3$.

Es wurde diese Chlorverbindung aus einer hiesigen Handlung bezogen, dann mit kohlensaurem Kali, später mit Phosphorsäureanhydrid versetzt und fractionirt. Die verwendete Flüssigkeit hatte ihren Siedepunkt bei 61—62 C.

Wegen der Höhe dieses Punktes konnte ich den Dampf nur bei geringem Druck und hoher Temperatur beobachten, da er sich sehr leicht condensirte. (Tab. XII).

Tabelle XII.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten sechs Beobachtungen war $T = 0{,}7478$, bei den folgenden $T = 0{,}7499$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7255	22,5	16,55	1,105	0,7340		11,57	1,113
0,7291		13,81	1,100	0,7234	38,1	19,87	1,102
0,7325		11,23	1,099	0,7295		14,94	1,113
0,7257	22,6	16,36	1,108	0,7330		12,25	1,119
0,7316		11,82	1,112	0,7230	38,5	20,06	1,108
0,7356		8,80	1,114	0,7274		16,23	1,112
0,7218	37,2	20,82	1,118	0,7311		13,71	1,116
0,7283		15,90	1,111			Mittelwerth	1,110

Nach den Beobachtungen von Regnault ist $\varkappa = 1{,}119$, differirt also mit dem vorstehenden um ca. 1 Proc. Hier scheint sich eine Abhängigkeit vom Druck zu zeigen, denn bei mehreren Angaben wächst der Werth von $\varkappa$ mit abnehmendem Druck.

Methylen bichloratum CH_2Cl_2.

Das Methylenchlorid war von Trommsdorf bezogen, wurde mit kohlensaurem Kali versetzt und mit Phosphorsäureanhydrid geschüttelt. Bei der Destillation zeigte es einen Siedepunkt von 45° C.

Tabelle XIII.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten acht Beobachtungen war $T = 0{,}7473$, bei den folgenden $T = 0{,}7478$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7044	24,3	33,61	1,123	0,6879		47,71	1,116
0,7053		32,41	1,109	0,6912		44,56	1,121
0,7072		30,50	1,121	0,6948	40,8	41,67	1,115
0,7106	24,4	28,00	1,110	0,6971		39,28	1,124
0,7120		26,70	1,117	0,7008		35,45	1,147
0,7149	24,3	24,48	1,112	0,7050	41,6	31,83	1,150
0,7159		23,63	1,113	0,7106		28,09	1,119
0,7177	24,2	21,98	1,126	0,7213		19,94	1,101
0,6849	39,1	50,82	1,109	0,7242	42,0	17,40	1,114
						Mittelwerth	1,1192

Eine Abhängigkeit von Druck oder Temperatur ist vielleicht ersichtlich.

Aethylen C_2H_4.

Dieses Gas wurde entwickelt aus Alkohol und Schwefelsäure, geleitet durch einen Rückflusskühler, Wasser und Kalilauge in einen Gasometer; von dort gelangte es durch Schwefelsäure, Kalilauge und Chlorcalcium in den Apparat.

Tabelle XIV.

$V_1 = 1180{,}95$ ccm, $V_2 = 1162{,}8$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten sieben Beobachtungen war $T = 0{,}7484$, bei den folgenden sieben war $T = 0{,}7472$ und bei den letzten $T = 0{,}7483$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6506	15,3	76,83	1,240	0,6935		37,84	1,251
0,6625	15,4	65,63	1,241	0,7060		28,14	1,256
0,6729	15,3	56,43	1,238	0,7171		20,34	1,240
0,6832		47,23	1,247	0,6498	29,5	77,39	1,243
0,6980	15,4	35,73	1,239	0,6625		65,79	1,235
0,7136		23,63	1,247	0,6714		57,39	1,243
0,7257		15,03	1,246	0,6893		42,39	1,241
0,6485	16,7	77,34	1,248	0,7045		30,29	1,246
0,6604		66,59	1,245	0,7114		25,39	1,234
0,6670		60,34	1,244	0,7257		14,99	1,243
0,6804		48,84	1,242				
						Mittelwerth	1,243

Der Vergleich mit früheren Beobachtungen ergibt eine Uebereinstimmung bis auf 1 Proc. mit Masson 1,257 und Cazin 1,257, dagegen weicht der Werth von Regnault 1,125, um ca. 12 Proc. ab.

Ein Einfluss der Temperatur oder des Druckes zeigt sich nicht.

Aldehyd C_2H_4O.

In Acetaldehyd der Fabrik von Trommsdorf wurde trockenes Ammoniak geleitet, woraus Acetaldehydammoniak krystallisirte. Dieses Salz wurde durch Schwefelsäure zersetzt und die Flüssigkeit dann destillirt, wobei ein Siedepunkt von 21° C. sich zeigte.

Tabelle XV.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm,
$T = 0{,}74776$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6765	22,7	57,46	1,131	0,7023	—	34,19	1,144
0,6826		51,88	1,130	0,7068		30,20	1,158
0,6865		48,16	1,133	0,7113		26,59	1,160
0,6933		42,37	1,130	0,7166		22,40	1,163
0,6977		38,18	1,140	0,7233		17,26	1,166
						Mittel	1,1455

Für diesen Dampf liegen frühere Beobachtungen nicht vor, und deshalb ist es um so mehr zu bedauern, dass durch ein Versehen ein Theil meiner Flüssigkeit unbrauchbar wurde, sodass ich nur jene zehn Versuche anstellen konnte. Aus ihnen folgt eine deutliche Abhängigkeit der Grösse $\varkappa$ vom Druck, und es erscheint mir aus dieser Ursache die Angabe des Mittels $\varkappa = 1.1455$ etwas unrichtig.

Aethylchloroform $C_2H_3Cl_3$.

Diese Substanz wurde mit kohlensaurem Kali versetzt und fractionirt, in Verwendung kam der Theil, welcher den Siedepunkt bei 71—72° C. besass.

Tabelle XVI.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm,
$T = 0{,}7477$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7225	44,3	19,96	1,043	0,7263	43,5	17,06	1,029
0,7252		17,83	1,040	0,7276		15,88	1,037
0,7300		13,84	1,038	0,7316		12,58	1,039
0,7347	44,1	10,11	1,038	0,7347	43,7	10,12	1,037
0,7380		7,54	1,031	0,7374		8,00	1,039
						Mittel	1,0371

Eine grössere Variation des Druckes oder der Temperatur gestattete die Höhe des Siedepunktes nicht, und die Abweichungen der angeführten Ziffern sind wohl als Beobachtungsfehler anzusehen.

Frühere Angaben liegen nicht vor.

Aethylchlorid C_2H_5Cl.

Die kalte Lösung von Zinkchlorid in Alkohol wurde durch Chlorwasserstoff gesättigt und dann erwärmt. Das gebildete Aethylchlorid gelangte durch Wasser und Chlorcalcium in ein Gefäss, welches in einer Kältemischung stand und nach der Füllung zugeschmolzen wurde. Dieses Gefäss wurde dann zum Versuch direct am Apparat befestigt.

Tabelle XVII.

$V_1 = 1180,95$ ccm, $V_2 = 1162,8$ ccm, $q = 3,9763$ qcm.

Bei den ersten neun Beobachtungen war $T = 0,7485$, bei den folgenden $T = 0,7496$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6571	21,2	78,40	1,117	0,6589	29,5	78,00	1,111
0,6692		66,10	1,117	0,6701		65,65	1,127
0,6768		59,20	1,109	0,6768		59,05	1,130
0,6822		53,40	1,122	0,6828		54,00	1,119
0,6881		48,50	1,111	0,6870		49,90	1,125
0,6923		44,50	1,116	0,6924		45,40	1,115
0,6992		37,90	1,131	0,6987		39,50	1,125
0,7046		32,90	1,147	0,7036		34,80	1,142
0,7122		26,60	1,153	0,7109		28,70	1,146
						Mittel	1,1257

Der Werth 1,1257 differirt mit demjenigen von Regnault 1,126 um ca. 0,03 Proc., bestätigt also dessen Resultat.

Eine Variation mit abnehmendem Druck scheint sich zu zeigen.

Aethylen bichloratum $C_2H_4Cl_2$.

Diese Kohlenstoffverbindung wurde mit kohlensaurem Kali versetzt und fractionirt, der verwendete Theil besass den Siedepunkt bei 84—85° C.

Tabelle XVIII.

$V_1 = 1175,60$ ccm, $V_2 = 1156,5$ ccm, $q = 3,9763$ qcm, $T = 0,7467$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7345	42,2	9,03	1,090	0,7409	42,2	4,25	1,092
0,7380		6,46	1,072	0,7324		10,59	1,098
0,7313		11,50	1,082	0,7365	42,1	7,60	1,083
0,7345	42,3	9,03	1,089	0,7403		4,72	1,079
0,7386		5,90	1,094				
						Mittel	1,0854

Regnault hat für diesen Dampf den Werth 1,097 gefunden, also 1 Proc. grösser als das obige Mittel, und vermuthe ich, dass dieses in den Beobachtungsfehlern begründet ist, die bei meiner Versuchsanordnung mit Abnahme des Druckes wachsen, weil T^2/T_2^2 dann sehr klein wird, und der Einfluss der letzten Ziffern von T und T_2 wächst.

Methyläther C_2H_6O.

Beim Erhitzen von Schwefelsäure und Methylalkohol auf 140° C. entwickelte sich das Gas und gelangte durch einen Rückflusskühler in concentrirte Schwefelsäure, welche es absorbirt. Bei dem Zutröpfeln von Wasser wurde es frei, und erreichte durch Kalilauge und Chlorcalcium den Apparat.

Tabelle XIX.

$V_1 = 1180{,}95$ ccm, $V_2 = 1162{,}8$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten acht Beobachtungen war $T = 0{,}7478$, bei den folgenden $T = 0{,}7488$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,6604	5,8	75,19	1,1063	0,6599	30,1	75,98	1,1138
0,6660		69,39	1,1073	0,6648		70,83	1,1152
0,6709	5,7	64,59	1,1062	0,6703	30,2	65,58	1,1110
0,6807	5,8	54,99	1,1093	0,6756		60,48	1,1106
0,6849		51,09	1,1082	0,6808	30,25	55,18	1,1177
0,6910	5,9	45,49	1,1095	0,6912		45,98	1,1090
0,7167	5,8	23,59	1,1080	0,7175	30,2	23,58	1,1091
0,7199		21,19	1,1035	0,7039		34,68	1,1152
				0,7110	30,3	28,81	1,1109
		Mittel	1,1072	0,7244		17,95	1,1172
						Mittel	1,1127

Bei diesem Gase zeigt sich die Eigenthümlichkeit, dass die Grösse $\varkappa$ mit zunehmender Temperatur grösser wird, dagegen vom Druck unabhängig ist.

Frühere Beobachtungen zum Vergleichen liegen nicht vor.

Methylal $C_3H_8O_2$.

Diese Kohlenwasserstoffverbindung war von Trommsdorf bezogen, wurde mit kohlensaurem Kali, Phosphorpentoxyd versetzt und fractionirt. Der verwendete Theil besass den Siedepunkt bei 41—42° C.

Tabelle XX.

$V_1 = 1175{,}60$ ccm, $V_2 = 1156{,}5$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten vier Versuchen war $T = 0{,}7501$, bei den folgenden fünf dann $T = 0{,}7516$ und bei den übrigen $T = 0{,}7503$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7270	12,7	17,75	1,067	0,7095	37,3	32,05	1,082
0,7305		14,78	1,072	0,7130		29,02	1,084
0,7255		19,09	1,063	0,7176		25,17	1,086
0,7309		14,63	1,068	0,7238		19,88	1,099
				0,7070		34,16	1,081
		Mittel	1,065	0,7128	36,8	29,08	1,080
				0,7268		17,41	1,104
0,7167	22,5	27,11	1,081	0,6981		42,04	1,082
0,7230		22,08	1,074	0,7027	37,2	37,69	1,089
0,7283		17,85	1,069	0,7079		32,36	1,118
0,7285		17,53	1,079	0,7141		28,17	1,082
0,7315		15,28	1,071	0,7202		22,83	1,094
		Mittel	1,075	0,6764	42,1	62,44	1,081
				0,6874		51,62	1,087
				0,6944		45,45	1,080
				0,7002		39,51	1,099
				0,7066		33,91	1,101
				0,7137		28,39	1,085
				0,7196		23,59	1,080
						Mittel	1,094

Das Methylal zeigt in der Tabelle 3 verschiedene Mittelwerthe, und zwar wächst wieder $\varkappa$ mit steigender Temperatur, vom Druck dagegen erscheint die Grösse $\varkappa$ unabhängig.

Frühere Beobachtungen sind nicht vorhanden.

Aethyläther $C_4H_{10}O$.

Gewöhnlicher Schwefeläther wurde mit destillirtem Wasser geschüttelt, durch kohlensaures Kali entwässert, destillirt, mit metallischem Natrium versetzt und zeigte beim Fractioniren 35° C.; durch eine Chlorcalciumröhre gelangte er in den Apparat.

Tabelle XXI.

$V_1 = 1180{,}95$ ccm, $V_2 = 1162{,}8$ ccm, $q = 3{,}9763$ qcm.

Bei den ersten fünf Beobachtungen war $T = 0{,}7489$, bei den folgenden $T = 0{,}7502$.

T_2	ϑ	h	$\varkappa$	T_2	ϑ	h	$\varkappa$
0,7142	22,5	28,64	1,024	0,6807		61,72	1,024
0,7187		24,76	1,023	0,6875	45,4	54,60	1,029
0,7219		22,04	1,017	0,6946		47,35	1,036
0,7266		17,64	1,039	0,7013	45,4	41,55	1,023
0,7314	23,0	13,74	1,041	0,7072	45,5	35,55	1,038
0,6693	45,4	73,97	1,020	0,7123		31,37	1,026
0,6734		69,84	1,017	0,7188	45,4	25,38	1,036
0,6796	45,3	62,60	1,027	0,7299		15,96	1,040
						Mittel	1,0287

Bei diesem Dampf zeigt sich die Abhängigkeit der Grösse $\varkappa$ von der Temperatur nicht so deutlich wie beim Methylal, sie scheint aber dennoch vorhanden zu sein und würde wohl bei einer grösseren Temperaturdifferenz mehr hervortreten.

Nach dieser Angabe der Resultate für die einzelnen Gase und Dämpfe will ich in einer neuen Tabelle alle gefundenen Mittelwerthe zusammenstellen und einige allgemeine Bemerkungen hinzufügen.

In der ersten Columne stehen die Namen der betreffenden Stoffe, in der zweiten ihre chemischen Zeichen, in der dritten die Atomzahlen, nach welchen die Gase in dieser Tabelle geordnet sind. Die vierte und fünfte Columne enthält die Druckhöhen, die sechste und siebente die Temperatur und die achte den gefundenen Werth von $\varkappa$.

Bei Druck und Temperatur gebe ich das Maximum und Minimum an, für welches die betreffende Zahl $\varkappa$ gilt; wo $\varkappa$ variirt, sind besondere Horizontalreihen verwendet.

Unter den Resultaten von $\varkappa$ herrscht die Gesetzmässigkeit, dass sie mit steigender Atomzahl abnehmen, Ausnahmen ergeben sich jedoch mehrere.

Die Grenzwerthe, welche Pilling[1]) für das Verhältniss $\varkappa$ in seiner Abhängigkeit von der Atomzahl berechnet, gelten nach den vorstehenden Beobachtungen nicht für alle Gase mit zwei Atomen, denn die Verbindungen des Chlors und Broms zeigen zu kleine Angaben, was von Strecker[2]) ebenfalls für Chlor, Brom, Jod selbst beobachtet ist. Dieser Ein-

1) Pilling, Ueber die Beziehung der Wärmecapacität. Jena 1876.
2) Strecker, Wied. Ann. **13.** p. 20. 1881.

Tabelle XXII.

Name	Chem. Zeichen	Atomzahl	Druckhöhe Max.	Druckhöhe Min.	Temperatur Max.	Temperatur Min.	$\varkappa$
Luft			76,98	33,40	22,0	12,0	1,4062
Sauerstoff	O_2	2	73,73	31,59	20,6	16,4	1,4025
Chlorwasserstoff . .	HCl	2	78,49	25,66	41,1	18,8	1,3980
Bromwasserstoff . .	HBr	2	75,24	29,39	37,8	10,1	1,3647
Kohlensäure . . .	CO_2	3	75,89	27,82	33,7	9,4	1,2653
Schweflige Säure .	SO_2	3	79,81	24,61	33,7	15,5	1,2562
Schwefelwasserstoff .	H_2S	3	76,74	25,90	40,0	10,2	1,2759
Schwefelkohlenstoff .	CS_2	3	70,49	16,99	39,8	21,3	1,1890
Ammoniak	NH_3	4	75,64	33,32	30,1	10,7	1,2622
Methan	CH_4	5	76,63	16,39	30,0	18,5	1,3160
Methylchlorid . . .	CH_3Cl	5	77,70	17,01	17,3	16,1	1,1991
Methylenchlorid . .	CH_2Cl_2	5	50,82	17,40	42,0	24,2	1,1192
Chloroform	$CHCl_3$	5	20,82	8,80	38,5	22,5	1,1100
Aethylen	C_2H_4	6	77,39	14,99	29,5	15,3	1,2430
Acetaldehyd . . .	C_2H_4O	7	57,46	17,26	22,7	22,7	1,1455
Aethylchlorid . . .	C_2H_5Cl	8	78,40	26,60	29,5	21,2	1,1257
Aethylenchlorid . .	$C_2H_4Cl_2$	8	11,50	4,72	42,3	42,1	1,0854
Methylchloroform .	$C_2H_3Cl_3$	8	19,96	8,00	44,3	43,5	1,0371
Methyläther . . .	C_2H_6O	9	75,19	21,19		5,7	1,1072
			75,98	17,95	30,3		1,1127
Methylal	$C_3H_8O_2$	13	17,75	14,63		12,7	1,0650
			27,11	15,28		22,5	1,0750
			62,44	17,41	42,1	36,8	1,0940
Aethyläther . . .	$C_4H_{10}O$	15	73,97	13,74	45,4	22,5	1,0288

fluss des Chlors zeigt sich recht deutlich bei Methylchlorid, Methylenchlorid und Chloroform, bei welchen trotz gleicher Atomzahl der Ersatz je eines Atoms H durch Cl ein sichtbares Sinken des Werthes von $\varkappa$ bewirkt. Ebenso erfolgt bei Aethylchlorid, Aethylenchlorid und Methylchloroform, welche je acht Atome besitzen, durch denselben Ersatz ein Fallen der Grösse $\varkappa$ von 1,1257 auf 1,0854 und 1,0370, d. h. $\varkappa$ nimmt stets um vier Einheiten in der dritten Decimale ab.

Ob Jodverbindungen dasselbe Verhalten zeigen, konnte ich nicht untersuchen, weil Quecksilber den Jodwasserstoff zersetzt.

Eine ähnliche Wirkung wie Chlor, Brom, Jod übt auch

die Ersetzung des Wasserstoffs durch Schwefel aus, da sich für Schwefelkohlenstoff kleinere als die von der Theorie geforderten Werthe ergeben haben.

Von den anderen Gasen besitzen Methan und Aethylen zu grosse Werthe, also gelten für sie nicht die Annahmen von Pilling, obgleich sie zu den permanenten Gasen gehören, und es erscheint zweifelhaft, ob jene Hypothese gestattet ist.

Für alle Dämpfe liegt $\varkappa$ unterhalb jener Grenzwerthe und zeigt meistens eine Aenderung mit Druck und Temperatur, und zwar ein Wachsen.

Mit zunehmender Temperatur geschieht dieses z. B. bei Methylal und Methyläther, mit abnehmendem Druck bei Chloroform und Aldehyd. Dieses mag vielleicht darin begründet sein, dass ein Sinken des Drucks und ein Steigen der Temperatur eine Dissociation des Molecüls bewirken und dadurch die Dämpfe dem idealen Gaszustande näher führen. Nun will ich noch die Werthe für die verschiedenen Arten der Energie berechnen, die sich in Gasen und Dämpfen zeigen.

Im Anschluss an die von O. E. Meyer gewählten Bezeichnungen sind folgende Gleichungen zu verwenden:

$$\frac{K}{H} = \tfrac{3}{2}(\varkappa - 1), \qquad \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{H}{K} - 1, \qquad \frac{\mathfrak{e}}{E} = \frac{1}{\mathfrak{n}}\frac{\mathfrak{E}}{E},$$

wo K die kinetische Energie des Molecüls in der Volumeneinheit, H die gesammte calorische Energie, E die Energie der Schwerpunktsbewegung eines Molecüls, $\mathfrak{E}$ die mittlere Energie aller $\mathfrak{n}$-Atome eines Molecüls und $\mathfrak{e}$ der Mittelwerth der Energie eines einzigen Atoms bedeuten.

Die folgende Tabelle enthält ausser diesen drei Verhältnissen, welche nach den von mir gefundenen Werthen von $\varkappa$ berechnet sind, noch die Angaben von $\mathfrak{e}/E$, welche O. E. Meyer[1]) aus Beobachtungen von Regnault theoretisch bestimmt hat, und in der letzten Columne die Differenz dieser beiden Verhältnisse.

---

1) O. E. Meyer, Theorie der Gase. p. 94.

Tabelle XXIII.

Name	Chem. Zeichen	Atomzahl	$\varkappa$	$\frac{K}{H}$	$\frac{\mathfrak{E}}{E}$	beob. $\frac{\mathfrak{e}}{E}$	ber.	Differenz
Luft			1,4062	0,6093	0,641			
Sauerstoff	O_2	2	1,4025	0,6037	0,656	0,328	0,33	−0,002
Chlorwasserstoff . .	HCl	2	1,3930	0,5970	0,675	0,337	0,29	+0,047
Bromwasserstoff . .	HBr	2	1,3647	0,5470	0,828	0,414	—	—
Kohlensäure . . .	CO_2	3	1,2653	0,3979	1,513	0,504	0,51	−0,006
Schweflige Säure .	SO_2	3	1,2563	0,3844	1,601	0,534	0,54	−0,006
Schwefelkohlenstoff .	CS_2	3	1,1890	0,2835	2,527	0,842	0,77	+0,072
Schwefelwasserstoff .	H_2S	3	1,2759	0,4138	1,416	0,472	0,37	+0,102
Ammoniak	NH_3	4	1,2622	0,3933	1,542	0,385	0,31	+0,075
Methan	CH_4	5	1,3160	0,4740	1,110	0,222	0,30	−0,078
Methylchlorid . . .	CH_3Cl	5	1,1991	0,2986	2,348	0,469	—	—
Methylenchlorid . .	CH_2Cl_2	5	1,1192	0,1788	4,593	0,919	—	—
Chloroform	$CHCl_3$	5	1,1100	0,1650	5,060	1,012	0,92	+0,092
Aethylen	C_2H_4	6	1,2430	0,3645	1,744	0,291	0,39	−0,099
Aldehyd	C_2H_4O	7	1,1455	0,2182	3,582	0,512	—	—
Aethylchlorid . . .	C_2H_5Cl	8	1,1257	0,1886	4,304	0,538	0,53	+0,008
Aethylenchlorid . .	$C_2H_4Cl_2$	8	1,0854	0,1281	6,808	0,851	0,74	+0,111
Methylchloroform .	$C_2H_3Cl_3$	8	1,0371	0,0557	16,953	2,119	—	—
Methyläther . . .	C_2H_6O	9	1,1072	0,1608	5,219	0,579	—	—
		9	1,1127	0,1690	4,915	0,546	—	—
Methylal	$C_3H_8O_2$	13	1,0650	0,0975	9,257	0,712	—	—
		13	1,0750	0,1125	7,889	0,607	—	—
		13	1,0940	0,1410	6,092	0,469	—	—
Aethyläther . . .	$C_4H_{10}O$	15	1,0287	0,0431	22,202	1,480	0,68	+0,800

Die Werthe von $\mathfrak{e}/E$, sind fast alle kleiner als Eins, wie es die Theorie verlangt, nur Chloroform, Methylchloroform und Aethyläther weichen ab. Hiervon mag wohl theils das Chlor die Ursache sein, welches sich auch sonst schon abweichend gezeigt hat, theils der Umstand, dass diese drei Stoffe nicht Gase, sondern Dämpfe sind und also für dieselben die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr gelten. Dieselben zwei Gründe dürften auch wohl für die Stoffe anzunehmen sein, welche wie Schwefelkohlenstoff, Methylenchlorid und Aethylenchlorid einen Werth nahe an Eins zeigen, zumal beim Aethyläther ein Wachsen von $\varkappa$ mit abnehmendem Druck auftritt. Es nähert sich also dieser Dampf dem Gaszustande, was auch aus dem Werthe $\varkappa = 1{,}040$ und

$e/E = 1{,}111$ hervorgeht, welcher dem von der Theorie geforderten und also nur für den Gaszustand gültigen $e/E = 0{,}68$ nahe kommt.

Die Beobachtungen bestätigen also das von O. E. Meyer nach der Theorie aufgestellte Gesetz:

In Gasen mit mehratomigen Molecülen ist die mittlere Energie eines Atoms immer kleiner als die Energie des Schwerpunktes der Molecüle.

VII. *Das Product innerer Reibung und galvanischer Leitung der Flüssigkeiten ist constant in Bezug auf die Temperatur; von L. Grossmann.*

Assistent an der Forstacademie zu Eberswalde.

Schon Wiedemann[1]) fand, dass bei erwärmten Lösungen zwischen den Temperaturen 20—70° die Zähigkeit und der Widerstand einiger von ihm untersuchten Flüssigkeiten nahezu in gleichen Verhältnissen stehen. Um diese Frage eingehender experimentell zu erörtern, unternahm Grotrian[2]) die Bestimmung der inneren Reibungscoëfficienten mehrerer Salzlösungen bei verschiedenen Concentrationen nach der Coulomb'schen Methode, deren Berechnung O. E. Meyer[3]) gelehrt hatte. Die Resultate dieser Untersuchung sollten verglichen werden mit den von Kohlrauch und Grotrian[4]) bestimmten galvanischen Leitungsconstanten, resp. deren Temperaturcoëfficienten, derselben Salze, sowie mit der von Beetz[5]) untersuchten Leitung des Zinkvitriols. Wenn dieser Vergleich auch einen ungefähr gleichartigen Gang für innere Reibung und den galvanischen Widerstand mit der Temperatur ergab, so erkannte Grotrian doch die Mängel der Berechnungsmethode und behielt es sich vor, die Beobachtungen über die innere Reibung nach etwa später verbesserten Methoden umzurechnen. Auf die Prüfung derselben Gesetz-

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **99.** p. 229. 1856.
2) Grotrian, Pogg. Ann. **157.** p. 130. 237. 1876.
3) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113.** p. 55. 193. 383. 1861.
4) Kohlrausch u. Grotrian, Pogg. Ann. **154.** p. 1. 215. 1875.
5) Beetz, Pogg. Ann. **117.** p. 1. 1862.

mässigkeit zielte eine fernere Arbeit von Grotrian[1]), wobei er statt der Methode von Coulomb sich des Transpirationsverfahrens bediente, dessen Berechnung in der jetzigen Form von Hagenbach[2]) stammt. Da sich aber bei dieser Untersuchung, besonders bei den untersuchten Schwefelsäuren erhebliche Störungen in dem vermuthet analogen Verlaufe der Temperaturcoëfficienten zeigten, welche Grotrian auf etwaige Verunreinigungen der Säure vielleicht zurückführen zu können glaubte, so unternahm er es nochmals, des Gesetz zu prüfen[3]), und zwar abermals nach der Methode von Poiseuille; die Temperaturcoëfficienten für die Schwefelsäure ergaben sich fast genau gleich den früher gefundenen. Im Anschluss an diese Untersuchung reiht sich ein Vergleich der Temperaturcoëfficienten der galvanischen Leitung, wie sie aus der Arbeit von Kohlrausch und Grotrian[4]) zu berechnen sind, mit denen der inneren Reibung, die sich aus einer inzwischen veröffentlichten Arbeit von Sprung[5]) ergeben, der sich auch des Transpirationsverfahrens bediente, und Grotrian verzichtete nun (p. 548) auf jene beabsichtigte Umrechnung der ersten Arbeit.[6]) Der Vergleich mit den Zahlen, wie sie die Transpirationsmethode ergab, liess höchstens auf eine gewisse Gleichmässigkeit im Gang schliessen; die Zahlen der Transpirationsmethode stimmten leidlich untereinander, und die Frage war somit erledigt.

Demnach war ich berechtigt, die genannte Arbeit von Grotrian für den Coulomb'schen Versuch nach den von mir entwickelten Formeln[7]) zu berechnen. Ich glaube, dass die Resultate, welche ich ziehen werde, Zeugniss ablegen werden von der nunmehr erschlossenen Verwendbarkeit der Methode von Coulomb und von der Vorzüglichkeit des Beobachtungsmaterials, welches Grotrian in jener Arbeit überliefert hat, und vor allem, dass sich der Satz von dem ab-

1) Grotrian, Pogg. Ann. **160.** p. 238. 1877.
2) Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 358. 1860.
3) Grotrian, Wied. Ann. **8.** p. 529. 1879.
4) Kohlrausch u. Grotrian, Pogg. Ann. **154.** p. 1. 215. 1875.
5) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.
6) Grotrian, Pogg. Ann. **157.** p. 130. 237. 1876.
7) Grossmann, Wied. Ann. **16.** p. 619. 1882.

solut gleichartigen Verlauf der Temperaturcurven der Constanten der inneren Reibung und der galvanischen Leitung daraus ergeben wird — zum mindesten für die untersuchte Reihe von Salzen und innerhalb der Temperaturgrenzen der Beobachtungen 0—40°. Die Angaben des Transpirationsverfahrens müssen dann schliesslich noch einer besonderen Beurtheilung unterworfen werden. Es sei hier zugleich mit hervorgehoben, dass das Gesetz in genau derselben scharfen Weise sich beim Vergleich mit den von Beetz[1]) für das galvanische Leitungsvermögen des Zinkvitriols gefundenen Zahlen ergibt, sicher ein Beweis auch von der Vorzüglichkeit dieser Beobachtungen, welche beiläufig wohl überhaupt als die ersten zuverlässigen Zahlen über die Leitung von Flüssigkeiten anzusprechen sind, insofern hier zum ersten mal die beeinträchtigenden Wirkungen der Polarisationsströme auf geistreiche Art vermieden wurden.

Bei der Berechnung von Beobachtungen nach der Coulomb'schen Methode handelt es sich vorzugsweise zunächst um eine geeignete Methode, die Nebenreibung, d. i. diejenige Reibung und Bewegungshindernisse, welche nicht direct in Rechnung gebracht werden können, als z. B. die Reibung an der Axe, dem Spiegel, den Drähten u. dgl. mit Sicherheit zu eliminiren, resp. derselben bei der Berechnung gebührend Rechnung zu tragen. Es sei mir gestattet, mein diesbezügliches Verfahren bei dieser Gelegenheit zu beleuchten. Zur Elimination der Nebenreibung im vorliegenden Falle, welche sich wegen des als bewegende Kraft dienenden, horizontal und senkrecht gegen die Axe gestellten Magnets besonders gross gestaltete, können die von Grotrian mitgetheilten Beobachtungen über die Schwingung des Apparates in der Luft dienen, welche sich in Bezug auf Schwingungsdauer und Decrement über jeder Versuchsreihe (p. 238—241) angegeben finden; denn combinirt man hiermit die weitere Angabe Grotrian's (p. 241), dass die Temperatur der Flüssigkeiten der Zimmerwärme entspreche, so darf man ungefähr

1) Beetz, Pogg. Ann. **117.** p. 1. 1862.

das Mittel aus den in jeder Columne angegebenen Temperaturen der Flüssigkeiten als die jedesmalige Lufttemperatur ansehen — um so sicherer, je geringer die Abweichungen der Temperaturen in einer Columne —, und es liegen somit für die Bewegung in der Luft alle Daten der Beobachtung vor. Um nun mit Hülfe dieser Beobachtungen die Nebenreibung zu eliminiren, berechne ich diese Daten so, dass ich mir an der Axe des Apparates ausser der einen vorhandenen Scheibe noch eine zweite Scheibe angebracht denke, in einem Medium schwingend, von der Dichte der Luft, aber von unbekannter innerer Reibung. Wenn wir nun die wirkliche Scheibe der inneren Reibungsconstante der Luft als bekannt rechnungsmässig unterwerfen, so würde die fingirte Scheibe im Falle, dass keine Nebenreibung vorhanden, den Werth Null als Reibungsconstante des sie umgebenden Mediums ergeben; anderenfalls aber erhält diese berechnete Constante einen bestimmten Werth, und es ist klar, dass man die Nebenreibung bei jedem anderen Versuche mit demselben Apparat dann dadurch eliminirt, dass man neben der wirklichen Scheibe die fingirte Scheibe als auf der Axe befestigt in Rechnung stellt und diese der als Function der Temperatur ermittelten und ein für allemal bestimmten fingirten Reibungsconstante unterwirft. Aus Rücksicht auf die Vereinfachung der Rechnung wählte ich die fingirte Scheibe von den gleichen Dimensionen wie die wirkliche und schrieb ihr dieselbe Dicke zu; einfacher ist es aber, diese Dicke gleich Null zu setzen. Natürlich wird bei der unteren Scheibe nicht die Reibungsconstante, wie sie die Methode der Transpiration liefert, sondern diejenige Constante in Rechnung gestellt, welche meine Methode der Berechnung des Coulomb'schen Experimentes liefert, und welche zu der ersteren etwa im Verhältniss von 1 : 1,15 steht.[1]) Zur Feststellung dieser Reibungsconstante berechnete ich nach der Methode der kleinsten Quadrate den Mittelwerth aus den inneren Reibungsconstanten der Luft, wie sie O. E. Meyer, von Obermayer und Puluj als Function der Temperatur ermittelten, und welche ich in meiner Dissertation (p. 38) zusammenstellte;

1) Grossmann, Wied. Ann. 16. p. 628. 1882.

es ergab sich diese Constante $\mu = 0{,}0174\ (1 + 0{,}002\,555\,\vartheta)$, wo ϑ Grade nach Celsius bedeutet und als Einheiten mm, mg und Sec. gewählt sind; demnach war die untere Scheibe in der Luft der Reibungsconstante $0{,}0174/1{,}15\ (1 + 0{,}00255\,\vartheta)$ zu unterwerfen. In der folgenden Tabelle theile ich die zur Berechnung verwandten Beobachtungsdaten und die Resultate der Rechnung mit. Columne I enthält die Temperaturen, II die diesen entsprechenden inneren Reibungsconstanten der Luft, III das Decrement, IV die Schwingungsdauer.[1] Columne V enthält die berechnete innere Reibungsconstante, welcher die fingirte Scheibe bei diesem Apparat behufs Elimination der Nebenreibung zu unterwerfen ist.

I	II	III	IV	V
ϑ	M	L	T	(μ)
9,0	0,015 447	0,0009	6,146	0,061 057
16,0	0,015 788		6,168	60 872
18,3	0,015 805		6,169	61 005
24,6	0,016 047		6,192	60 861
			Im Mittel	*0,060 950*

Es zeigt sich also, dass die Nebenreibung bedeutend grösser ist als die Reibung an der wirklichen Scheibe, und dass sie wohl von der Temperatur unabhängig ist, was a priori nicht unmöglich ist, da wir es bei dieser sogenannten Nebenreibung wesentlich mit einem Verdrängen der Luft, hervorgerufen durch den schwingenden Magnetstab, zu thun haben.

Die Nebenreibung bietet also hier bei der Berechnung der Arbeit von Grotrian keine Schwierigkeit; anders verhält es sich dagegen mit der Schwingungsdauer. Da nämlich nur meine Formeln, abweichend von den von O. E. Meyer zur Berechnung des Coulomb'schen Experimentes aufgestellten Formeln[2], für jede Beobachtung die Bestimmung der Schwingungsdauer erfordern, so hat Grotrian diese für

1) Es ist diesen Versuchen eigenthümlich, dass das Decrement dasselbe geblieben ist, dagegen die Schwingungsdauer sich geändert hat, während diese sonst wenig variabel ist.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **113.** p. 67. 1861.

die einzelnen Experimente nicht beobachtet. Indem ich im weiteren zeigen werde, dass wir uns in einer bestimmten Weise von der Schwingungsdauer unabhängig machen können, und die vorläufige Annahme einer mittleren Schwingungsdauer somit schliesslich ganz irrelevant sein wird, so wollen wir eine solche aus Grotrian's Angaben zu entnehmen suchen, um der Wirklichkeit immerhin auch hierin möglichst nahe zu kommen. Grotrian theilt (p. 141) einige bei Gelegenheit von Vorversuchen bestimmte Schwingungsdauern des Apparates für verschiedene Salzlösungen, bei verschiedenen Temperaturen und Concentrationen mit, nämlich für:

	Sec.		Sec.		Sec.
Wasser	6,32	Chlornatrium	6,34	Zinkvitriol	6,36
	6,30		6,33		6,41
	5,86		—		6,85.

Da bei so kleiner Schwingungsdauer deren Bestimmung mit besonderen Schwierigkeiten verknüpft ist, so mögen die Zahlen 5,86 und 6,85 füglich bei Seite gelassen werden, und wir können als mittlere Schwingungsdauer $T = 6{,}35''$ in Rechnung stellen.

Um die mittelst des Apparates von Grotrian erhaltenen Reibungsconstanten mit denen der Transpiration zu vergleichen, berechnete ich einige Beobachtungen über die Schwingung desselben im Wasser. Folgende Tabelle enthält Beobachtungsdaten und Resultate; Columne V enthält die Reibungsconstanten aus der Formel:

$$\mu = \frac{1{,}5726}{1 + 0{,}035\,018\,\vartheta + 0{,}000\,024\,92\,\vartheta^2}$$

berechnet, welche die Methode der kleinsten Quadrate aus Col. I und IV ergab.

I	II	III	IV	V
ϑ	L	T	μ beob.	μ ber.
2,23	0,0443		1,4496	1,4585
7,54	405		2425	2427
8,42	402	6,35″	2266	2129
9,79	391		1694	1691
15,16	360		0122	0234
21,50	335		0,8922	0,8912

Berechnen wir aus obiger Formel die Werthe für 0°, 10°, 20°, 30° und vergleichen diese Zahlen mit den von Poiseuille[1]) ermittelten:

$$\mu = \frac{1{,}816}{1 + 0{,}033\,679\,3\,\vartheta + 0{,}000\,221\,\vartheta^2},$$

so erhalten wir:

ϑ	Poiseuille	Grotrian	Verhältniss
0	1,816	1,5726	1,15
10	335	1625	1,15
20	029	0,9195	1,12
30	0,821	7586	1,08

Da die Abweichungen der Schwingungsdauer bis zu $1^1/_2$ Proc. höchstens keinen grossen Einfluss auf diese Zahlen haben werden, so ergibt sich also wieder ungefähr das frühere Verhältniss; zu bemerken ist, dass der Radius der hier angewandten Scheibe besonders klein war und nur 30,1288 mm betrug.

Wenden wir uns nunmehr zur Berechnung der gesuchten Reibungsconstanten nach Gleichung (IV_b) auf p. 625 dieses Bandes. Formen wir dieselbe um, indem wir Reihenentwickelung nach $\lambda/\pi = \sigma$ eintreten lassen, so ergibt sich für alle Fälle genau:

$$\mu = 2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}}, \qquad \log\sigma = \log L - 0{,}134\,934\,1,$$

$$\mathfrak{A} = E\sqrt{\varrho}\left(1 - \tfrac{3}{2}\left(\sigma + \frac{\sigma^2}{4}\right)\right), \qquad E = \frac{R + 2h}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2T}},$$

$$\mathfrak{B} = Fk - \left\{2E\sqrt{\mu^1\varrho^1}\left(1 - \tfrac{3}{2}\left(\sigma + \frac{\sigma^2}{4}\right)\right) + \mu^1\right\}, \qquad F = \frac{K}{2TR^3},$$

wo R und h den Radius und die Dicke der Scheibe, K das Trägheitsmoment, ϱ^1 die Dichte der Luft und μ^1 die innere Reibungsconstante des die fingirte Scheibe umgebenden Mediums bezeichnen.

Eine Berechnung der Klammergrösse in dem Ausdruck von $\mathfrak{B}$ ergab für verschiedene Temperaturen folgende Werthe:

ϑ	0	10	20	30
	0,097 717	0,097 061	0,096 439	0,095 848;

1) Poiseuille, Pogg. Ann. 58. p. 424. 1843.

da diese Werthe kaum 1 °/₀ des Werthes von *Fk* betragen, so war es streng zulässig, auch bei der genauesten Rechnung für jene Grösse einen Mittelwerth einzuführen. Da dies meist, auch bei Anwendung von siebenstelligen Logarithmen, zulässig sein dürfte, so gestalten sich die Formeln einfacher:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 2\,\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B} - 2\,\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}}, \\ \mathfrak{A} &= E\sqrt{\varrho}\left(1 - \tfrac{3}{2}\left(\dot{\sigma} + \frac{\sigma^2}{4}\right)\right), \\ \mathfrak{B} &= Fk - M, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \log\sigma &= \log L - 0{,}134\,934\,1, \\ E &= \frac{R + 2h}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2T}}, \\ F &= \frac{K}{2TR^3} \end{aligned}$$

und M gleich dem Mittelwerth von $2E\sqrt{\mu^1\varrho^1} + \mu^1$ für eine mittlere Beobachtungstemperatur.

Sind mit demselben Apparate verschiedene Beobachtungen ausgeführt, und die Schwingungsdauer genau für jeden Versuch bestimmt, wie es erforderlich ist, so thut man doch besser, alle Beobachtungen mit einer und derselben mittleren Schwingungsdauer gleichmässig zu berechnen und die so berechneten Constanten dann noch zu corrigiren. War nämlich die zuerst berechnete μ_1 und die in Rechnung gestellte Schwingungsdauer T, die wahre Reibungsconstante aber μ_1' und die wahre Schwingungsdauer T_1, so ist $\mu_1' = (\mu_1\, T/T_1)$, da aus den zur Rechnung dienenden Formeln sich allgemein $\mu = (P/T)$ ergibt, wo P von der Schwingungsdauer unabhängig ist. Diese nachträgliche Umrechnung ist bei weitem bequemer, als wenn man in jedem Exempel die neue Schwingungsdauer einführen wollte.

Nach obigen Gleichungen wurden sämmtliche Reibungscoëfficienten aus den p. 238—241 von Grotrian mitgetheilten Beobachtungsdaten berechnet; da diejenigen der schwefelsauren Magnesia für welche die galvanischen Leitungscoëfficienten noch fehlen, aus diesem Grunde ohne Interesse waren, unterliess ich deren Berechnung. Hervorzuheben ist nur noch, dass nicht die Grössen $\varepsilon - \varepsilon_0$, sondern natürlich die direct beobachteten Decremente ε in Rechnung gestellt wurden, da ja für die Nebenreibung in obiger Weise genügend Sorge getragen ist.

Wäre nun das Gesetz von der Uebereinstimmung der Temperaturcurven richtig, so müsste für jede Salzlösung von bestimmtem Salzgehalt das Product aus innerer Reibung mal galvanischer Leitungsfähigkeit constant sein in Bezug auf die Temperatur — eine Relation, die nahe liegt, aber wohl nicht in Betracht gezogen wurde. Diese Relation wird jedenfalls von den Beobachtungsfehlern weniger beeinflusst als die Gleichheit der gewöhnlich durch lineare Interpolation aus zwei Beobachtungen abgeleiteten Temperaturcoëfficienten von der Form:

$$\left(\frac{\varDelta \frac{1}{\mu}}{\varDelta \vartheta} : \frac{1}{\mu_{18}}\right)_{\vartheta_1;\,\vartheta_2}.$$

Bezeichnen wir also die Leitungsconstante mit k, so müsste für jede bestimmte Concentration einer Flüssigkeit:

$\mu k =$ const. oder bezeichnender: $\frac{d(\mu k)}{d\vartheta} = 0$ sein.

Die Untersuchungen von Kohlrausch und Grotrian[1]) gestatten die Berechnung der Grössen k für Chlorkalium, Chlornatrium, Chlorcalcium, Chlormagnesium (wenigstens für eine Concentration) und Chlorbarium in einfacher Weise nach der Formel $k_0(1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2)$, da in jener Arbeit die Grössen k_0, α und β für genau dieselben Lösungen dieser Salze angegeben sind. Für die Berechnung der Leitungsfähigkeit des Zinkvitriols bei den in Betracht kommenden Temperaturen und Concentrationen verwandte ich die früher von Beetz[2]) angestellten Untersuchungen und konnte wenigstens für die Lösungen mit 7,41, 11,08, 19,61 und 22,61 Procentgehalt die gesuchten Grössen mit hinreichender Genauigkeit berechnen. Für die Lösung von 22,61 Proc. wurde die von Beetz untersuchte von 22,59 Proc. substituirt, die von 19,61 Proc. hat jener Physiker selbst untersucht; bei diesen Lösungen kam es also nur auf eine sorgfältige quadratische Interpolation an. Bei den beiden anderen Concentrationen waren umständliche Rechnungen erforderlich, welche ich hier nicht anführen kann.

Nunmehr wurden die Producte μk gebildet, und es zeigte

1) Kohlrausch u. Grotrian, Pogg. Ann. **154.** p. 1. u. 215. 1875.
2) Beetz, Pogg. Ann. **117.** p. 1. 1862.

sich, dass diese im grossen und ganzen offenbar eine Uebereinstimmung zeigen; die mittlere Abweichung von zwei correspondirenden Beobachtungen beträgt $1-1^1/_2$ Proc. Diese Uebereinstimmung bestärkte mich in der Ansicht, dass das Gesetz gültig sein müsse; aber soweit wäre es auch nur als Annäherung aus den Zahlen hervorgegangen, zumal die Producte mit zunehmender Concentration die ausgesprochene Neigung zur Abnahme zeigen. Das Gesetz kann aber auch nur von den wirklichen Grössen μ' gelten, nicht von den vielleicht noch mit einem Fehler wegen der obigen mittleren Schwingungsdauer behafteten Grössen μ. Wir sahen dass:

$\mu_1{}^1 = \frac{\mu_1 T}{T_1}$ (p. 126) und haben demnach: $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{T_1}{T_2}\frac{\mu_1{}^1}{\mu_2{}^1}$

also:
$$\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2 k_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\mu_1{}^1 k_1}{\mu_2{}^1 k_2}.$$

Wäre also das Gesetz $\mu' k = \text{const.}$ richtig, so müsste für jede Lösung bestimmter Concentration $\mu_1 k_1 / \mu_2 k_2 = T_1 / T_2$ sein, oder jene berechneten Producte müssten einfach im Verhältniss der Schwingungsdauern stehen. Da mit steigender Temperatur die Zähigkeit der Lösung und somit auch die Schwingungsdauer abnimmt, ebenso wie es von der Grösse μk beobachtet wurde, so wäre jenes Verhältniss nicht unwahrscheinlich; es soll uns aber zur Gewissheit werden. In gewisser Weise gebildete Temperaturcoëfficienten involviren nämlich nur das Verhältniss $T_1 : T_2$. Seien nämlich ϑ_1 und ϑ_2 zwei Beobachtungstemperaturen, $\mu_1{}^1$ und $\mu_2{}^1$ die wahren Reibungsconstanten, so können wir durch lineare Interpolation den Temperaturcoëfficienten:

$$\left(\frac{\varDelta \frac{1}{\mu}}{\varDelta \vartheta} : \left(\frac{1}{\mu}\right)_{\vartheta_3}\right)_{\vartheta_1;\,\vartheta_2}$$

bilden und erhalten durch Umformung:

$$\frac{1}{\vartheta_3 + \frac{\mu_2{}^1 \vartheta_2 - \mu_1{}^1 \vartheta_1}{\mu_1{}^1 - \mu_2{}^1}},$$

wobei ϑ_3 eine beliebige andere Temperatur bezeichnet. Führen wir die beobachteten Grössen μ ein, so wird dieser Temperaturcoëfficient:

$$\frac{1}{\vartheta_3 + \dfrac{\vartheta_2 \mu_2 \dfrac{T_1}{T_2} - \vartheta_1 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2 \dfrac{T_1}{T_2}}}$$

Wäre nun das gesuchte Gesetz gültig, so hätten wir die Relation:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\mu_1 k_1}{\mu_2 k_2}$$

und somit jenen Temperaturcoëfficienten:

$$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta} : \left(\frac{1}{\mu}\right)_{\vartheta_3}\right)_{\vartheta_1;\vartheta_2} = \frac{1}{\vartheta_3 + \dfrac{\vartheta_2 \mu_2 \dfrac{\mu_1 k_1}{\mu_2 k_2} - \vartheta_1 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2 \dfrac{\mu_1 k_1}{\mu_2 k_2}}}$$

und die Richtigkeit könnte nur durch Beobachtungsfehler beeinträchtigt werden.

Nach dieser Formel sind die Coëfficienten:

$$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta} : \frac{1}{\mu_{18}}\right)_{\vartheta_1;\vartheta_2}$$

berechnet, wobei ϑ_1 und ϑ_2 die jedesmaligen Temperaturen der Beobachtung waren. Da für die drei Concentrationen von Chlornatrium je drei Beobachtungen vorlagen, so wurden je zwei derselben combinirt; die erste mit der zweiten combinirt ist durch (12) angedeutet u. s. w. In gleicher Weise wurden durch lineare Interpolation zwischen denselben Temperaturen die Temperaturcoëfficienten für das galvanische Leitungsvermögen:

$$\left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta} \frac{1}{k_{\vartheta_3}}\right)_{\vartheta_1;\vartheta_2} = \frac{k_2 - k_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \frac{1}{k_1 + (\vartheta_3 - \vartheta_1)\dfrac{k_2 - k_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}}$$

berechnet, und zwar für Zinkvitriol durch Substitution der berechneten Werthe k_1 und k_2. Bei den übrigen Salzen wurde die Rechnung durch Umformung einfacher. Durch Anwendung der Gleichung $k = k_0 (1 + \alpha \vartheta + \beta \vartheta^2)$ ergibt sich:

$$\left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta} \frac{1}{k_{\vartheta_3}}\right)_{\vartheta_1;\vartheta_2} = \frac{\alpha + \beta(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{1 + \vartheta_3\left(\alpha + \beta(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right) - \beta \vartheta_1 \vartheta_2}.^{1})$$

1) Nicht $(\alpha + 2\beta . 18)/(1 + \alpha . 18 + \beta\, 18^2)$, da hier quadratische Inter-

Dass in beiden Fällen $\vartheta_3 = 18$ gewählt wurde und für Zinkvitriol $\vartheta_3 = 15$, wie bei den Untersuchungen von Grotrian, ist blos dem Wunsche zuzuschreiben, mich jener Arbeit möglichst anzuschliessen.

Wenn nun das Gesetz zutreffend ist, so muss:

$$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta} : \frac{1}{\mu_{\vartheta_3}}\right)_{\vartheta_1;\,\vartheta_2} = \left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta} : \frac{1}{k_{\vartheta_3}}\right)_{\vartheta_1;\,\vartheta_2}$$

sein, für alle Werthe ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3. Die Werthe ϑ_1 und ϑ_2 waren hier durch die Reibungsbeobachtungen vorgeschrieben.

Im Folgenden stelle ich alle berechneten Grössen, sowie die Dichtigkeiten ϱ der untersuchten Lösungen bei der Temperatur der Beobachtung zusammen.

Chlornatrium.

%	ϑ	μ	ϱ	$10^8\,k$	$10^8\,k\mu$	$\left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta}\,\frac{1}{k_{18}}\right)_{\vartheta_1,\vartheta_2}$	$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta}\,\mu_{18}\right)_{\vartheta_1,\vartheta_2}$	10^5 Diff.	$10^8 k\mu$ im Mittel	$10^8\,k_0$	μ_0
4,97	8,32	1,2772	1,0365	500	638,6	(12) 0,02037	0,02048	+11			
	14,74	1,0976	351	582	638,8	(13) 0,02079	2084	+ 5	636,9	400	1,592
	22,03	0,9329	332	679	633,4	(23) 0,02127	2127	± 0			
15,00	7,94	1,5901	1,1125	1226	1949	(12) 0,01979	1982	+ 3			
	14,41	1,3572	01	1422	1930	(13) 0,02023	2032	+ 9	1933,8	998	1,938
	21,99	1,1630	071	1663	1934	(23) 0,02073	2069	– 4			
23,86	7,87	2,1313	1,1837	1549	3302	(12) 0,02106	2097	– 9			
	14,55	1,8072	07	1825	3298	(13) 0,02143	2141	– 2	3303	1238	2,668
	21,30	1,5623	1772	2118	3309	(23) 0,02193	2199	+ 6			
Chlorkalium.											
9,93	6,10	1,2189	1,0648	991	1208	0,01798	0,01802	+ 4	1196	858	1,394
	15,62	0,9806	39	1207	1184	—	—	—	—	—	—
20,95	6,10	1,2092	1,1422	2118	2561	0,01609	0,01609	± 0	2543	1868	1,361
	16,00	0,9956	11	2535	2524	—	—	—	—	—	—

polation und andere Bildung des Coëfficienten vorliegt. Vgl. Pogg. Ann. **154.** p. 226. 1875. u. **157.** p. 247 u. 248. 1876; insonderheit vgl. Col. 7 daselbst.

Chlorcalcium.

%	ϑ	μ	ϱ	10^8 k	10^8 $k\mu$	$\left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta}\frac{1}{k_{18}}\right)_{\vartheta_1\vartheta_2}$	$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta}\mu_{18}\right)_{\vartheta_1\vartheta_2}$	10^5 Diff.	$10^8 k\mu$ im Mittel	10^8 k_0	μ_0
5,00	7,92	1,3800	1,0422	477,5	659,0	0,02019	0,02022	+ 3	6537	386	1,694
	15,91	1,1286	13	574,4	648,3	—	—	—	—	—	—
9,98	7,29	1,6824	1,0865	841	1415	0,01942	0,01933	− 9	1383	698	1,981
	15,66	1,3341	55	1013	1351	—	—	—	—	—	—
19,93	7,93	2,2588	1,1803	1305	2948	0,01887	0,01887	± 0	2937	1077	2,727
	15,92	1,8901	1,1793	1548	2926	—	—	—	—	—	—
25,38	7,78	2,9933	1,2363	1331	3984	0,01933	0,01935	+ 2	3953	1092	3,620
	14,34	2,5443	55	1541,5	3922	—	—	—	—	—	—
29,81	8,04	3,9983	1,2838	1246	4982	0,01995	0,01996	+ 1	4928	1015	4,855
	16,67	3,2188	25	1514	4873	—	—	—	—	—	—
35,2	8,13	6,4574	1,3459	988	6380	0,02182	0,02182	± 0	6351	782	8,122
	16,35	5,2071	45	1214	6321	—	—	—	—	—	—

Chlormagnesium.

4,51	14,39	1,2443	1,0380	539,1	670,8	0,02144	0,02143	− 1	665,9	371	1,795
	18,37	1,1222	74	588,9	660,9	—	—	—	—	—	—
19,83	14,50	2,7965	1,1755	—	—	—	—	—	—	—	—
	18,69	2,5007	47								
33,6	14,38	10,9250	1,3181	—	—	—	—	—	—	—	—
	18,30	9,7400	72								

Chlorbarium.

5,25	2,34	1,5016	1,0483	261,8	393,1	0,01984	0,01983	− 1	388,9	245	1,587
	15,80	1,5094	73	363,1	384,7	—	—	—	—	—	—
15,08	2,47	1,6662	1,1500	701,2	1168	0,01865	0,01859	− 6	1169	657	1,779
	15,66	1,2401	489	942,6	1169	—	—	—	—	—	—
23,56	2,61	1,9082	1,2523	1021,0	1948	0,01795	0,01796	+ 1	1941	958	2,026
	14,93	1,4500	12	1333,1	1933	—	—	—	—	—	—

Schwefelsaures Zinkoxyd.

%	ϑ	μ	ϱ	10^8 k	10^8 $k\mu$	$\left(\frac{\Delta k}{\Delta \vartheta}\frac{1}{k_{15}}\right)_{\vartheta_1\vartheta_2}$	$\left(\frac{\Delta \frac{1}{\mu}}{\Delta \vartheta}\mu_{15}\right)_{\vartheta_1\vartheta_2}$	10^5 Diff.
7,41	9,55	1,5908	1,0805	188,7	300,2	0,02427	0,02427	±0
	14,42	1,4197	794	214,4	304,4	—	—	—
11,08	9,12	1,9345	1,1229	245,8	475,5	0,02414	0,02414	±0
	13,56	1,7182	18	276,5	475,1	—	—	—
14,85	9,22	2,3850	1,1692	—	—	—	—	—
	13,90	2,1116	79					
19,61	15,23	2,7212	1,2298	403	1097	0,02557	0,02553	−4
	21,77	2,3061	78	470	1084	—	—	—
22,61	9,31	4,0372	1,2735	352	1421	0,02412	0,02413	+1
	14,39	3,5075	18	402	1410	—	—	—
29,75	15,34	6,2522	1,3795	—	—	—	—	—
	21,43	5,1391	71					

Die Uebereinstimmung der Temperaturcoëfficienten ist für diese sechs untersuchten Salze eine vollständige und könnte wohl überhaupt nicht besser ausgefallen sein. Ich halte es für unmöglich, dass diese Gleichheit von 25 Temperaturcoëfficienten, welche sechs verschiedenen Salzen zukommen, ein Spiel des Zufalls sein sollte! Wir können daher schliessen, dass für diese Lösungen das Gesetz von der vollständigen Gleichheit der Temperaturcurven der inneren Reibung und des galvanischen Widerstandes unbedingt gelten muss. Da hier ferner Salze von so heterogenem Verhalten wie Chlorkalium und Zinkvitriol dasselbe Gesetz befolgen, so schliesse ich, dass dieses Gesetz allgemein gültig sein wird, und ich vermuthe auch, dass die Schwefelsäure in ihren verschiedenen Concentrationen keine Ausnahme bilden wird. Die Temperaturcoëfficienten, wie sie die Transpirationsmethode liefert, weichen bedeutend ab, wie ich nachher zeigen werde. Welche Theorie hat nun Recht, meine Berechnung der Coulomb'schen Methode oder die für das Transpirationsverfahren entwickelten Gleichungen? Wäre letzteres der Fall, so müssten die Werthe, welche für das galvanische Leitungsvermögen berechnet wurden, alle in gleicher Weise mit demselben Fehler behaftet sein, was nicht wahrscheinlich und schon darum unmöglich ist, weil gerade die Methoden zur Berechnung der auf Galvanismus bezüglichen Zahlen äusserst geeignet und durchgearbeitet sind. Es bleibt demnach weiter kein Ausweg als die Annahme, dass die Formeln für das Ausflussverfahren von Poiseuille noch einer Verbesserung bedürfen, indem die jetzt zur Rechnung dienenden Gleichungen Werthe liefern, welche nicht streng miteinander vergleichbar sind. Dass Grotrian aus zwei verschiedenen Versuchsreihen für die Schwefelsäure fast genau dieselben Zahlen gefunden hat, kann als Gegenbeweis nicht dienen, da es sich in beiden Fällen um dieselbe Materie und somit um die gleichen molecularen Vorgänge gehandelt hat. Es dürfte der Vorgang des Fliessens vielleicht etwas weniger einfach sein, als die Theorie[1]) annimmt.

1) Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 358. 1860.

Untersuchen wir, wie die Werthe, die das Transpirationsverfahren zu berechnen gestattet hat, von den durch die Methode von Coulomb berechneten Zahlen abweichen, und unterwerfen wir zu diesem Zweck die Untersuchungen von Sprung[1]) über die Flüssigkeitsreibung bei Salzlösungen einer Bearbeitung. Zu diesem Zwecke wählte ich die Untersuchungen über Chlornatrium, Chlorkalium, Chlorcalcium und Chlorbarium und berechnete aus den je drei Beobachtungen bei 10, 30 und 50° die Temperaturcoëfficienten μ_0. α, β der Gleichung $\mu = \left(\mu_0/(1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2)\right)$, welche μ als Function der Temperatur darstellt.

Aus diesen Grössen α und β wurden dann die Temperaturcoëfficienten durch lineare Interpolation in obiger Weise gebildet. Die gleichen Grössen wurden ferner aus den Grotrian'schen Reibungsbeobachtungen hergeleitet. Das oben bewiesene Gesetz besagt, dass wenn:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2}, \qquad \text{dann:} \qquad k = k_0(1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2)$$

sich darstellt, wo α und β in beiden Ausdrücken den gleichen Werth haben; also $\mu k = \mu_0 k_0$ und $\mu_0 = \mu k / k_0$. Da die Producte μk oben noch mit dem Fehler der Schwingungsdauer behaftet sind, so wähle ich das Mittel aus den zusammengehörigen Werthen; die Werthe k_0 haben Kohlrausch und Grotrian[2]) berechnet und finden sich diese Grössen nebst den Mittelwerthen von μk und den nach der eben genannten Formel berechneten μ_0 bereits in der oben mitgetheilten Zusammenstellung in den letzten drei Columnen. Aus diesen μ_0 sind die Reibungscoëfficienten für 50° nach der Gleichung $\mu_{50} = \left(u_0/(1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2)\right)$ berechnet, wo α und β die Temperaturcoëfficienten des galvanischen Leitungsvermögens bezeichnen. Ferner enthält folgende Zusammenstellung noch die Dichtigkeiten ϱ der Lösungen, nach Sprung bei Zimmertemperatur und für die Beobachtungen von Kohlrausch und Grotrian bei Temperaturen zwischen 14 und 16°, welche den vorigen ungefähr entsprechen mögen.

1) Sprung, Pogg. Ann. **159**. p. 1. 1876.
2) Kohlrausch u. Grotrian, Pogg. Ann. **154**. p. 221–223. 1875.

Chlornatrium.

%	ϱ	Transpiration $10^5\alpha$	Transpiration $10^6\beta$	Coulomb $10^5\alpha$	Coulomb $10^6\beta$	Transpirat. μ_0	Coulomb μ_0	Transpir. μ_{50}	Coulomb μ_{50}	$\left(\frac{\Delta\frac{1}{\mu}}{\Delta\vartheta}\mu_{15}\right)_{10;20}.10^5$ Transp.	$\left(\frac{\Delta\frac{1}{\mu}}{\Delta\vartheta}\mu_{15}\right)_{10;20}.10^5$ Coulomb
4,970	1,035	—	—	2920	110	—	1,592	—	0,582	—	2218
7,955	1,058	3471	124	—	—	2,0316	—	0,667	—	2477	—
14,312	1,106	3385	129	—	—	2,3227	—	0,770	—	2449	—
15,000	1,110	—	—	2790	110	—	1,938	—	0,726	—	2158
23,219	1,177	3630	152	—	—	3,2065	—	1,004	—	2582	—
23,860	1,184	—	—	3100	111	—	2,668	—	0,943	—	2300
Chlorkalium.											
9,930	1,064	—	—	2500	65	—	1,394	—	0,578	—	1937
10,230	1,068	2928	118	—	—	1,6576	—	0,601	—	2235	—
20,950	1,141	—	—	2170	39	—	1,361	—	0,624	—	1713
22,215	1,153	2509	67	—	—	1,5979	—	0,660	—	1945	—
Chlorcalcium.											
5,00	1,041	—	—	2920	93	—	1,694	—	0,629	—	2189
9,98	1,086	—	—	2740	93	—	1,981	—	0,761	—	2105
15,17	1,133	3071	152	—	—	2,6623	—	0,934	—	2353	—
19,93	1,179	—	—	2600	94	—	2,727	—	1,076	—	2039
25,38	1,236	—	—	2750	84	—	3,620	—	1,400	—	2095
29,81	1,283	—	—	2720	136	—	4,855	—	1,798	—	2169
31,60	1,305	2732	191	—	—	6,4035	—	2,252	—	2267	—
35,20	1,345	—	—	3110	165	—	8,122	—	2,737	—	2391
39,75	1,393	3734	419	—	—	17,188	—	4,388	—	2998	—
Chlorbarium.											
5,25	1,048	—	—	2900	96	—	1,587	—	0,590	—	2185
7,605	1,071	3387	116	—	—	1,9093	—	0,640	—	2430	—
15,08	1,149	—	—	2640	87	—	1,779	—	0,701	—	2046
15,402	1,158	2935	154	—	—	2,0541	—	0,720	—	2297	—
23,56	1,251	—	—	2500	82	—	2,026	—	0,825	—	1968
24,34	1,263	2979	110	—	—	2,3945	—	0,866	—	2244	—

Die Temperaturcoëfficienten α und β, sowie die Grössen:

$$\left(\frac{\Delta\frac{1}{\mu}}{\Delta\vartheta}\mu_{15}\right)_{10;20}$$

ergeben sich durchweg grösser bei der Transpirationsmethode (mit Ausnahme vielleicht der Zahlen für die 31,6 procentige Lösung von Chlorcalcium); bei steigender Temperatur würde demnach im Verhältniss weniger, bei sinkender also mehr

ausfliessen, als die Theorie ansetzt. Während die aus den Zahlen von Sprung abgeleiteten μ_0 (bei 0° C.) von den aus Grotrian's Beobachtungen gefundenen bedeutend abweichen, und zwar zu gross ausfallen, zeigen die Constanten bei 50° schon eine viel geringere Abweichung und reihen sich mit den anderen schon ziemlich ein. Im übrigen erkennt man, dass die correspondirenden Grössen in ihrer Abhängigkeit von Temperatur und Procentgehalt dieselben Gesetze befolgen.

Da es leider, der fehlenden Schwingungsdauer halber, und weil die vermuthlich rein geometrische Constante, welche die aus meinen Formeln berechneten Werthe der Coulomb'schen Methode auf die wahren Werthe reducirt, noch nicht genügend sicher bestimmt ist, nicht möglich ist, aus den Beobachtungen von Grotrian absolut richtige Grössen für die Reibungsconstanten abzuleiten, und da nach der vorstehenden Untersuchung die nach der Methode der Transpiration gefundenen Zahlen nicht als zuverlässig gelten können, so darf wohl behauptet werden, dass keine der bisher ermittelten Reibungsconstanten absolut richtig sind — für das Verfahren von Maxwell habe ich gezeigt, dass die Werthe zu gross ausfallen. Daher ist es mein Wunsch, die von Grotrian und Kohlrausch untersuchten Flüssigkeiten nach der Methode von Coulomb eingehend zu prüfen, und vor allem zunächst nach dieser Methode die innere Reibung der Schwefelsäure zu erforschen, womit ich zur Zeit beschäftigt bin. Es wäre gewiss wünschenswerth, wenn die galvanische Leitung anderer Salzlösungen in gleich vorzüglicher Weise wie von Beetz, Kohlrausch und Grotrian erschöpfend untersucht würden und womöglich bei mehr Concentrationen, die vielleicht in regelmässigen Intervallen fortschreiten; eine jedesmalige Beobachtung bei mindestens drei Temperaturen wäre unbedingt erforderlich.

Eberswalde, August 1882.

VIII. *Ueber die von Hrn. A. Guébhard vorgeschlagene Methode der Bestimmung äquipotentialer Linien; von Hugo Meyer.*

(Der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. Aug. 1882.)

(Hierzu Taf. I Fig. 5—12.)

1) Die Nobili'schen Farbenringe sind nach ihrem Entdecker zuerst von E. Becquerel, E. du Bois-Reymond und Beetz theoretisch und experimentell studirt worden. Bei den theoretischen Untersuchungen wurde zunächst vorausgesetzt, dass die Niveauflächen der electrischen Strömung Kugelflächen seien, welche die Electrodenspitze concentrisch umschlössen. Riemann[1]) hat bewiesen, dass diese Annahme nicht zulässig ist, und hat eine von dieser Voraussetzung unabhängige Theorie gegeben; aber auch diese entspricht nicht ganz den thatsächlichen Verhältnissen; denn sie setzt voraus, dass das Potential auf der Grenzfläche constant ist, und nimmt keine Rücksicht auf die Polarisation an der Metallplatte. In den neueren Untersuchungen von Wild[2]) H. Weber[3]) und Ditscheiner[4]) ist die Theorie in dieser Beziehung verallgemeinert und insofern ergänzt worden, als auch der Fall, dass alle Electroden des galvanischen Stromes sich in demselben Medium befinden, theoretisch behandelt und endlich auf die Dicke der Metallplatte Rücksicht genommen wurde. W. Voigt[5]) ist kürzlich zu der Annahme, dass das Potential an der Grenze zwischen dem Electrolyten und der Metallplatte constant (= 0) sei, zurückgekehrt. Bezüglich der Form der Electroden ist bei den theoretischen Entwickelungen (auch von Voigt, wo er sich mit speciellen Problemen befasst) stets vorausgesetzt und bei den experimentellen Untersuchungen auch wohl immer dieser Annahme zu entsprechen gesucht, dass die Electroden klein seien, punktförmig, Kugeln von sehr kleinem Radius, kleine Kreis-

1) Riemann, Pogg. Ann. 95. p. 130. 1855.
2) Wild, Neue Schweizer. Denkschr. 15. 1857.
3) H. Weber, Crelle's Journ. 75. p. 75. 1872 u. 76. p. 1. 1873.
4) Ditscheiner, Wien. Ber. (2) 78. p. 93. 1878.
5) W. Voigt, Wied. Ann. 17. p. 257. 1882.

flächen, oder endlich schmale parallelepipedische Streifen. Bei den experimentellen Untersuchungen des Hrn. A. Guèbhard[1]) ist diese Voraussetzung fallen gelassen, und darin dürfte eine der wesentlichsten Abweichungen dieser Untersuchungen von den früheren zu finden sein. Hr. Guèbhard legt auf den Boden eines isolirenden Troges ein dünnes Metallblatt, das durch die verticalen Wände des Troges begrenzt wird, auf dieses schüttet er eine Mischung von in Wasser gelöstem essigsauren Blei und essigsauren Kupfer und führt überall freie cylindrische Electroden vertical in die Flüssigkeit bis dicht über die Metallplatte. Durch Schliessen eines Stromes von starker Spannung erhält er dann unter den Electroden Nobili'sche Ringe, und diese sollen mit den Aequipotentialcurven derjenigen ebenen electrischen Strömung in der Metallplatte zusammen fallen (an einigen Stellen identificirt Hr. Guèbhard sogar diese Curvensysteme), welche sich ergibt, wenn der Strom in die leitende Fläche durch Punkte oder Curven eintritt, welche die senkrechten Projectionen jener Electroden auf die Metallplatte sind.[2]) — Es versteht sich hiernach von selbst, dass die bekannten theoretischen Entwickelungen nicht ohne weiteres auf die so dargestellten Nobili'schen Ringe übertragen werden dürfen. — Da nur an den positiven Electroden scharf begrenzte Ringe auftreten, so hat man, den beiden Stromrichtungen entsprechend, zwei Platten anzufertigen, und erhält durch die Superposition derselben das ganze System der Farbenringe, soweit es überhaupt zur Ausbildung kommt.

2) Als diese Beobachtung von Hrn. Guèbhard veröffentlicht wurde, war ich mit der Untersuchung des Niveaucurvennetzes in einem sich einerseits ins Unendliche erstreckenden Streifen beschäftigt, der im übrigen begrenzt war durch die y-Axe, die x-Axe von $x = 0$ bis $x = +1$, und

---

1) A. Guèbhard, Compt. rend. **90.** p. 984. 1880 etc.; eine Zusammenstellungen d. Beobachtungen findet sich Journ. de Phys. (2) **1.** p. 205. 1882.

2) Auch Hildebrandt (Gandersheimer Schulprogramm 1881—1882) und Holzmüller (Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc. Leipzig 1882) halten die Nobilischen Ringe irrthümlich für Spannungscurven.

durch den sich in dem Punkte $x = +1$, $y = 0$ erhebenden Zweig der gleichzeitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$; diese Linien sind nämlich Stromcurven der unendlichen Ebene, wenn der Strom durch die Punkte ($x = \pm 1$, $y = 0$) in dieselbe eintritt und die Fläche durch ($x = 0$, $y = \pm 1$), ($x = \pm\sqrt{3}, y = 0$) wieder verlässt, man kann also aus der unendlichen Ebene jenen Streifen herausschneiden, ohne das Niveaucurvensystem zu alteriren, der Streifen enthält dann nur einen Ein- und einen Ausströmungspunkt. Das System der Curven constanten Potentials ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2\}^2}{\{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2\}\{(x^2 - y^2 - 3)^2 + 4x^2y^2\}} = c.$$

Ich versuchte nun eine Anwendung der electrochemischen Methode des Hrn. Guébhard, sowohl für diesen als auch für einige andere Fälle. Dabei zeigte sich, dass die Farbenringe die Begrenzung der Metallplatte nicht immer senkrecht schnitten. Da ferner die Nobili'schen Ringe Curven constanter Intensität der Strömung aus dem Electrolyten in die Platte sind, so ist principiell ein ganz bestimmter Unterschied zwischen den Farbenringen und den Curven constanten Potentials gegeben.[1]) Diese Bemerkung in Verbindung mit der vorhergehenden Beobachtung bestimmten mich, die Methode des Hrn. Guébhard zu verwerfen und bei der bewährten Methode von Kirchhoff[2]) stehen zu bleiben. Es kam noch hinzu, dass die Nobili'schen Ringe nur einen Theil der Platte bedeckten und so eine vollständige Untersuchung des Curvensystems nicht ermöglichten. Nach der Kirchhoff'schen Methode habe ich die in Fig. 5 mit 1 bis 7 bezeichneten Curven bestimmt; die Vergleichung der experimentell gefundenen Werthe und der theoretisch bestimmten ergab eine befriedigende Uebereinstimmung. Die electrochemische Methode habe ich seitdem experimentell nicht weiter verfolgt.[3])

1) S. auch E. Mach, Wien. Ber. (2) **86.** 1882. Wied. Ann. **17.** p. 858. 1882.

2) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **64.** p. 497. 1845; Abh. p. 1. 1882.

3) H. Meyer, Ueber stationäre electrische Strömung in leitenden Flächen etc. Dissertation, Göttingen 1880. Entgegnungen des Hrn. Guébhard, Compt. rend. **93.** p. 403. 1881. L'Electricien 1882. Sep.

3) In seinen neueren Mittheilungen[1]) scheint Hr. Guébhard nun zwar von der Identificirung der von ihm gefundenen Farbenringe mit Curven constanten Potentiales zurückgekommen zu sein, indem er sagt: „les anneaux colorés figurent, avec une très grande approximation le système théorique de lignes équipotentielles.“ Da indessen über den Grad der Annäherung bisher keine Angaben vorliegen, habe ich es unternommen, bei zwei von Hrn. Guébhard selbst angefertigten Platten die Ringsysteme auszumessen und die erhaltenen Resultate mit den Werthen zu vergleichen, welche die Theorie für die entsprechenden Niveaucurven fordert. Diese Platten, welche den oben angeführten Fall meiner Dissertation für die unendliche Ebene darstellten, standen mir durch die Güte des Hrn. Prof. H. A. Schwarz zur Verfügung, dem sie mit noch einigen anderen von Hrn. Guébhard übersandt waren; eine derselben trägt das Datum 4/VI 82. Ich gestehe gern, dass ich von der Schönheit der Farbenringe und deren Aehnlichkeit mit den Curven constanten Potentiales überrascht war, wenn auch ein ein einziger Blick genügte, um zu erkennen, dass man es hier nicht mit Niveaucurven zu thun hatte. Die nahezu vollkommene Symmetrie, welche die Ringsysteme mit Bezug auf die Coordinatenaxen bewahrten, legte Zeugniss ab für die sorgfältige Ausführung der Versuche, denen sie ihre Entstehung verdankten.

4) Ich habe bereits oben auf die schon von Nobili gemachte Erfahrung hingewiesen, dass sich zwischen zwei entgegengesetzten Electroden ein Band hindurchzieht, auf welchem keine Farbenringe auftreten, dass diese also nur einen Theil der leitenden Metallfläche bedecken. Zur Vergleichung der von Farbenringen freien und der damit bedeckten Theile der Fläche habe ich in Fig. 6 die äussersten, bei Beleuchtung mit Natriumlicht messbaren und die den Electroden nächsten, noch erkenntlichen Curven gezeichnet;

Auf die persönlichen Invectiven meines Herrn Gegners kann ich mich selbstverständlich nicht einlassen.

1) A. Guébhard, Journ. de Phys. (2.) 1. p. 205. 1882. Beibl. 6. p. 507. 1882.

die Gebiete, in denen sich messbare Curven befanden, sind schraffirt, die Theile, innerhalb welcher durch die Masse der Zersetzungsproducte alle etwaigen Ringe verdeckt waren, sind carrirt worden, der übrig bleibende Theil der unendlichen Ebene war von messbaren Ringen frei.[1]) Dass das Verhältniss dieser Flächenstücke zu einander bei verschiedenen Platten aber derselben Lage der Electroden zwischen weiteren Grenzen schwanken sollte, ist nach dem, was Hr. Guébhard über die Zeitdauer der Entwickelung der Ringe mittheilt, nicht wohl anzunehmen.[2]) Aus technischen Gründen konnten die Figuren nur in $^3/_4$ der Originalgrösse wiedergegeben werden.

5) Wie mir scheint, erkennt man beim ersten Anblicke der Platten, auch der Fig. 6, dass von einem wirklichen Zusammenfallen der Curven constanter Intensität mit den entsprechenden Niveaucurven nicht die Rede sein kann, denn dass der Winkel, unter welchem sich die Aeste der durch den Coordinatenursprung verlaufenden Curve schneiden, nicht, wie es die Theorie von der entsprechenden Niveaucurve verlangt, ein Rechter ist, springt unmittelbar in die Augen; die Messung ergab 77°. Es ist dieses als ein Analogon zu der erwähnten Beobachtung aufzufassen, dass die Nobili'schen Ringe die Begrenzung der Platte nicht immer senkrecht schnitten. Dieser Ring war die äusserste und zugleich die einzige messbare Curve, welche die beiden Electroden ($x = \pm 1$, $y = 0$) umschloss. Die weiteren durch Messung an dieser Curve erhaltenen Resultate sind in der folgenden

1) Ich möchte auf diesen Punkt besonders hinweisen, weil Hr. Guébhard seine Bedeutung nirgends hervorhebt. Vielmehr sagt er z. B. bei der Erläuterung seiner für den vorliegenden Fall gezeichneten Figur: „La figure représente d'une manière complète, avec les lignes d'écoulement, le réseau dont le jeune docteur de Göttingen n'avait esquissé que trois ou quatre fragments [vgl. Fig. 5], tandis que je le réalise à volonté tel quel, ou double, ou quadruple, avec les anneaux colorés, sur un quart, un demi-plan ou un plan indéfini.“ Die Figur des Hrn. Guébhard enthält 26 Curven, von diesen liegen höchstens elf in dem Bereich der Farbenringe der mir vorliegenden Platten, und von diesen sechs oder sieben in dem von mir untersuchten Flächenstück, doch ist die Vertheilung über dasselbe hier eine weit ungünstigere als bei meinen Versuchen.

2) A. Guébhard, Comp. rend. Juillet 3. 1882.

Tabelle mit den entsprechenden Werthen der durch $(x=0, y=0)$ verlaufenden Aequipotentiallinie zusammengestellt, die Einheit ist zu 25 mm angenommen, und alle Zahlen der Tabellen beziehen sich auf Millimeter. Zur Abkürzung werde ich im Folgenden das System der Curven um die Electroden $(x=\pm 1, y=0)$ mit I, das um $(x=0, y=\pm 1)$ mit II und das um $(x=\pm\sqrt{3}, y=0)$ mit II′ bezeichnen und die Ringe vom äussersten fortlaufend nach der umschlossenen Electrode hin zählen. Die Messungen wurden in homogenem Lichte mit dem Comparator in jedem Quadranten der unendlichen Ebene ausgeführt, und aus den so erhaltenen, sehr gut übereinstimmenden Werthen das Mittel in die folgenden Tabellen aufgenommen.

Curve I 1.

x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz
0,0	0,0	0,0	—
10,0	9,48	8,01	1,47
15,0	13,22	11,69	1,53
20,0	15,61	14,42	1,19
25,0	16,28	15,44	0,84
30,0	14,68	13,35	1,33
34,10	—	0,0	} 1,26
35,36	0,0	—	

Bei meinen galvanometrischen Bestimmungen habe ich diese Curve zwar nicht untersucht, aber zwei andere, welche sich dieser nahe anschliessen, nämlich die, welche durch $(x=0, y=0{,}2)$, und die, welche durch $(x=0{,}2, y=0)$ hindurchgeht. Es sind das die Fig. 5 mit 4 und 5 bezeichneten Curven, sie schliessen die Curve I 1 von beiden Seiten her ein, und man wird daher annehmen dürfen, dass, wenn auch I 1 auf galvanometrischem Wege bestimmt worden wäre, die dabei begangenen Fehler nicht grösser gewesen sein würden als bei den Curven 4 und 5. Unter dieser Voraussetzung theile ich in der folgenden Tabelle einige meiner früheren Beobachtungen mit zur Vergleichung der Genauigkeit der Niveaucurvenbestimmung nach der einen und der anderen Methode; zur Reduction auf das hier zu Grunde liegende Maass dividire ich die früheren Beobachtungen durch 2.

	Curve 4.			Curve 5.		
x	y ber.	y beob.	Differenz	y ber.	y beob.	Differenz
0,0	5,00	—	—	—	—	—
5,0	7,00	6,79	0,21	0,0	—	—
10,0	10,73	10,88	−0,15	8,12	8,30	−0,18
15,0	14,25	14,21	0,04	12,19	12,63	−0,44
20,0	16,64	16,55	0,09	14,63	14,89	−0,26
25,0	17,36	17,12	0,24	15,23	15,44	−0,21
27,5	17,02	16,84	0,18	14,72	14,87	−0,15

Man wird keinen Anstand nehmen, die Uebereinstimmung der galvanometrisch bestimmten Niveaucurven mit den berechneten als eine befriedigende zu bezeichnen; die Uebereinstimmung der Intensitätcurve I 1 mit der Niveaulinie I 1 dagegen ist eine weit geringere, und man wird wohl noch von einer Aehnlichkeit, aber schwerlich von einem Zusammenfallen dieser beiden Curven sprechen dürfen. Die Intensitätscurve I 1 stimmt über den grössten Theil ihrer Erstreckung hin weit besser zu der genannten Curve 5 als zur Niveaulinie I 1; dieses tritt deutlich in Fig. 7 hervor, wo ich mit dem Ring I 1 die Niveaulinie 5 zusammengezeichnet habe; ich habe hier wie auch in den folgenden Figuren immer nur den vierten Theil der betreffenden Linien gezeichnet, es ist unmittelbar ersichtlich, wie dieselben zu ergänzen sind.

6) Bei den Curvensystemen II und II′ dehnten sich die äussersten Ringe bei ihrer Entfernung von den Electroden sehr rasch zu breiten Bändern aus, sodass die Messungen nur über einen kleinen Theil ihres Verlaufs ausgedehnt werden konnten. Die Resultate sind diese:

	Curve II 1				Curve II′1		
x	y der Niveau-curve	y der Intensi-tätscurve	Diffe-renz	x	y der Niveau-curve	y der Intensi-tätscurve	Diffe-renz
0,0	17,48	17,48	—	39,2	0,0	0,0	—
5,0	18,96	19,10	−0,14	40,0	3,41	3,75	−0,34
10,0	24,73	24,71	0,02	45,0	8,49	9,59	−1,10
				50,0	10,36	12,59	−2,23

Hiernach zeigt II 1, soweit sie gemessen werden konnte, eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen Niveau- und Intensitätscurve; II′ 1 dagegen nicht.

Bei der Annäherung an die Electroden kommen wir zu folgenden Curven.

Curve I 2.				Curve I 3.			
x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz	x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz
7,74	0,0	0,0	—	—	—	—	—
10,0	6,06	5,18	0,88	10,0	0,0	0,0	—
15,0	10,87	10,03	0,84	15,0	9,05	8,44	0,61
20,0	13,44	12,90	0,54	20,0	11,92	11,42	0,50
25,0	14,00	13,62	0,38	25,0	12,51	12,30	0,21
30,0	12,06	11,44	0,62	30,0	10,34	10,04	0,30
33,53	—	0,0	} 1,01	33,23	—	0,0	} 0,72
34,54	0,0	—		33,95	0,0	—	

Curve I 4.

x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz	x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz
11,92	0,0	0,0	—	30,0	8,81	8,94	−0,13
15,0	7,12	6,75	0,37	32,95	—	0,0	} 0,33
20,0	10,43	10,34	0,09	33,28	0,0	—	
25,0	11,16	11,23	−0,07				

Curve II 2.				Curve II′ 2.			
x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz	x	y der Niveaucurve	y der Intensitätscurve	Differenz
0,0 {	18,36	18,36	—	39,4	0,0	0,0	—
	40,22	41,70	−0,85	40,0	2,81	2,89	−0,08
5,0 {	20,09	20,02	0,07	45,0	7,62	8,12	−0,50
	38,63	39,71	−1,08	50,0	8,70	9,46	−0,76
10,0 {	kein Durchschnitt	27,96	—	55,0	7,43	8,13	−0,70
		34,52	—	59,52	—	0,0	} 0,07
9,41	30,0	—	} 1,29	59,59	0,0	—	
10,70	—	30,0					

Curve II 3.				Curve II′ 3.			
x	*y* der Niveaucurve	*y* der Intensitätscurve	Differenz	*x*	*y* der Niveaucurve	*y* der Intensitätscurve	Differenz
0,0	18,75	18,75	—	39,6	0,0	0,0	—
	38,13	37,82	0,31	40,0	2,16	2,29	−0,13
5,0	20,61	20,66	−0,05	45,0	6,86	7,15	−0,29
	36,39	36,32	0,07	50,0	7,21	7,77	−0,56
				55,0	3,91	4,27	−0,36
				55,90	—	0,0	0,29
				56,19	0,0	—	
Curve II 4.				Curve II′ 4.			
0,0	19,22	19,22	—	39,73	0,0	0,0	—
	36,12	35,91	0,21	40,0	1,45	1,17	0,28
5,0	21,27	21,27	0,00	45,0	6,30	6,77	−0,47
	34,14	34,12	0,02	50,0	6,28	6,66	−0,38
				54,02	—	0,0	0,57
				54,59	0,0	—	

Man erkennt hieraus, dass die Annäherung der Intensitätscurven an die entsprechenden Niveaucurven eine um so grössere ist, je näher jene Linien den Electroden liegen. Bei den Curven 2 ist die Abweichung zwischen den zusammenhörigen Curven noch eine ziemlich bedeutende, und man wird schliessen dürfen, dass auch zwischen den Curen II 1 in ihrem weiteren Verlauf eine bedeutende Abweichung hervortreten würde, wenn die Intensitätscurve weiterhin hätte genau gemessen werden können. Zur weiteren Erläuterung habe ich zunächst in Fig. 8 die Intensitätscurven I 1, II 2 und II′2 mit den entsprechenden Niveaucurven zusammengezeichnet, die ersteren punktirt, die letzteren durch ausgezogene Linien dargestellt. In Fig. 9 habe ich sodann unter der Annahme, dass die Curven I 4, II 3, II′ 4 und die weiter nach den Electroden hin liegenden Farbenringe sich den entsprechenden Niveaucurven ebenso gut anschliessen als die betreffenden galvanometrisch bestimmten Curven constanten Potentials (die galvanometrischen Messungen sind in diesen Bezirken nicht mehr ganz von derselben Genauigkeit wie oben), die Bereiche abgegrenzt und schraffirt dargestellt, innerhalb welcher bei den mir gegebenen Platten die Nobili'schen Ringe mit den Niveaucurven der ebenen electri-

schen Strömung in der Metallplatte als zusammenfallend betrachtet werden können. Diese Bereiche bedecken nur einen kleinen Theil der unendlichen Ebene, und der Verlauf der Niveaulinien in diesen Gebieten ist von verhältnissmässig geringem Interesse, da man von vorn herein weiss, dass in der Nähe der Electroden die Curven constanten Potentials Kreise, resp. Ovale sind.

8) Ich gebe gern zu, dass die Nobili'schen Farbenringe, wenn sie in der von Hrn. Guébhard vorgeschriebenen Weise erzeugt werden, einen ungefähren Ueberblick über den Verlauf der Niveaucurven für einen Theil der zu untersuchenden Fläche gewähren können; über den Grad der Uebereinstimmung zwischen dem System der Farbenringe und dem der Niveaulinien ist vorliegender Aufsatz ein Urtheil zu geben und in dieser Beziehung meine Dissertation zu ergänzen bestimmt. Von den Aequipotentialcurven sind aber die Nobili'schen Ringe principiell verschieden; ein Farbenring verbindet die Punkte, an denen in gleichen Zeiten gleiche Mengen von Zersetzungsproducten abgeschieden sind, also nach dem Faraday'schen Gesetze die Punkte, in denen die Intensität der Strömung dieselbe war, seiner Natur nach hat er also mit einer Aequipotentiallinie einer ebenen electrischen Strömung in der Platte gar nichts gemein.

9) Kürzlich hat Hr. Guébhard[1]) auf die Aenderung des Widerstandes im Schliessungskreise hingewiesen, welche durch die variable Schichtendicke der abgelagerten Zersetzungsproducte bedingt wird. Sollte hierdurch wirklich eine nachweisbare Widerstandsänderung veranlasst werden, so wird sie wahrscheinlich in einer Abnahme des Widerstandes bei wachsender Dicke der Schichten bestehen, für die Form der Farbenringe aber — und auf diese kommt es hier allein an — ist eine solche Aenderung ohne Einfluss; denn längs eines solchen Ringes wird an allen Punkten in gleichen Zeiten gleich viel abgelagert, die Dichtigkeit der Strömung ist also auch an allen Punkten des Ringes in demselben Augenblick dieselbe, und der Ring

1) A. Guébhard, Sur la théorie des figures équipotentielles obtenues par la méthode électrochimique. Compt. rend. **95.** 1882. Juillet 3.

stellt in jedem Augenblick eine Curre constanter Intensität der Strömung dar. — Ferner soll die Polarisation an der Metallplatte so stark sein, dass schon wenige Minuten nach Stromschluss ein Einströmen der Electricität in die Platte nicht mehr statt hat, letztere also an der Stromleitung keinen Antheil mehr nimmt. Auch ein solcher Zustand ist für die Ausbildung der Farbenringe ohne Bedeutung, denn sobald eine Strömung in die Platte nicht mehr erfolgt, kann auch an eine Abscheidung von Zersetzungsproducten, also auch an eine Formänderung der Ringe auf der Platte nicht mehr gedacht werden.

10) Was die Lage der Niveauflächen in dem Electrolyten und der Metallplatte und somit den Verlauf der Niveaucurven in der Grenzfläche anlangt, so kann man sich davon folgendermassen ein Bild machen. Bezeichnen wir alle Grössen, welche sich auf die Flüssigkeit beziehen, mit dem Index f, und alle auf die Metallplatte bezüglichen durch ein angehängtes m, und nehmen wir an, es liefen die Electroden durch die Flüssigkeit und die Metallplatte ganz hindurch. Dann ist in einiger Entfernung von der Grenzfläche:

$$V_f = \text{Const.}\frac{E_f}{k_f}\varphi(r_1, r_1', \ldots); \qquad V_m = \text{Const.}\frac{E_m}{k_m}\varphi(r_1, r_1', \ldots);$$

wenn V das Potential, E die einströmende Electricitätsmenge, k das specifische Leitungsvermögen und $\varphi(r_1, r_1' \ldots)$ eine Function der Entfernungen des variabeln Punktes von den Electroden bezeichnet. Ist nun in einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit $V_f = \gamma$, so ist in dem gegen die Electroden gleich gelegenen Punkte der Metallplatte:

$$V_m = \frac{k_f}{k_m}\cdot\frac{E_m}{E_f}\gamma;$$

oder wenn wir annehmen:

$$k_f = 2.10^{-6}, \qquad k_m = 10,$$

$$V_m = 2.10^{-7}\cdot\frac{E_m}{E_f}\gamma = a\gamma.$$

Denken wir uns nun für jeden Punkt den Werth V_f bestimmt und auf einer Verticalen zur Ebene von der Grenzfläche ab aufgetragen, so erhalten wir dadurch eine gewisse

krumme Fläche, welche sich bei unendlicher Annäherung an die Electroden ins Unendliche erstreckt, sonst aber ganz im Endlichen liegt. Der Durchschnitt dieser Fläche mit der xz-Ebene zwischen den beiden gleichnamigen Electroden $(x = \pm 1, y = 0)$ und den beiden ungleichnamigen $(x = +1, y = 0)$, $(x = +\sqrt{3},\ y = 0)$ ist in Fig. 10 durch die Curven 1 dargestellt. Eine Fläche von derselben Bedeutung für die Metallplatte erhalten wir, wenn wir für jeden Punkt von der Grenzfläche ab auf einer Verticalen den Werth $V_m = a V_f$ abtragen; in Fig. 10 ist der Durchschnitt dieser Fläche mit der xz-Ebene durch die Curven 2 dargestellt, indem die Richtung der Verticalen hier in entgegengesetztem Sinne als positiv betrachtet wurde, wie vorhin, und, um eine einigermassen deutliche Zeichnung zu erhalten, $a = 0{,}01$ angenommen wurde; in Wirklichkeit ist a zweifellos viel kleiner. Mit Hülfe dieser beiden Curven ist es nun leicht, zu jedem Punkt der Flüssigkeit einen Punkt in der Metallplatte zu bestimmen, welcher denselben Potentialwerth besitzt, oder zu jedem Niveaucylinder in der Flüssigkeit einen solchen von gleichem Potential in dem Metall anzugeben. Man hat mit Hülfe der Curve 1 im Electrolyten das Potential α des beliebigen Cylinders A zu bestimmen und diesen Werth α nach entgegengesetzter Richtung auf derselben Verticalen abzutragen, von hier ziehe man eine Parallele zur x-Axe, dann liefert der Durchschnitt dieser Parallelen mit der Curve 2 den Verticalcylinder B im Metall, welcher ebenfalls den Potentialwerth α besitzt. — Nicht viel anders werden sich die Verhältnisse gestalten, wenn die Electroden dicht über der Metallplatte enden, es wird dadurch nur der Factor a geändert werden, und es bleibt die Möglichkeit der Bestimmung der Cylinder A und B von gleichem Potentialwerthe bestehen. Je zwei solcher Cylinder sind dann zu verbinden durch eine Fläche, welche sich sehr wenig von der Grenzfläche der beiden Mittel abheben wird, und welche die Grenzfläche in einer Curve constanten Potentiales durchschneidet. In der Grenzfläche hat man nun:

$$k_f \frac{dV}{dz_f} = k_m \frac{dV}{dz_m}, \quad \text{woraus folgt:} \quad \frac{dz_f}{dz_m} = \frac{k_f}{k_m} = \frac{2}{10^7}.$$

Hieraus ergibt sich, dass die Fläche, welche die Cylinder *A* und *B* verbindet und mit diesen zusammen die ganze Fläche constanten Potentials repräsentirt, in der Oberfläche der Metallplatte eine solche Brechung erleidet, dass sie in der Flüssigkeit mit der Grenzfläche einen sehr viel kleineren Winkel bildet als im Metall (Fig. 11). Der Uebergang vom Cylinder *B* zu dem Cylinder *A* wird somit durch eine in der Grenzfläche äusserst nahe dem Cylinder *B* sich anschliessenden Curve stattfinden, sodass sich für den Durchschnitt der Flächen constanten Potentials mit der xz-Ebene die in Fig. 12 angedeutete Form ergibt. Die analytische Bestimmung dieser Flächen dürfte mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft sein, und Gleiches gilt natürlich für die Ermittelung der durch die Gleichung $dV/dz =$ const. bestimmten Nobili'schen Ringe.

Göttingen, physik. Inst. Oct. 1882.

IX. *Fernere Untersuchungen über die Abhängigkeit der Molecularrefraction flüssiger Verbindungen von ihrer chemischen Constitution; von H. Schröder.*

§ 1. In einer vorläufigen Mittheilung[1]), und ausführlich in einer der Kgl. Academie der Wissenschaften zu München am 5. Nov. 1881 vorgelegten Abhandlung, abgedruckt in deren Sitzungsberichten, und daraus in diesen Annalen[2]), habe ich nachgewiesen, dass sich sehr einfache Gesetze der Abhängigkeit der Molecularrefraction von der chemischen Zusammensetzung der Flüssigkeiten ergeben, wenn man, nach Landolt's und Brühls Vorgang, mit den empirischen Constanten $(\mu - 1)/\partial$, wo μ den Brechungsexponenten und ∂ die Dichtigkeit bezeichnet, die Molecularrefraction $P.(\mu - 1)/\partial$ berechnet, in welcher P das Moleculargewicht der Verbindung ausdrückt.

1) Schröder, Berl. Ber. **14.** p. 2483. 1881.
2) Schröder, Wied. Ann. **15.** p. 639—675. 1882.

Die Herren A. Lorentz[1]) und L. Lorenz[2]) sind auf theoretischem Wege, der erste durch Entwickelungen welche der electromagnetischen Lichttheorie, die zweite durch solche, welche der gewöhnlichen Aethertheorie entnommen sind, zu dem übereinstimmenden Resultate gelangt, dass der Werth $(\mu^2 - 1) / (\mu^2 + 2)\partial$ eine von der Temperatur unabhängige Constante sein müsse.

In einer der Kgl. Academie der Wissenschaften zu Berlin am 19. Jan. d. J. vorgelegten Abhandlung, reproducirt in Liebigs's Annalen[3]), hat nun Landolt gezeigt, dass die theoretische Formel $(\mu^2 - 1) / (\mu^2 + 2)\partial$ zu ganz den nämlichen Regeln zwischen chemischer Zusammensetzung und Lichtbrechung führt, wie sie von ihm und von Brühl für den empirischen Ausdruck $(\mu - 1) / \partial$ aufgestellt worden sind.

Auch E. Wiedemann[4]) macht darauf aufmerksam, dass man bei Untersuchungen über Brechungsverhältnisse die Lorenz'sche Constante zu Grund legen sollte.

Es war mir daher von grossem Werthe, zu prüfen, ob sich für die mit den Lorenz'schen Constanten berechneten Molecularrefractionen der Verbindungen auch die nämlichen einfachen Gesetzmässigkeiten ergeben würden, welche ich[5]) für die mit den empirischen Constanten $(\mu - 1) / \partial$ berechneten nachgewiesen habe. Ueber das Resultat dieser Untersuchungen habe ich schon im April d. J.[6]) eine vorläufige Mittheilung gegeben.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich nun darlegen, dass die nach den Lorenz'schen Constanten berechneten Molecularrefractionen Schritt für Schritt, nur noch präciser und schärfer, zu den nämlichen Resultaten führen, zu welchen ich schon früher gelangt war. Ebenso ergibt sich, dass es vortheilhafter ist, die wirklich beobachteten Brechungsexponenten bei der Rechnung anzuwenden, wie

---

1) A. Lorentz, Wied. Ann. **9.** p. 641. 1880.
2) L. Lorenz, Wied. Ann. **11.** p. 70. 1880.
3) Landolt, Lieb. Ann. **213.** p. 75—113. 1882.
4) E. Wiedemann, Berl. Ber. **15.** p. 470. 1882.
5) Schröder, Wied. Ann. **15.** p. 636—675. 1882.
6) Schröder, Berl. Ber. **15.** p. 904—998. 1882.

schon L. Lorenz[1]) hervorgehoben hat, als den für einen Strahl von unendlicher Wellenlänge daraus nach der Cauchy'schen Formel berechneten Exponenten *A*.

Ich werde daher die erwähnten Gesetze nachweisen für den wirklich beobachteten Strahl von grösster und von kleinster Wellenlänge, also für die rothe und für die violette Wasserstofflinie, und dabei die nach der Lorenz'schen Constanten berechnete Molecularrefraction $P.(\mu^2-1)/(\mu^2+2)\partial$ für den rothen Wasserstoffstrahl μ_α mit Mr. μ_α^2, für den violetten μ_γ mit Mr. μ_γ^2 bezeichnen, die mit den Constanten $(\mu-1)/\partial$ berechneten Molecularrefractionen aber entsprechend mit Mr. μ_α und Mr. μ_γ. Ich werde mich dabei zunächst, wie in meiner früheren Untersuchung, auf Benutzung der von Brühl[2]) in sechs Tafeln zusammengestellten Werthe aus seinen und Landolt's Beobachtungen, da sie untereinander völlig vergleichbar sind, beschränken. Eine Beobachtung von Landolt bezeichne ich kurz durch Nebensetzung des Buchstaben *L*, eine solche von Brühl durch Nebensetzung von Br.

§ 2. Es ergeben sich für die Molecularrefraction Mr. μ^2 ganz ebenso, wie für die Mr. μ die nachfolgenden sieben fundamentalen Thatsachen:

1. Das Refractionsmaass wächst im allgemeinen mit dem Moleculargewicht.

2. In jeder Verbindung hat das Carbonyl CO den nämlichen Einfluss auf die Molecularrefraction, wie das Methylen CH_2.

3. Der Einfluss von O_2, d. h. der zwei Atome Sauerstoff des Carboxyls einer Säure, und der Einfluss von O_2 eines Esters auf die Molecularrefraction ist ganz der nämliche, wie der Einfluss von CH_2.

4. Die Gruppe OH_2 der Alkohole übt den nämlichen Einfluss aus wie CH_2.

5. Der Einfluss des Sauerstoffatoms im Hydroxyl OH auf eine Verbindung ist der dritte Theil des Einflusses von CH_2.

6. Aus dem Zusammenhange der erwähnten Thatsachen

1) Lorenz, Wied. Ann. **11.** p. 88 u. 101. 1880.
2) Brühl, Lieb. Ann. **203.** 1880.

folgt, dass in den gesättigten Verbindungen die Atomrefractionen des Kohlenstoffs, des Wasserstoffs und des einwerthig verketteten Sauerstoffs einander gleich sind.

Nennt man diese Atomrefraction eine Refractionsstere, oder kurz eine Stere, so kommen also dem Kohlenstoff-, Wasserstoff- und einwerthig verketteten Sauerstoffatom je eine Stere, dem zweiwerthig an ein Kohlenstoffatom gebundenen Sauerstoffatom in CO aber zwei Steren zu.

Drückt man die Sterenzahl durch eine Zahl rechts oben neben dem Zeichen des Elementes, wie die Atomzahl durch eine Zahl rechts unten neben dem Zeichen des Elementes aus, so erhält man die Formeln, welche die Refractionsconstitution ausdrücken.

7. In den ungesättigten Verbindungen haben die mehrfach untereinander verketteten Kohlenstoffatome die Atomrefraction C_1^2, also die doppelte von derjenigen, welche den einfach verketteten Kohlenstoffatomen eigen ist.

§ 3. Alle die oben erwähnten sieben Thatsachen lassen sich aus den Molecularrefractionen Mr.μ_α^2 und Mr.μ_γ^2 ganz ebenso ableiten, wie ich dies früher l. c. für die Mr.μ_A bewiesen habe.

Ich nehme Anstand, diese ganze Untersuchungsmethode für die neuen Werthe hier ebenso ausführlich vorzulegen. Ich halte es statt dessen für nützlicher und förderlicher, sämmtliche im § 1 näher bezeichnete Verbindungen, mit Angabe ihrer Refractionsconstitution nach ihrer Sterenzahl, und bei gleicher Sterenzahl nach ihrer Sterengrösse für den rothen Strahl μ_α geordnet, in zwei Tafeln mitzutheilen, deren erste nach Sterenzahl und Sterengrösse geordnet die Molecularrefractionen Mr.μ_α^2 und Mr.μ_γ^2 und Mr. A^2, deren zweite die Molecularrefractionen Mr.μ_α und Mr.μ_γ und Mr. A enthält. In Bezug auf die Ableitung der Sterenzahl aus der chemischen Constitution muss ich auf meine erste Abhandlung l. c. verweisen, da sie völlig unverändert bleibt.

Ich kann alles Folgende viel kürzer darstellen, indem ich mich meist lediglich auf diese Tafeln zu beziehen und nicht alle Werthe zu reproduciren habe.

Tabelle I.

		Mr. μ_a^2	Mr. μ_γ^2	Mr. A.^{2}
1. Methylalkohol	$= C_1{}^1H_4{}^4O_1{}^1$	8,16 L. = 6 × 1,360	8,349 L. = 6 × 1,391	8,01 L. = 6 × 1,335.
2. Ameisensäure	$= C_1{}^1H_2{}^2O_2{}^3$	8,52 L. = 6 × 1,420	8,751 L. = 6 × 1,458	8,34 L. = 6 × 1,390.
3. Aethylaldehyd	$= C_2{}^2H_4{}^4O_1{}^2$	11,50 L. = 8 × 1,438	11,81 L. = 8 × 1,475	11,27 L. = 8 × 1,409.
4. Aethylalkohol	$= C_2{}^2H_6{}^6O_1{}^1$	12,71 L. = 9 × 1,412	13,00 L. = 9 × 1,444	12,47 L. = 9 × 1,386.
5. Essigsäure	$= C_2{}^2H_4{}^4O_2{}^3$	12,93 L. = 9 × 1,437	13,25 L. = 9 × 1,472	12,67 L. = 9 × 1,408.
6. Aethylenalkohol	$= C_2{}^2H_6{}^6O_2{}^2$	14,33 L. = 10 × 1,433	14,66 L. = 10 × 1,466	14,07 L. = 10 × 1,407.
7. Propargylalkohol	$= C_3{}^6H_4{}^4O_1{}^1$	14,83 Br. = 11 × 1,348	15,28 Br. = 11 × 1,389	14,48 Br. = 11 × 1,316.
8. Propylaldehyd	$= C_3{}^3H_6{}^6O_1{}^2$	15,93 Br. = 11 × 1,448	16,34 Br. = 11 × 1,485	15,61 Br. = 11 × 1,419.
9. Acroleïn	$= C_3{}^5H_4{}^4O_1{}^2$	16,01 Br. = 11 × 1,455	16,74 Br. = 11 × 1,522	15,43 Br. = 11 × 1,403.
10. Aceton	$= C_3{}^3H_6{}^6O_1{}^2$	16,05 L. = 11 × 1,459	16,48 L. = 11 × 1,498	15,71 L. = 11 × 1,428.
11. Allylalkohol	$= C_3{}^5H_6{}^6O_1{}^1$	16,85 Br. = 12 × 1,404	17,39 Br. = 12 × 1,449	16,42 Br. = 12 × 1,368.
12. Propylalkohol	$= C_3{}^3H_8{}^8O_1{}^1$	17,42 Br. = 12 × 1,452	17,83 Br. = 12 × 1,486	17,09 Br. = 12 × 1,424.
13. Propionsäure	$= C_3{}^3H_6{}^6O_2{}^3$	17,42 L. = 12 × 1,452	17,84 L. = 12 × 1,487	17,09 L. = 12 × 1,424.
14. Isopropylalkohol	$= C_3{}^3H_8{}^8O_1{}^1$	17,44 Br. = 12 × 1,453	17,88 Br. = 12 × 1,490	17,12 Br. = 12 × 1,427.
15. Aethylformiat	$= C_3{}^3H_6{}^6O_2{}^3$	17,93 L. = 12 × 1,494	18,37 L. = 12 × 1,531	17,59 L. = 12 × 1,466.
16. Methylacetat	=	18,03 L. = 12 × 1,503	18,47 L. = 12 × 1,539	17,69 L. = 12 × 1,474.
17. Milchsäure	$= C_3{}^3H_6{}^6O_3{}^4$	19,09 L. = 13 × 1,'468	19,55 L. = 13 × 1,504	18,73 L. = 13 × 1,441.
18. Methylal	$= C_3{}^3H_8{}^8O_2{}^2$	19,10 Br. = 13 × 1,469	19,54 Br. = 13 × 1,503	18,75 Br. = 13 × 1,442.
19. Allylchlorid	$= C_3{}^5H_5{}^5Cl_1{}^4$	20,31 Br. = 14 × 1,451	21,00 Br. = 14 × 1,500	19,78 Br. = 14 × 1,413.
20. Glycerin	$= C_3{}^3H_8{}^8O_3{}^3$	20,41 L. = 14 × 1,458	20,86 L. = 14 × 1,490	20,06 L. = 14 × 1,433.
21. Butylaldehyd	$= C_4{}^4H_8{}^8O_1{}^2$	20,52 Br. = 14 × 1,466	21,04 Br. = 14 × 1,503	20,11 Br. = 14 × 1,436.
22. Isobutylaldehyd	=	20,56 Br. = 14 × 1,469	21,09 Br. = 14 × 1,506	20,15 Br. = 14 × 1,439.
23. Propylchlorid	$= C_3{}^3H_7{}^7Cl_1{}^4$	20,75 Br. = 14 × 1,482	21,27 Br. = 14 × 1,519	20,35 Br. = 14 × 1,454.
24. Aethylenchlorid	$= C_2{}^2H_4{}^4Cl_2{}^8$	20,92 Br. = 14 × 1,494	21,46 Br. = 14 × 1,533	20,49 Br. = 14 × 1,464.
25. Aethylidenchlorid	=	21,08 Br. = 14 × 1,506	21,78 Br. = 14 × 1,556	20,64 Br. = 14 × 1,474.
26. Methacrylsäure	$= C_4{}^6H_6{}^6O_2{}^3$	21,80 Br. = 15 × 1,453	22,60 Br. = 15 × 1,507	21,17 Br. = 15 × 1,411.
27. Isobutylalkohol	$= C_4{}^4H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	21,96 L. = 15 × 1,464	22,47 L. = 15 × 1,499	21,55 L. = 15 × 1,437.

		Formel	Mr. $\mu_a{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$	Mr. $A.^2$
28.	Butylalkohol	= $C_4{}^4H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	22,01 Br. = 15 × 1,467	22,53 Br. = 15 × 1,502	21,60 Br. = 15 × 1,440.
29.	Buttersäure	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	22,01 L. = 15 × 1,467	22,55 L. = 15 × 1,503	21,60 L. = 15 × 1,440.
30.	Isobuttersäure	=	22,05 Br. = 15 × 1,469	22,56 Br. = 15 × 1,504	21,61 Br. = 15 × 1,441.
31.	Trimethylcarbinol	= $C_4{}^4H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	22,09 Br. = 15 × 1,473	22,62 Br. = 15 × 1,508	21,68 Br. = 15 × 1,445.
32.	Aethylacetat	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	22,14 L. = 15 × 1,476	22,67 L. = 15 × 1,511	21,72 L. = 15 × 1,448.
33.	Essigsäureanhydrid	= $C_4{}^4H_6{}^6O_3{}^5$	22,27 L. = 15 × 1,485	22,82 L. = 15 × 1,521	21,83 L. = 15 × 1,455.
34.	Aethyläther	= $C_4{}^4H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	22,31 L. = 15 × 1,487	22,86 L. = 15 × 1,524	21,89 L. = 15 × 1,459.
35.	Valerylen	= $C_5{}^9H_8{}^8$	24,16 Br. = 17 × 1,421	24,99 Br. = 17 × 1,470	23,52 Br. = 17 × 1,384.
36.	Propargyläthyläther	= $C_5{}^8H_8{}^8O_1{}^1$	24,54 Br. = 17 × 1,444	25,23 Br. = 17 × 1,484	24,00 Br. = 17 × 1,412.
37.	Propargylacetat	= $C_5{}^8H_6{}^6O_2{}^3$	24,57 Br. = 17 × 1,445	25,27 Br. = 17 × 1,486	24,02 Br. = 17 × 1,413.
38.	Amylen	= $C_5{}^7H_{10}{}^{10}$	24,64 Br. = 17 × 1,449	25,38 Br. = 17 × 1,493	24,06 Br. = 17 × 1,415.
39.	Isovaleraldehyd	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_1{}^2$	25,31 L. = 17 × 1,489	25,96 L. = 17 × 1,527	24,80 L. = 17 × 1,459.
40.	Benzol	= $C_6{}^{12}H_6{}^6$	25,93 Br. = 18 × 1,441	27,11 Br. = 18 × 1,506	24,99 Br. = 18 × 1,388.
41.	Allylacetat	= $C_5{}^7H_8{}^8O_2{}^3$	26,26 Br. = 18 × 1,459	27,03 Br. = 18 × 1,502	25,64 Br. = 18 × 1,424.
42.	Allyläthyläther	= $C_5{}^7H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	26,39 Br. = 18 × 1,466	27,17 Br. = 18 × 1,509	25,76 Br. = 18 × 1,431.
43.	Isoamylalkohol	= $C_5{}^5H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	26,59 L. = 18 × 1,477	27,24 L. = 18 × 1,513	26,09 L. = 18 × 1,449.
		. . . .	26,62 Br. = 18 × 1,479	27,26 Br. = 18 × 1,514	26,13 Br. = 18 × 1,452.
44.	Isovaleriansäure	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	26,72 L. = 18 × 1,484	27,38 L. = 18 × 1,521	26,21 L. = 18 × 1,456.
45.	Chloressigester	= $C_4{}^4H_7{}^7Cl_1{}^4O_2{}^3$	26,79 Br. = 18 × 1,488	27,44 Br. = 18 × 1,524	26,28 Br. = 18 × 1,460.
46.	Propyläthyläther	= $C_5{}^5H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	26,79 Br. = 18 × 1,488	27,45 Br. = 18 × 1,525	26,28 Br. = 18 × 1,460.
47.	Methylbutyrat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	26,79 L. = 18 × 1,488	27,43 L. = 18 × 1,524	26,29 L. = 18 × 1,461.
48.	Propylacetat	=	26,83 Br. = 18 × 1,491	27,47 Br. = 18 × 1,526	26,32 Br. = 18 × 1,462.
49.	Phenol	= $C_6{}^{12}H_6{}^6O_1{}^1$	27,75 L. = 19 × 1,461	29,05 L. = 19 × 1,529	26,72 L. = 19 × 1,406.
50.	Aethylcarbonat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_3{}^4$	28,22 Br. = 19 × 1,485	28,86 Br. = 19 × 1,519	27,72 Br. = 19 × 1,459.
51.	Diallyl	= $C_6{}^{10}H_{10}{}^{10}$	28,77 Br. = 20 × 1,438	29,77 Br. = 20 × 1,489	27,99 Br. = 20 × 1,400.
52.	Hexan	= $C_6{}^6H_{14}{}^{14}$	29,70 Br. = 20 × 1,485	30,43 Br. = 20 × 1,522	29,14 Br. = 20 × 1,457.
53.	Toluol	= $C_7{}^{13}H_8{}^8$	30,79 Br. = 21 × 1,466	32,15 Br. = 21 × 1,531	29,71 Br. = 21 × 1,415.
54.	Aethylbutyrat	= $C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$	31,20 L. = 21 × 1,486	31,95 L. = 21 × 1,521	30,63 L. = 21 × 1,459.
55.	Capronsäure	=	31,22 L. = 21 × 1,487	31,99 L. = 21 × 1,523	30,62 L. = 21 × 1,458.

			Mr. $\mu_\alpha{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$	Mr. A.^{2}
56. Aethylcrotonat	=	$C_6{}^8H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	31,36 Br. = 21 × 1,493	32,44 Br. = 21 × 1,545	30,50 Br. = 21 × 1,452.
57. Methylisovalerianat	=	$C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$	31,46 L. = 21 × 1,498	32,24 L. = 21 × 1,535	30,85 L. = 21 × 1,469.
58. Isoamylformiat	=	$C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$	31,66 L. = 21 × 1,508	32,43 L. = 21 × 1,544	31,06 L. = 21 × 1,479.
59. Aethylchlorpropionat	=	$C_5{}^5H_9{}^9Cl_1{}^4O_2{}^3$	31,53 Br. = 21 × 1,501	32,31 Br. = 21 × 1,539	30,92 Br. = 21 × 1,473.
60. Bittermandelöl	=	$C_7{}^{13}H_6{}^6O_1{}^2$	31,77 L. = 21 × 1,513	33,62 L. = 21 × 1,601	30,29 L. = 21 × 1,442.
61. Acetessigester	=	$C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_3{}^5$	31,89 Br. = 21 × 1,519	32,74 Br. = 21 × 1,559	31,22 Br. = 21 × 1,487.
62. Aethylenacetat	=	$C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_4{}^5$	31,91 L. = 21 × 1,520	32,70 L. = 21 × 1,557	31,30 L. = 21 × 1,490.
63. Benzylalkohol	=	$C_7{}^{13}H_8{}^8O_1{}^1$	32,23 Br. = 22 × 1,465	33,60 Br. = 22 × 1,527	31,14 Br. = 22 × 1,416.
64. Paraldehyd	=	$C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_3{}^4$	32,40 Br. = 22 × 1,473	33,11 Br. = 22 × 1,505	31,85 Br. = 22 × 1,448.
65. Acetal	=	$C_6{}^6H_{14}{}^{14}O_2{}^2$	32,88 Br. = 22 × 1,495	33,65 Br. = 22 × 1,529	32,27 Br. = 22 × 1,467.
66. Aethyloxalat	=	$C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_4{}^6$	33,39 Br. = 22 × 1,516	34,22 Br. = 22 × 1,555	32,74 Br. = 22 × 1,488.
67. Salicylaldehyd	=	$C_7{}^{13}H_6{}^6O_2{}^3$	34,03 L. = 22 × 1,546	36,72 L. = 22 × 1,669	31,87 L. = 22 × 1,449.
68. Oenanthol	=	$C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_1{}^2$	34,20 Br. = 23 × 1,487	35,03 Br. = 23 × 1,523	33,56 Br. = 23 × 1,459.
69. Oenanthsäure	=	$C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	35,85 L. = 24 × 1,494	36,74 L. = 24 × 1,531	35,17 L. = 24 × 1,465.
70. Aethylisovalerianat	=	. . . .	35,98 L. = 24 × 1,499	36,86 L. = 24 × 1,536	35,31 L. = 24 × 1,471.
71. Aethylchlorbutyrat	=	$C_6{}^6H_{11}{}^{11}Cl_1{}^4O_2{}^3$	36,39 Br. = 24 × 1,516	37,29 Br. = 24 × 1,554	35,68 Br. = 24 × 1,487.
72. Isoamylacetat	=	$C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	36,95 L. = 24 × 1,540	37,84 L. = 24 × 1,577	36,25 L. = 24 × 1,510.
73. Methylbenzoat	=	$C_8{}^{14}H_8{}^8O_2{}^3$	37,55 L. = 25 × 1,502	39,28 L. = 25 × 1,571	36,17 L. = 25 × 1,447.
74. Methylhexylketon	=	$C_8{}^8H_{16}{}^{16}O_1{}^2$	39,07 Br. = 26 × 1,503	40,04 Br. = 26 × 1,540	38,30 Br. = 26 × 1,473.
75. Methylsalicylsäure	=	$C_8{}^{14}H_8{}^8O_3{}^4$	39,80 L. = 26 × 1,532	42,09 L. = 26 × 1,619	37,98 L. = 26 × 1,461.
76. Mesitylen	=	$C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}$	40,33 Br. = 27 × 1,494	41,96 Br. = 27 × 1,554	39,05 Br. = 27 × 1,446.
77. Methylhexylcarbinol	=	$C_8{}^8H_{18}{}^{18}O_1{}^1$	40,35 Br. = 27 × 1,494	41,32 Br. = 27 × 1,530	39,59 Br. = 27 × 1,466.
78. Phenylpropylalkohol	=	$C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	41,75 Br. = 28 × 1,491	43,52 Br. = 28 × 1,554	40,34 Br. = 28 × 1,441.
79. Aethylbenzoat	=	$C_9{}^{15}H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	42,20 L. = 28 × 1,507	44,07 L. = 28 × 1,574	40,73 L. = 28 × 1,455.
80. Isoamylisovalerianat	=	$C_{10}{}^{10}H_{20}{}^{20}O_2{}^3$	49,72 L. = 33 × 1,507	50,93 L. = 33 × 1,543	48,76 L. = 33 × 1,478.
81. Hydrozimmtsäureester	=	$C_{11}{}^{17}H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	50,85 Br. = 34 × 1,495	52,71 Br. = 34 × 1,550	49,39 Br. = 34 × 1,453.
82. Triäthylcitrat	=	$C_{12}{}^{12}H_{20}{}^{20}O_7{}^{10}$	64,36 Br. = 42 × 1,532	66,00 Br. = 42 × 1,571	63,08 Br. = 42 × 1,502.
83. Tetráthylcitrat	=	$C_{14}{}^{14}H_{24}{}^{24}O_7{}^{10}$	73,52 Br. = 48 × 1,532		71,97 Br. = 48 × 1,498.

Tabelle II.

			Mr. μ_α	Mr. μ_γ	Mr. A.
1.	Methylalkohol	$= C_1\,^1H_4\,^4O_1\,^1$	13,19 L. = 6 × 2,199	13,52 L. = 6 × 2,253	12,93 L. = 6 × 2,155.
2.	Ameisensäure	$= C_1\,^1H_2\,^2O_2\,^3$	13,94 L. = 6 × 2,323	14,36 L. = 6 × 2,393	13,61 L. = 6 × 2,269.
3.	Aethylaldehyd	$= C_2\,^2H_4\,^4O_1\,^2$	18,61 L. = 8 × 2,326	19,14 L. = 8 × 2,392	18,18 L. = 8 × 2,272.
4.	Aethylalkohol	$= C_2\,^2H_6\,^6O_1\,^1$	20,73 L. = 9 × 2,303	21,26 L. = 9 × 2,362	20,31 L. = 9 × 2,257.
5.	Essigsäure	$= C_2\,^2H_4\,^4O_2\,^3$	21,15 L. = 9 × 2,350	21,74 L. = 9 × 2,416	20,69 L. = 9 × 2,299.
6.	Aethylenalkohol	$= C_2\,^2H_6\,^6O_2\,^2$	23,82 L. = 10 × 2,382	24,45 L. = 10 × 2,445	23,32 L. = 10 × 2,332.
7.	Acroleïn	$= C_3\,^5H_4\,^4O_1\,^2$	24,67 Br. = 11 × 2,243	27,76 Br. = 11 × 2,524?	25,31 Br. = 11 × 2,301.
8.	Propargylalkohol	$= C_3\,^6H_4\,^4O_1\,^1$	24,67 Br. = 11 × 2,243	25,52 Br. = 11 × 2,320	24,01 Br. = 11 × 2,183.
9.	Propylaldehyd	$= C_3\,^3H_6\,^6O_1\,^2$	26,00 Br. = 11 × 2,364	26,75 Br. = 11 × 2,432	25,42 Br. = 11 × 2,311.
10.	Aceton	=	26,16 L. = 11 × 2,378	26,93 L. = 11 × 2,448	25,55 L. = 11 × 2,323.
11.	Allylalkohol	$= C_3\,^5H_6\,^6O_1\,^1$	27,88 Br. = 12 × 2,323	28,88 Br. = 12 × 2,407	27,09 Br. = 12 × 2,258.
12.	Isopropylalkohol	$= C_3\,^3H_8\,^8O_1\,^1$	28,58 Br. = 12 × 2,382	29,33 Br. = 12 × 2,444	27,99 Br. = 12 × 2,333.
13.	Propylalkohol	=	28,60 Br. = 12 × 2,383	29,36 Br. = 12 × 2,447	28,00 Br. = 12 × 2,333.
14.	Propionsäure	$= C_3\,^3H_6\,^6O_2\,^3$	28,62 L. = 12 × 2,385	29,40 L. = 12 × 2,450	28,01 L. = 12 × 2,334.
15.	Aethylformiat	=	29,23 L. = 12 × 2,436	30,02 L. = 12 × 2,502	28,61 L. = 12 × 2,384.
16.	Methylacetat	=	29,41 L. = 12 × 2,451	30,21 L. = 12 × 2,517	28,78 L. = 12 × 2,398.
17.	Methylal	$= C_3\,^3H_8\,^8O_2\,^2$	31,08 Br. = 13 × 2,391	31,88 Br. = 13 × 2,452	30,46 Br. = 13 × 2,343.
18.	Milchsäure	$= C_3\,^3H_6\,^6O_3\,^4$	31,87 L. = 13 × 2,452	32,78 L. = 13 × 2,522	31,18 L. = 13 × 2,398.
19.	Allylchlorid	$= C_3\,^5H_5\,^5Cl_1\,^4$	33,64 Br. = 14 × 2,403	33,87 Br. = 14 × 2,419	32,63 Br. = 14 × 2,331.
20.	Isobuthylaldehyd	$= C_4\,^4H_8\,^8O_1\,^2$	33,64 Br. = 14 × 2,403	34,61 Br. = 14 × 2,472	32,89 Br. = 14 × 2,349.
21.	Butylaldehyd	=	33,68 Br. = 14 × 2,406	34,64 Br. = 14 × 2,474	32,93 Br. = 14 × 2,352.
22.	Propylchlorid	$= C_3\,^3H_7\,^7Cl_1\,^4$	34,11 Br. = 14 × 2,436	34,28 Br. = 14 × 2,449	33,36 Br. = 14 × 2,383.
23.	Glycerin	$= C_3\,^3H_8\,^8O_3\,^3$	34,39 L. = 14 × 2,456	35,28 L. = 14 × 2,520	33,70 L. = 14 × 2,407.
24.	Aethylidenchlorid	$= C_2\,^2H_4\,^4Cl_2\,^8$	34,92 Br. = 14 × 2,494	35,11 Br. = 14 × 2,508	34,10 Br. = 14 × 2,436.
25.	Aethylenchlorid	=	34,94 Br. = 14 × 2,496	35,13 Br. = 14 × 2,509	34,12 Br. = 14 × 2,437.
26.	Isobutylalkohol	$= C_4\,^4H_{10}\,^{10}O_1\,^1$	36,16 L. = 15 × 2,411	37,12 L. = 15 × 2,475	35,41 L. = 15 × 2,361.
27.	Aethylacetat	$= C_4\,^4H_8\,^8O_2\,^3$	36,22 L. = 15 × 2,415	37,19 L. = 15 × 2,479	35,46 L. = 15 × 2,364.

			Mr. μ_α	Mr. μ_γ	Mr. A.
28.	Isobuttersäure	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	36,25 Br. = 15 × 2,417	37,28 Br. = 15 × 2,483	35,48 Br. = 15 × 2,365.
29.	Methacrylsäure	= $C_4{}^6H_6{}^6O_2{}^3$	36,27 Br. = 15 × 2,418	37,77 Br. = 15 × 2,518	35,07 Br. = 15 × 2,338.
30.	Buttersäure	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	36,28 L. = 15 × 2,419	37,27 L. = 15 × 2,485	35,50 L. = 15 × 2,367.
31.	Butylalkohol	= $C_4{}^4H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	36,28 Br. = 15 × 2,419	37,24 Br. = 15 × 2,483	35,45 Br. = 15 × 2,363.
32.	Trimethylcarbinol	=	36,30 Br. = 15 × 2,420	37,28 Br. = 15 × 2,485	35,53 Br. = 15 × 2,369.
33.	Aethyläther	=	36,31 L. = 15 × 2,421	37,31 L. = 15 × 2,487	35,53 L. = 15 × 2,369.
34.	Essigsäureanhydrid	= $C_4{}^4H_6{}^6O_3{}^5$	36,63 L. = 15 × 2,442	37,66 L. = 15 × 2,511	35,82 L. = 15 × 2,388.
35.	Valerylen	= $C_5{}^9H_8{}^8$	39,85 Br. = 17 × 2,344	41,37 Br. = 17 × 2,434	38,65 Br. = 17 × 2,274.
36.	Amylen	= $C_5{}^7H_{10}{}^{10}$	40,35 Br. = 17 × 2,374	41,71 Br. = 17 × 2,454	39,29 Br. = 17 × 2,311.
37.	Propargyläthyläther	= $C_5{}^8H_8{}^8O_1{}^1$	40,51 Br. = 17 × 2,383	41,81 Br. = 17 × 2,459	39,50 Br. = 17 × 2,324.
38.	Propargylacetat	= $C_5{}^8H_6{}^6O_2{}^3$	40,75 Br. = 17 × 2,397	42,08 Br. = 17 × 2,475	39,71 Br. = 17 × 2,336.
39.	Isovaleraldehyd	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_1{}^2$	41,60 L. = 17 × 2,447	42,80 L. = 17 × 2,518	40,66 L. = 17 × 2,392.
40.	Allylacetat	= $C_5{}^7H_8{}^8O_2{}^3$	43,30 Br. = 18 × 2,406	44,80 Br. = 18 × 2,489	42,21 Br. = 18 × 2,345.
41.	Allyläthyläther	= $C_5{}^7H_{10}{}^{10}O_1{}^1$	43,35 Br. = 18 × 2,408	44,78 Br. = 18 × 2,488	42,20 Br. = 18 × 2,344.
42.	Propyläthyläther	= $C_5{}^5H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	43,80 Br. = 18 × 2,433	45,00 Br. = 18 × 2,500	42,86 Br. = 18 × 2,381.
43.	Isoamylalkohol	=	43,95 L. = 18 × 2,441	45,15 L. = 18 × 2,508	43,02 L. = 18 × 2,390.
		. . . .	43,99 Br. = 18 × 2,444	45,18 Br. = 18 × 2,510	43,06 Br. = 17 × 2,392.
44.	Benzol	= $C_6{}^{12}H_6{}^6$	44,03 Br. = 18 × 2,446	46,43 Br. = 18 × 2,579	42,16 Br. = 18 × 2,342.
45.	Methylbutyrat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	44,04 L. = 18 × 2,447	45,23 L. = 18 × 2,513	43,11 L. = 18 × 2,395.
46.	Propylacetat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	44,04 L. = 18 × 2,447	45,23 Br. = 18 × 2,513	43,11 Br. = 18 × 2,395.
47.	Isovaleriansäure	=	44,12 L. = 18 × 2,451	45,35 L. = 18 × 2,519	43,16 L. = 18 × 2,398.
48.	Chloressigester	= $C_4{}^4H_7{}^7Cl_1{}^4O_2{}^3$	44,47 Br. = 18 × 2,471	44,70 Br. = 18 × 2,483	43,51 Br. = 18 × 2,417.
49.	Aethylcarbonat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_3{}^4$	46,34 Br. = 19 × 2,439	47,53 Br. = 19 × 2,502	45,41 Br. = 19 × 2,390.
50.	Diallyl	= $C_6{}^{10}H_{10}{}^{10}$	47,45 Br. = 20 × 2,372	49,31 Br. = 20 × 2,466	45,99 Br. = 20 × 2,300.
51.	Phenol	= $C_6{}^{12}H_6{}^6O_1{}^1$	47,81 L. = 19 × 2,516	50,53 L. = 19 × 2,659	45,71 L. = 19 × 2,406.
52.	Hexan	= $C_6{}^6H_{14}{}^{14}$	48,63 Br. = 20 × 2,432	49,96 Br. = 20 × 2,498	47,59 Br. = 20 × 2,380.
53.	Aethylbutyrat	= $C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$	51,41 L. = 21 × 2,448	52,79 L. = 21 × 2,514	50,33 L. = 21 × 2,397.
54.	Capronsäure	=	51,70 L. = 21 × 2,462	53,15 L. = 21 × 2,531	50,56 L. = 21 × 2,408.
55.	Methylisovalerianat	= , . . .	51,80 L. = 21 × 2,467	53,25 L. = 21 × 2,536	50,67 L. = 21 × 2,413.

			Mr. μ_α	Mr. μ_γ	Mr. A.
56.	Aethylcrotonat	= $C_6{}^8H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	52,07 Br. = 21 × 2,480	54,15 Br. = 21 × 2,579	50,45 Br. = 21 × 2,402.
57.	Isoamylformiat	= $C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$	52,18 L. = 21 × 2,485	53,64 L. = 21 × 2,554	51,06 L. = 21 × 2,431.
58.	Toluol	= $C_7{}^{13}H_8{}^8$	52,20 Br. = 21 × 2,486	54,95 Br. = 21 × 2,617	50,06 Br. = 22 × 2,384.
59.	Aethylchlorpropionat	= $C_5{}^5H_9{}^9Cl_1{}^4O_2{}^3$	52,27 Br. = 21 × 2,489	53,75 Br. = 21 × 2,560	51,12 Br. = 21 × 2,434.
60.	Acetessigester	= $C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_3{}^5$	52,88 Br. = 21 × 2,518	54,50 Br. = 21 × 2,595	51,62 Br. = 21 × 2,458.
61.	Aethylenacetat	= $C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_4{}^5$	52,96 L. = 21 × 2,522	54,46 L. = 21 × 2,593	51,79 L. = 21 × 2,466.
62.	Bittermandelöl	= $C_7{}^{13}H_6{}^6O_1{}^2$	54,68 L. = 21 × 2,604	58,53 L. = 21 × 2,787	51,65 L. = 21 × 2,460.
63.	Paraldehyd	= $C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_3{}^4$	53,51 Br. = 22 × 2,432	54,83 Br. = 22 × 2,492	52,48 Br. = 22 × 2,385.
64.	Acetal	= $C_6{}^6H_{14}{}^{14}O_2{}^2$	53,93 Br. = 22 × 2,451	55,36 Br. = 22 × 2,516	52,82 Br. = 22 × 2,401.
65.	Aethyloxalat	= $C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_4{}^6$	55,22 Br. = 22 × 2,510	56,79 Br. = 22 × 2,581	54,00 Br. = 22 × 2,455.
66.	Benzylalkohol	= $C_7{}^{13}H_8{}^8O_1{}^1$	55,38 Br. = 22 × 2,517	58,24 Br. = 22 × 2,647	53,16 Br. = 22 × 2,416.
67.	Salicylaldehyd	= $C_7{}^{13}H_6{}^6O_2{}^3$	59,03 L. = 22 × 2,683	64,82 L. = 22 × 2,946	54,53 L. = 22 × 2,479.
68.	Oenanthol	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_1{}^2$	56,82 Br. = 23 × 2,470	58,39 Br. = 23 × 2,539	55,59 Br. = 23 × 2,417.
69.	Aethylisovalerianat	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	59,28 L. = 24 × 2,470	60,89 L. = 24 × 2,537	58,03 L. = 24 × 2,418.
70.	Oenanthsäure	=	59,50 L. = 24 × 2,479	61,22 L. = 24 × 2,551	58,19 L. = 24 × 2,425.
71.	Aethylchlorbutyrat	= $C_6{}^6H_{11}{}^{11}Cl_1{}^4O_2{}^3$	60,43 Br. = 24 × 2,518	62,15 Br. = 24 × 2,590	59,10 Br. = 24 × 2,463.
72.	Isoamylacetat	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	60,99 L. = 24 × 2,541	62,66 L. = 24 × 2,611	59,70 L. = 24 × 2,487.
73.	Methylbenzoat	= $C_8{}^{14}H_8{}^8O_2{}^3$	64,07 L. = 25 × 2,563	67,61 L. = 25 × 2,704	61,30 L. = 25 × 2,452.
74.	Methylhexylketon	= $C_8{}^8H_{16}{}^{16}O_1{}^2$	64,73 Br. = 26 × 2,490	66,56 Br. = 26 × 2,560	63,29 Br. = 26 × 2,434.
75.	Methylsalicylsäure	= $C_8{}^{14}H_8{}^8O_3{}^4$	68,30 L. = 26 × 2,627	73,06 L. = 26 × 2,810	64,59 L. = 26 × 2,484.
76.	Methylhexylcarbinol	= $C_8{}^8H_{18}{}^{18}O_1{}^1$	67,01 Br. = 27 × 2,482	68,86 Br. = 27 × 2,550	65,57 Br. = 27 × 2,429.
77.	Mesitylen	= $C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}$	68,29 Br. = 27 × 2,529	71,54 Br. = 27 × 2,650	65,75 Br. = 27 × 2,435.
78.	Phenylpropylalkohol	= $C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	71,65 Br. = 28 × 2,559	75,33 Br. = 28 × 2,690	68,79 Br. = 28 × 2,457.
79.	Aethylbenzoat	= $C_9{}^{15}H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	71,76 L. = 28 × 2,563	75,55 L. = 28 × 2,698	68,82 L. = 28 × 2,458.
80.	Isoamylisovalerianat	= $C_{10}{}^{10}H_{20}{}^{20}O_2{}^3$	82,26 L. = 33 × 2,493	84,56 L. = 33 × 2,562	80,48 L. = 33 × 2,439.
81.	Hydrozimmtsäurester	= $C_{11}{}^{17}H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	86,22 Br. = 34 × 2,536	89,95 Br. = 34 × 2,646	83,32 Br. = 34 × 2,451.
82.	Triaethylcitrat	= $C_{12}{}^{12}H_{20}{}^{20}O_7{}^{10}$	107,55 Br. = 42 × 2,561	110,71 Br. = 42 × 2,636	105,09 Br. = 42 × 2,502.
83.	Tetraethylcitrat	= $C_{14}{}^{14}H_{24}{}^{24}O_7{}^{10}$	122,96 Br. = 48 × 2,562	. . . .	119,97 Br. = 48 × 2,499.

Von den Chlorverbindungen nehme ich nur diejenigen auf, welche ein Chloratom zugleich mit Wasserstoff an ein Kohlenstoffatom gebunden enthalten. Das Chloratom hat in denselben die Refractionsconstitution Cl_1^4, d. h. es trägt vier Steren zur Molecularrefraction bei. Anderen Chlorverbindungen muss ich eine besondere Untersuchung widmen. Die Brom-, Jod- und Stickstoffverbindungen sind von Brühl bis jetzt nur in sehr geringer Zahl untersucht; ich lasse sie vorerst unberührt, denn es liegen noch zu wenige streng vergleichbare Beobachtungen vor, um die dabei auftretenden besonderen Beziehungen mit genügender Sicherheit zu ermitteln. (S. Tabelle I und II p. 152—157.)

§ 4. In Betreff der Tafel I, welche Mr. μ_α^2 und Mr. μ_γ^2 und Mr. A^2 enthält, muss ich auf die höchst werthvolle Thatsache aufmerksam machen, dass für Mr. μ_α^2 jede Substanz an ihrem Platze in der ganzen Reihe steht. Für jede Substanz ist die ihrer chemischen Constitution entsprechende, nach den oben (§ 2) erwähnten Gesetzen aus den Atomrefractionen der Elemente sich ergebende Sterenzahl angenommen; gleichwohl ergibt sich, dass keine Substanz, auch wenn sie n relativ grösste Steren hat, übergreift, d. h. eine Molecularrefraction Mr. μ_α^2 darbietet, welche grösser ist, als diejenige einer Substanz von $n + 1$ relativ kleinsten Steren. Es wird daher in Zukunft leicht sein, jede neu beobachtete Substanz an ihrer richtigen Stelle einzuordnen, sodass über ihre Refractionsconstitution und, dieser entsprechend, ihre chemische Constitution, soweit ein Zusammenhang zwischen beiden bisher schon ermittelt ist, ein Zweifel nicht übrig bleibt.

Für Mr. μ_γ^2 greifen nur über: Bittermandelöl, Salicylaldehyd und Methylsalicylsäure, welchen eine ungewöhnlich grosse Dispersion angehört.

Weil für Mr. μ_α^2 des rothen Strahls jede Substanz an ihrem richtigen Platze steht, ist ersichtlich, dass es für die nur aus den Elementen Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff bestehenden Kohlenverbindungen nicht nöthig ist, auf die Molecularrefraction für den idealen Strahl A von unendlicher Wellenlänge zurückzugreifen; doch werde ich § 22 nachweisen, dass es für die aromatischen Verbindungen bei

gewissen Untersuchungen dennoch recht nützlich ist, auch Mr. A^2 in Betracht zu ziehen.

Minder entsprechend für die aromatischen Substanzen erweisen sich Mr. μ_α und Mr. μ_γ der zweiten Tafel. Während für Mr. μ_α^2 (Tafel I) keine einzige, auch keine aromatische Substanz, ungeachtet ihrer grossen Dispersion, in ihrem Werthe über die folgende, eine Stere mehr enthaltende Gruppe übergreift, ist dies für Mr. μ_α (Tafel II) schon bei dreien: dem Phenol, dem Bittermandelöl und der Methylsalicylsäure, und bei dem Salicylaldehyd wenigstens sehr nahe der Fall.

Es ist hierdurch constatirt, dass die Lorenz'schen Constanten den Vorzug verdienen, für welche sich überhaupt viele Gesetzmässigkeiten entschieden genauer herausstellen. Es hängt dies damit zusammen, dass, wie schon Landolt l. c. hervorgehoben hat, sowohl die μ-Formeln als die μ^2-Formeln der Bedingung der Constanz bei verschiedenen Temperaturen der Beobachtung nur annähernd entsprechen, indem die μ-Formeln mit steigender Temperatur abnehmende, die μ^2-Formeln dagegen, jedoch in viel minderem Grade, zunehmende Werthe ergeben. Im Nachfolgenden werde ich vielfach nachweisen, dass es gerade aus diesem Grunde sehr werthvoll, ja nothwendig ist, die nach beiden Formeln berechneten Molecularrefractionen in Betracht zu ziehen.

I. Das Refractionsmaass homologer Substanzen wächst im allgemeinen mit dem Moleculargewicht.

§ 5. Die mit den Lorenz'schen Constanten berechneten Molecularrefractionen geben in dieser Beziehung ganz das gleiche Resultat, wie die mit den μ-Constanten berechneten Werthe; siehe meine erste Abhandlung.[1]) Da diese fundamentale Thatsache von so grosser Bedeutung ist, gebe ich die Belege für dieselbe ausführlich. Vergleicht man die Molecularrefraction der in ihrer Zusammensetzungsdifferenz um CH_2 fortschreitenden Glieder von Reihen homologer Verbindungen, so ergibt sich:

1) Schröder, Wied. Ann. 15. p. 642—644. 1882.

A. Für die normalen Säuren.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
1.	Ameisensäure	Mr. μ_α^2 = 8,52 L.	4,41.	Mr. μ_γ^2 = 8,75 L.	4,50.
	Essigsäure	„ „ = 12,93 L.	4,49.	„ „ = 13,25 L.	4,59.
	Propionsäure	„ „ = 17,42 L.	4,59.	„ „ = 17,84 L.	4,71.
	Buttersäure	„ „ = 22,01 L.		„ „ = 22,55 L.	

B. Für die normalen Alkohole.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
2.	Methylalkohol	Mr. μ_α^2 = 8,16 L.	4,55.	Mr. μ_γ^2 = 8,35 L.	4,65.
	Aethylalkohol	„ „ = 12,71 L.	4,71.	„ „ = 13,00 L.	4,83.
	Propylalkohol	„ „ = 17,42 Br.	4,59.	„ „ = 17,83 Br.	4,70.
	Butylalkohol	„ „ = 22,01 Br.		„ „ = 22,53 Br.	

Hier wächst das Refractionsmaass am raschesten vom zweiten zum dritten Glied.

C. Für die Aldehyde.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
3.	Aethylaldehyd	Mr. μ_α^2 = 11,50 L.	4,43.	Mr. μ_γ^2 = 11,81 L.	4,53.
	Propylaldehyd	„ „ = 15,93 Br.	4,59.	„ „ = 16,34 Br.	4,70.
	Butylaldehyd	„ „ = 20,52 Br.		„ „ = 21,04 Br.	

D. Für die Acetate.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
4.	Methylacetat	Mr. μ_α^2 = 18,03 L.	4,11.	Mr. μ_γ^2 = 18,47 L.	4,20.
	Aethylacetat	„ „ = 22,14 L.	4,69.	„ „ = 22,67 L.	4,80.
	Propylacetat	„ „ = 26,83 Br.		„ „ = 27,47 Br.	

E. Für die Aethylester.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
5.	Aethylformiat	Mr. μ_α^2 = 17,93 L.	4,21.	Mr. μ_γ^2 = 18,37 L.	4,30.
	Aethylacetat	„ „ = 22,14 L.	2 × 4,53.	„ „ = 22,67 L.	2 × 4,60.
	Aethylbutyrat	„ „ = 31,20 L.		„ „ = 31,95 L.	

F. Für die Aethylchlorester.

		Mr. μ_α^2	Δ	Mr. μ_γ^2	Δ
6.	Aethylchloracetat	Mr. μ_α^2 = 26,79 Br.	4,74.	Mr. μ_γ^2 = 27,44 Br.	4,87.
	Aethylchlorpropionat	„ „ = 31,53 Br.	4,76.	„ „ = 32,31 Br.	4,98.
	Aethylchlorbutyrat	„ „ = 36,39 Br.		„ „ = 37,29 Br.	

In all diesen sechs bis jetzt vergleichbaren Gruppen ist ein Wachsen der Differenz mit dem Moleculargewicht nachgewiesen.

§ 6. Vergleicht man die Zunahme der Molecularrefraction für einen Mehrgehalt an einem Sauerstoffatom, so ergibt sich für die Säuren und Aldehyde:

			Δ		Δ
1.	Essigsäure	Mr. μ_α^2 = 12,93 L.	1,43.	Mr. μ_γ^2 = 13,25 L.	1,44.
	Aethylaldehyd	„ „ = 11,50 L.		„ „ = 11,81 L.	
2.	Propionsäure	Mr. μ_α^2 = 17,42 L.	1,49.	Mr. μ_γ^2 = 17,84 L.	1,50.
	Propylaldehyd	„ „ = 15,93 Br.		„ „ = 16,34 Br.	
3.	Buttersäure	Mr. μ_α^2 = 22,05 Br.	1,53.	Mr. μ_γ^2 = 22,59 Br.	1,55.
	Butylaldehyd	„ „ = 20,52 Br.		„ „ = 21,04 Br.	

Die Differenzen wachsen mit dem Moleculargewicht. Die vorstehende lehrreiche Beziehung stellt überdies ausser Zweifel, dass die Zunahme des Refractionsmaasses mit dem Moleculargewicht sich nicht nur auf einzelne Bestandtheile einer Verbindung, sondern auf die Gesammtheit und auf jedes Atom derselben erstreckt, und das Nämliche folgt aus dem nachstehenden Paragraphen sieben.

§ 7. Vergleicht man die Zunahme für einen Eintritt von Chlor an die Stelle von Wasserstoff, so ergibt sich:

			Δ		Δ
1.	Aethylchloracetat	Mr. μ_α^2 = 26,79 Br.	4,65.	Mr. μ_γ^2 = 27,44 Br.	4,77.
	Aethylacetat	„ „ = 22,14 L.		„ „ = 22,67 L.	
2.	Aethylchlorbutyrat	Mr. μ_α^2 = 36,39 Br.	5,19.	Mr. μ_γ^2 = 37,29 Br.	5,34.
	Aethylbutyrat	„ „ = 31,20 L.		„ „ = 31,95 L.	

Die Differenzen wachsen mit dem Moleculargewicht.

Alle vorstehenden Thatsachen drücken die nämliche Gesetzmässigkeit aus. Die irrige Annahme von constanten Einflüssen der Elementaratome auf die Molecularrefraction ist aufzugeben. Man muss der Wahrheit die Ehre geben und anerkennen, dass sich die schon von Janovsky[1]) hervorgehobene Thatsache bestätigt: die Atomrefraction der Elemente in ihren Verbindungen ist in engen Grenzen variabel und abhängig von der Qualität und Quantität der im Molecül vorhandenen Atome.

Die Gesetze dieser Abhängigkeit zu ermitteln ist die Aufgabe fernerer Forschungen, und sehr wesentliches wird dazu im Folgenden schon beigetragen werden.

---

1) Janovsky, Wien. Ber. **81.** p. 539—553. 1880.

II. Metamere Substanzen, bei gleicher Temperatur, haben nicht völlig gleiche, sondern nur sehr genähert gleiche Molecularrefraction.

§ 8. Die Annahme constanter Einflüsse der Elementaratome gründet sich einerseits auf die Annahme constanter Differenzen der Molecularrefraction bei gleicher Zusammensetzungsdifferenz; diese findet aber nach dem Vorausgehenden nicht statt. Sie gründet sich andererseits auf die Annahme der Gleichheit der Molecularrefraction metamerer Substanzen von gleicher Inanspruchnahme der Valenz der Atome (Brühl). Aber auch diese Annahme ist nicht haltbar, da sich ganz regelmässige Unterschiede in der Molecularrefraction metamerer Substanzen unzweifelhaft herausstellen. Es ist dies zunächst zu erkennen für die zwei Gruppen: A. Säuren und metamere Ester; B. Normal- und Iso- oder Secundärverbindungen.

A. Säuren und metamere Ester.

§ 9. Wie nach Tafel I unmittelbar ersichtlich, ist Mr. μ_α^2 und Mr. μ_γ^2 und Mr. A^2:

für	Propionsäure	etwas	kleiner	als	für	Aethylformiat und Methylacetat,
„	Buttersäure	„	„	„	„	Aethylalcetat,
„	Valeriansäure	„	„	„	„	Methylbutyrat und Propylacetat,
„	Capronsäure	„	„	„	„	Methylvalerianat u. Amylformiat,
„	Oenanthsäure	„	„	„	„	Aethylvalerianat und Amylacetat.

Es liegt hierdurch klar vor Augen, dass für die μ^2-Formel das Refractionsmaass der Ester um einen geringen Betrag grösser beobachtet ist, als das der metameren Säuren.

Bedenkt man aber, dass, wie Landolt l. c. hervorgehoben hat, die μ^2-Formel Werthe liefert, welche mit steigender Temperatur sich etwas vergrössern, so führt die eben nachgewiesene Thatsache zu einer sehr bemerkenswerthen theoretischen Folgerung.

Da die Säuren um einige 40° höher sieden, als die ihnen isomeren Ester, so musste man, wenn man die Säuren und Ester bei correspondirenden Temperaturen, d. h. bei gleicher Spannkraft ihrer Dämpfe, also in streng vergleichbaren Zu-

ständen, beobachten wollte, die Molecularrefraction der Säuren bei höheren Temperaturen messen, als diejenige der Ester. Dann würde sich aber Mr. μ^2 der Säuren etwas grösser und voraussichtlich derjenigen ihrer isomeren Ester wirklich völlig gleich ergeben.

Man wird hierdurch zu der Folgerung geführt, dass die oben dargelegten Ungleichheiten lediglich eine Folge davon sind, dass die μ^2-Formel für verschiedene Temperaturen nur genähert constante Werthe gibt, und dass die Säuren und ihre isomeren Ester, bei correspondirenden Temperaturen beobachtet, wirklich gleiche Molecularrefraction ergeben würden.

§ 10. Ist diese Folgerung berechtigt, so müssen aber die mit der μ-Formel berechneten Molecularrefractionen, weil sie mit steigender Temperatur etwas abnehmen, bei gleicher Temperatur gemessen, für die Säuren etwas grössere Werthe darbieten als für die Ester.

Dies bestätigt sich in der That, wie aus Tafel II unmittelbar ersichtlich ist, denn hier ist Mr. μ_α und Mr. μ_γ und ebenso auch Mr. A:

für	Buttersäure	etwas	grösser	als	für	Aethylacetat und Propylacetat,
„	Valeriansäure	„	„	„	„	Methylbutyrat und Propylacetat,
„	Capronsäure	„	„	„	„	Aethylbutyrat,
„	Oenanthsäure	„	„	„	„	Aethylvalerianat.

Es geht aus vorstehenden Beziehungen die Regel wohl unzweifelhaft hervor. Wenn ein einzelner Ester damit nicht übereinstimmt, kann das nicht auffallen, weil die Differenzen die Grenzen der Beobachtungsfehler kaum übersteigen. Nur für das erste Paar: die Propionsäure und ihre metameren Ester findet das gleiche Verhältniss nicht statt aus Grund eines besonderen Verhaltens der Anfangsglieder der Reihen homologer Substanzen, hier der Formiate und der Methylester, worauf ich hier nicht näher eingehen will.

Für die Säuren und ihre metameren Ester geht also aus vorstehenden Beziehungen wenigstens von der Buttersäure ab hervor, dass sie, bei entsprechenden Temperaturen gemessen, wirklich gleiche Molecularrefraction darbieten würden.

B. Normalverbindungen und ihre Metameren.

§ 11. Zu ganz analogen Schlüssen führt die aufmerksame Erwägung der Mr. der Normalverbindungen und ihrer Metameren. Aus Tafel I ist unmittelbar ersichtlich, dass Mr. μ_α^2 und Mr. μ_γ^2, und ebenso Mr. A^2:

für Propylalkohol	etwas	kleiner	ist	als	für	Isopropylalkohol,
„ Butylaldehyd	„	„	„	„	„	Isobutylaldehyd,
„ Aethylenchlorid	„	„	„	„	„	Aethylidenchlorid,
„ Butylalkohol	„	„	„	„	„	Trimethylcarbinol,
„ Buttersäure	„	„	„	„	„	Isobuttersäure.

Wenn es für Butylalkohol und Isobutylalkohol nicht eintrifft, so liegt es wohl nur daran, dass das letztere Präparat, wie schon Brühl[1]) bemerkt hat, nicht völlig rein war. Für alle genannten Paare liegt der Siedepunkt der Normalverbindung höher; nur Propylaldehyd und Aceton, welche im nämlichen Verhältniss stehen, machen davon eine Ausnahme. Weil das Aceton höher siedet, wäre zu erwarten, dass seine Mr. μ^2 etwas kleiner sei als diejenige des Propylaldehyds, sie ist aber sehr wenig grösser beobachtet worden. Mit Ausnahme des Propylaldehyds und Acetons, welche wieder zu den Anfangsgliedern ihrer Reihen gehören, sind also alle in § 9 und 10 angewendeten Schlüsse auch hier gültig. Die Mr. der Normalverbindung müsste bei höherer Temperatur beobachtet werden, wenn sich die Temperaturen entsprechen sollten; sie würde dann etwas grösser und derjenigen der metameren gleich gefunden werden.

Ist der Schluss berechtigt, so muss auch hier die für die μ-Formel berechnete Mr. sich für die Normalverbindung etwas grösser ergeben, weil sie mit zunehmender Temperatur abnimmt. In der That ist dies der Fall, wie man für Mr. μ_α und Mr. μ_γ und ebenso Mr. A unmittelbar ersieht. Denn es ist Mr. μ_α und Mr. μ_γ und ebenso Mr. A:

für Propylalkohol	etwas	grösser	als	für	Isopropylalkohol,
„ Butylaldehyd	„	„	„	„	Isobutylaldehyd,
„ Aethylenchlorid	„	„	„	„	Aethylidenchlorid,
„ Butylalkohol	„	„	„	„	Isobutylalkohol.
„ Buttersäure	„	„	„	„	Isobuttersäure.

1) Brühl, Lieb. Ann. **203.** Nr. 282. 1880.

Das höher siedende Aceton hat auch eine etwas grössere Mr. als der Propylaldehyd, obwohl es nicht die normale Verbindung ist. Da die Differenzen kaum die Fehlergrenzen der Beobachtung überschreiten, kann es der Regel keinen Eintrag thun, wenn dieselbe nur für Butylalkohol und Trimethylcarbinol nicht eintrifft.

Es ist demnach der Schluss berechtigt: Bei correspondirenden Temperaturen beobachtet, haben die Normalverbindungen und ihre Metameren aller Wahrscheinlichkeit nach völlig gleiche Molecularrefraction.

Die vorstehenden theoretisch sehr werthvollen Resultate haben sich nur ergeben können, weil die Beobachtungen von Landolt und Brühl von bewunderungswürdiger Genauigkeit sind. Die hier angewendete Schlussweise über das Verhalten bei correspondirenden Temperaturen wird sich noch fernerhin bewähren und nützlich erweisen. Sie liefert zugleich den Nachweis, wie werthvoll, ja nothwendig es ist, sowohl Mr. μ als Mr. μ^2 in Betracht zu ziehen. Schon Landolt hat am Schlusse der erwähnten Abhandlung darauf hingewiesen, „dass man nunmehr im Stande ist, die optisch-chemischen Rechnungen auf zwei Arten auszuführen, welche sich controliren.“ Das Obige lehrt, dass sie sich auch ergänzen.

III. Die Atomrefractionen der Elemente Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff stehen in einfachen Verhältnissen.

§ 12. Es geht diese fundamentale Thatsache aus der ganzen Reihe der nachfolgenden Untersuchungen mit voller Sicherheit hervor.

IV. In jeder Verbindung hat CO den nämlichen Einfluss auf die Mr. wie CH_2.

§ 13. Aus beiden Tafeln ist unmittelbar ersichtlich, dass die Molecularrefractionen der nachfolgenden Paare entweder völlig identisch sind oder sich doch äusserst nahe liegen:

1. { Propionsäure $= C_3H_6O_2$.
{ Propylalkohol $= C_3H_8O$.

2. { Buttersäure $= C_4H_8O_2$.
{ Butylalkohol $= C_4H_{10}O$.

3.	Isobuttersäure	$= C_4H_8O_2$.	4.	Valeriansäure	$= C_5H_{10}O_2$.
	Isobutylalkohol	$= C_4H_{10}O$.		Amylalkohol	$= C_5H_{12}O$.
5.	Aethylacetat	$= C_4H_8O_2$.	6.	Propylacetat	$= C_5H_{10}O_2$.
	Aethyläther	$= C_4H_{10}O$.		Propyläthyläther	$= C_5H_{12}O$.
7.	Allylacetat	$= C_5H_8O_2$.	8.	Propargylacetat	$= C_5H_6O_2$.
	Allyläthyläther	$= C_5H_{10}O$.		Propargyläthyläther	$= C_5H_8O$.
9.	Aethylbenzoat	$= C_9H_{10}O_2$.	10.	Milchsäure	$= C_3H_6O_3$.
	Phenylpropylalkohol	$= C_9H_{12}O$.		Methylal	$= C_3H_8O_2$.
11.	Essigsäureanhydrid	$= C_4H_6O_3$.			
	Aethylacetat	$= C_4H_8O_2$.			

Für Milchsäure und Methylal Nr. 10 bestätigen sich wieder die Schlüsse von § 9 und 10. Für die höher kochende Milchsäure erscheint Mr.μ^2 etwas kleiner, Mr.μ aber etwas grösser als für Methylal. Bei correspondirenden Temperaturen beobachtet, würden also beide wohl völlig gleiche Mr. darbieten.

Wenn die Mr. für Ameisensäure etwas grösser sich ergibt, als diejenige für Methylalkohol, und, jedoch in viel minderem Grade, die Mr. von Essigsäure etwas grösser als diejenige von Aethylalkohol, so darf man bei der völligen Gleichheit von Mr.μ^2 für alle übrigen Säuren und Alkohole Nr. 1 bis 4 und für die Ester und Aether Nr. 5 bis 8 daraus nicht schliessen, dass CO einen durchschnittlich etwas grösseren Einfluss übe, als CH_2, sondern, nachdem die gesetzmässige Veränderlichkeit des Refractionsmaasses nachgewiesen ist, gibt man den Thatsachen einen richtigen Ausdruck nur dadurch, dass man anerkennt: Das Refractionsmaass der Alkohole ist anfangs niedriger, wächst aber rascher und wird schon vom dritten Glied an demjenigen der Säuren gleich.[1])

V. In den Säuren und Estern hat O_2, und in den Alkoholen hat HOH den nämlichen Einfluss auf die Molecularrefraction wie CH_2.

§ 14. Es lässt sich diese Thatsache für Mr.μ_α^2 und Mr.μ_γ^2 ganz ebenso ableiten, wie ich es für Mr.μ_A^2[2]) gethan

1) Schröder, Wied. Ann. **15.** p. 671. 1882. (§. 48).
2) Schröder, Wied. Ann. **15.** p. 647—650. 1882.

habe. Ich gehe hier nicht näher darauf ein, weil sich die Thatsache aus dem nachfolgenden indirect mit völlig genügender Sicherheit ergibt.

VI. Die Atomrefraction O in OH ist ein Drittheil des Einflusses von CH_2.

§ 15. Für die Mr. μ^2 stimmt das Refractionsmaass der Säuren und Aldehyde völlig überein, und der Aldehyd hat immer genau eine Stere weniger als die Säure, wenn für CH_2 und für O_2 der Säure drei Steren angenommen werden.

Man hat die nachfolgende Reihe äusserst lehrreicher Beziehungen:

			Mr. A^2	Mr. $\mu_\alpha{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$
1.	Essigsäure	= $C_2{}^2H_4{}^4O_2{}^3$	= 9 × 1,408	9 × 1,437	9 × 1,472.
	Aethylaldehyd	= $C_2{}^2H_4{}^4O_1{}^2$	= 8 × 1,409	8 × 1,438	8 × 1,476.
2.	Propionsäure	= $C_3{}^3H_6{}^6O_2{}^3$	= 12 × 1,424	12 × 1,452	12 × 1,487.
	Propylaldehyd	= $C_3{}^3H_6{}^6O_1{}^2$	= 11 × 1,419	11 × 1,448	11 × 1,485.
3.	Buttersäure	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	= 15 × 1,440	15 × 1,467	15 × 1,503.
	Butylaldehyd	= $C_4{}^4H_8{}^9O_1{}^2$	= 14 × 1,436	14 × 1,466	14 × 1,503.
4.	Isobuttersäure	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	= 15 × 1,441	15 × 1,469	15 × 1,504.
	Isobutylaldehyd	= $C_4{}^4H_8{}^8O_1{}^2$	= 14 × 1,439	14 × 1,469	14 × 1,506.
5.	Valeriansäure	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	= 18 × 1,456	18 × 1,484	18 × 1,521.
	Valeraldehyd	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_1{}^2$	= 17 × 1,459	17 × 1,489	17 × 1,527.
6.	Oenanthsäure	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	= 24 × 1,465	24 × 1,494	24 × 1,531.
	Oenanthol	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_1{}^2$	= 23 × 1,459	23 × 1,487	23 × 1,523.

Das Refractionsmaass der Säuren und Aldehyde stimmt in allen sechs Paaren auf drei Ziffern vollkommen genügend überein. Dem Aldehyd entspricht eine Stere weniger, als der Säure. Die Säuren untereinander und die Aldehyde untereinander schreiten unter Zunahme des Refractionsmaasses, d. h. der Grösse der Stere, jedem hinzutretenden $C_1{}^1H_2{}^2$ entsprechend je um drei Steren fort, und in den Säuren sind für O_2 ebenso wie für CH_2 drei Steren angenommen. Stets unterscheidet sich die Säure vom Aldehyd, dem O in OH entsprechend, genau um den dritten Theil des dem CH_2 und O_2 entsprechenden Werthes, d. h. um eine Stere.

Die einfachen Verhältnisse der Atomrefractionen der Elemente sind hierdurch unwiderleglich nachgewiesen.

Da die Molecularrefraction μ^2 für die Säuren und Alkohole vom dritten Glied ab (§ 13) die nämliche ist, so ergeben sich natürlich ebenso einfache Verhältnisse für die Alkohole und Aldehyde.

Der erfahrungsmässige Nachweis einfacher Verhältnisse kann präciser kaum gedacht werden, als er hier thatsächlich vorliegt. Es wird daher diese Tabelle der Mr. μ^2 für die Säuren und Aldehyde in der Geschichte der Wissenschaft eine Stelle behalten.

Wie sehr man sich, der jetzt herrschenden Mode entsprechend, auch sträuben mag, solche einfache Verhältnisse anzuerkennen, im Angesicht der vorliegenden Thatsachen wird das nicht ferner möglich und zulässig sein.

Für meine Person habe ich seit Decennien aus den Beobachtungen entnommen, dass die Einflüsse der Elementaratome auf die physikalischen Constanten der Verbindungen in einfachen Beziehungen stehen müssen. Sie im einzelnen festzustellen, dazu sind die Beobachtungen noch lange nicht an allen Stellen so reif, wie an dieser Stelle. Aber es wird nicht eher gelingen, aus den physikalischen Eigenschaften wirklich brauchbare Schlüsse auf die chemische Natur der Verbindungen zu ziehen, als bis man sich zur Anerkennung jener Thatsache wird genöthigt gesehen haben.

§ 16. Für die Mr. μ^2 stimmt nach Obigem das Refractionsmaass oder die Stere der Säuren und Aldehyde vollkommen überein.

Für die Mr. μ ist das nicht in gleichem Grade der Fall. Hier ist die Stere anfangs für die Aldehyde kleiner, als für die Säuren, wächst aber rascher und wird derjenigen der Säuren erst in den höheren Gliedern gleich.[1]) Es ist dies wahrscheinlich auch nur eine Folge der ungenügenden Näherung der μ-Formeln an die Constanz mit der Temperatur; denn für entsprechende Zustände müssten die Säuren bei höheren Temperaturen beobachtet werden, wofür sich ihre Mr. μ kleiner, und wahrscheinlich derjenigen der Aldehyde der Stere nach entsprechend ergeben würde.

1) Schröder, l. c. p. 671.

§ 17. Die Säuren unterscheiden sich von den Aldehyden dadurch, dass sie ein einwerthig gebundenes O mehr enthalten, und das Refractionsmaass Mr.μ^2 ist für beide übereinstimmend. Ganz das Nämliche gilt auch für die nachfolgenden Paare, welche sich ebenfalls um ein oder zwei einwerthig gebundene O unterscheiden.

			Mr.$\mu_A{}^2$	Mr.$\mu_\alpha{}^2$	Mr.$\mu_\gamma{}^2$
1.	Benzylalkohol	$= C_7{}^{13}H_8{}^8O_1{}^1$	$= 22 \times 1{,}416$	$22 \times 1{,}465$	$22 \times 1{,}527$.
	Toluol	$= C_7{}^{13}H_8{}^8$	$= 21 \times 1{,}415$	$21 \times 1{,}466$	$21 \times 1{,}531$.
2.	Phenylpropylalkohol	$= C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	$= 28 \times 1{,}441$	$28 \times 1{,}491$	$28 \times 1{,}554$.
	Mesitylen	$= C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}$	$= 27 \times 1{,}446$	$27 \times 1{,}494$	$27 \times 1{,}554$.
3.	Glycerin	$= C_3{}^3H_8{}^8O_3{}^3$	$= 14 \times 1{,}433$	$14 \times 1{,}458$	$14 \times 1{,}490$.
	Propylalkohol	$= C_3{}^3H_8{}^8O_1{}^1$	$= 12 \times 1{,}424$	$12 \times 1{,}452$	$12 \times 1{,}486$.
4.	Acetal	$= C_6{}^6H^{14}{}_{14}O_2{}^2$	$= 22 \times 1{,}467$	$22 \times 1{,}495$	$22 \times 1{,}529$.
	Hexan	$= C_6{}^6H_{14}{}^{14}$	$= 20 \times 1{,}457$	$20 \times 1{,}485$	$20 \times 1{,}522$.

Die Steren aller dieser Paare stimmen auf drei Ziffern genügend überein.

Auch hier ergibt sich nach Tafel II für Mr.μ für die höher kochenden sauerstoffreicheren Glieder ein etwas grösseres Refractionsmaass infolge ungenügender Näherung an die Constanz, und würde sich, bei entsprechend höherer Temperatur beobachtet, angemessen niedriger ergeben.

§ 18. Dass die Atomrefractionen des Sauerstoffs je nach seiner Bindungsweise in einfachen Verhältnissen stehen, geht insbesondere noch sehr prägnant hervor aus der völligen Uebereinstimmung der Mr.μ^2 und Mr.μ in beiden Tafeln für die beiden Verbindungen:

5. Acetessigester = $C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_3{}^5$ und Aethylenacetat = $C_6{}^6H_{10}{}^{10}O_4{}^5$.

VII. Mehrfach verkettete Kohlenstoffatome ungesättigter Verbindungen haben die Atomrefraction $C_1{}^2$.

§ 19. Sowohl die Säuren und Aldehyde, als die eben erwähnten fünf Paare von gleicher Stere enthalten je eine gleiche Anzahl von Wasserstoffatomen. Ich habe schon früher[1]) namentlich für die Allylverbindungen nachgewiesen, dass das Refractionsmaass hauptsächlich von dem Wasserstoffgehalt abzuhängen scheint, indem Verbindungen von

1) Schröder, l. c. § 23—26.

entsprechendem chemischen Charakter und gleichem Wasserstoffgehalt sehr häufig auch gleiches Refractionsmaass haben.

So ist das Refractionsmaass für die brechbareren Strahlen des Lichts bei den entsprechenden Aethyl- und Allylverbindungen von gleichem Wasserstoffgehalt für Mr. μ^2 nahe übereinstimmend.

Das Refractionsmaass für Mr. μ^2 stimmt für Amylen und Diallyl von gleichem Wasserstoffgehalt nahe überein:

	Mr. A^2	Mr. $\mu_\alpha{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$
Amylen = $C_5{}^7H_{10}{}^{10}$	= 17 × 1,415	17 × 1,449	17 × 1,493.
Diallyl = $C_6{}^{10}H_{10}{}^{10}$	= 20 × 1,400	20 × 1,438	20 × 1,459.

Ueberdies ist hier wieder das Refractionsmaass von Mr. μ^2 wie man sieht, für das höher siedende Diallyl etwas kleiner, für Mr. μ aber etwas grösser, sodass wieder der Schluss berechtigt ist, dass Amylen und Diallyl, bei entsprechenden Temperaturen beobachtet, gleiches Refractionsmaass darbieten würden, Aehnliches gilt von Aethylalkohol und Allylalkohol.

Es schliesst sich mit einer Doppelbindung zweier Kohlenstoffatome hier noch an das Crotonat:

	Mr. $\mu_A{}^2$	Mr. $\mu_\alpha{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$
Propylacetat = $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	= 18 × 1,462	18 × 1,491	18 × 1,526.
Aethylcrotonat = $C_6{}^8H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	= 21 × 1,452	21 × 1,493	21 × 1,545.

Dem Crotonat entspricht eine etwas grössere Dispersion. Für die mittleren Strahlen ist das Refractionsmaass beider Ester von gleichem Wasserstoffgehalt übereinstimmend.

§ 20. Dagegen haben sowohl für Mr. μ^2 als für Mr. μ die Propylverbindungen, welche zwei Atome Wasserstoff mehr enthalten, eine sehr nahe gleiche, aber doch stets etwas grössere Molecularrefraction, als die entsprechenden Allylverbindungen, wie aus den Tafeln unmittelbar ersichtlich ist

Gerade in dieser sich überall bestätigenden Gesetzmässigkeit in der Beschaffenheit des Refractionsmaasses liegt nicht nur die Berechtigung, sondern die Nöthigung, für die doppelt verketteten Kohlenstoffatome des Allyls und ähnlicher Verbindungen, wie es in den Tafeln und oben überall geschehen ist, die Refractionsconstitution $C_1{}^2$ anzuerkennen; denn Allyl = $C_3{}^5H_5{}^5$ und Propyl = $C_3{}^3H_7{}^7$ müssen sich bei

gleicher Sterenzahl dadurch unterscheiden, dass das Refractionsmaass des wasserstoffreicheren Propyls etwas grösser ist.

Aus dem nämlichen Grunde muss sich bei gleicher Sterenzahl das Refractionsmaass des Valerylens = $C_5{}^9H_8{}^8$ etwas niedriger ergeben als das des Amylens = $C_5{}^7H_{10}{}^{10}$, obwohl die Mr. beider nahe übereinstimmt. In den Tafeln ist ersichtlich, dass dies der Fall ist.

§ 21. Ganz analoge Beziehungen ergeben sich nun auch für die Propargylverbindungen. Die mehrfach verketteten drei Kohlenstoffatome des Propargyls haben die Refractionsconstitution $C_3{}^6$. Alle drei von Brühl beobachteten Propargylverbindungen ordnen sich in beiden Tafeln an Stellen ein, an welchen denselben drei Steren mehr entsprechen, als ihnen angehören würden, wenn das Propargyl einfach verkettete Kohlenstoffatome als $C_3{}^3$ enthielte.

Methylalkohol vom Siedepunkt $S = 66^0$ und Propargylalkohol vom Siedepunkt $S = 114^0$, welche gleich viel Wasserstoffatome enthalten, ergeben:

		Mr. A^2	Mr. $\mu_\alpha{}^2$	Mr. $\mu_\gamma{}^2$
{ Methylalkohol	= $C_1{}^1H_4{}^4O_1{}^1$ =	6 × 1,335	6 × 1,360	6 × 1,391.
{ Propargylalkohol	= $C_3{}^6H_4{}^4O_1{}^1$ =	11 × 1,316	11 × 1,348	11 × 1,389.

Der Propargylalkohol von höherem Siedepunkt hat für Mr. μ^2, wie man sieht, ein etwas kleineres Refractionsmaass, aber für Mr. μ hat er nach Taf. II ein etwas grösseres; bei entsprechenden Temperaturen beobachtet, würden also Methylalkohol und Propargylalkohol gleiches Refractionsmaass ergeben.

Auch hier stellt sich also heraus, dass die Annahme $C_3{}^6$ im Propargyl nicht eine Näherung, sondern die den gesetzmässigen Beziehungen allein entsprechende ist.

VIII. Aromatische Verbindungen.

§ 22. In Betreff der aromatischen Verbindungen hat schon Brühl die Thatsache constatirt, dass ihre Dispersion eine sehr bedeutende ist. Hier kann also die Uebereinstimmung des Refractionsmaasses auch bei gleichem Wasserstoffgehalt mit entsprechenden Verbindungen der Fettreihe nicht mehr stattfinden; denn wäre sie für irgend einen Strahl

gültig, so könnte sie für schwächer und für stärker brechbare Strahlen nicht mehr zutreffen. Hier erweist es sich nun nützlich, auch den von der Dispersion unabhängigen Strahl A in Betracht zu ziehen.

Für Mr. A^2 ist nun in der That wieder das Refractionsmaass der aromatischen Verbindungen und entsprechender Verbindungen der Fettreihe von gleichem Wasserstoffgehalt durchaus bis auf eine Einheit in der dritten Ziffer sehr nahe übereinstimmend. Es geht dies aus den nachfolgenden Relationen hervor:

1.	Phenol	= $C_6{}^{12}H_6{}^6O_1{}^1$	. Mr. $A_2{}^2$	= 26,72 L.	= 19 × 1,406.
	Aethylalkohol	= $C_2{}^2H_6{}^6O_1{}^1$	. „	= 12,47 L.	= 9 × 1,386.
			Diff.	= 14,25.	
2.	Bittermandelöl	= $C_7{}^{13}H_6{}^6O_1{}^2$	. Mr. $A_2{}^2$	= 30,29 L.	= 21 × 1,442.
	Aceton	= $C_3{}^3H_6{}^6O_1{}^2$	. „	= 15,71 L.	= 11 × 1,428.
			Diff.	= 14,58.	
3.	Benzylalkohol	= $C_7{}^{13}H_8{}^8O_1{}^1$	. Mr. $A_2{}^2$	= 31,14 Br.	= 22 × 1,416.
	Propylalkohol	= $C_3{}^3H_8{}^8O_1{}^1$	. „	= 17,09 Br.	= 12 × 1,424.
			Diff.	= 14,05.	
4.	Methylbenzoat	= $C_8{}^{14}H_8{}^8O_2{}^3$	. Mr. $A_2{}^2$	= 36,17 L.	= 25 × 1,447.
	Aethylacetat	= $C_4{}^4H_8{}^8O_2{}^3$	. „	= 21,72 L.	= 15 × 1,448.
			Diff.	= 14,45.	
5.	Aethylbenzoat	= $C_9{}^{15}H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	. Mr. $A_2{}^2$	= 40,72 L.	= 28 × 1,455.
	Methylbutyrat	= $C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$	. „	= 26,29 L.	= 18 × 1,461.
			Diff.	= 14,43.	
6.	Phenylpropylalkohol	= $C_9{}^{15}H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	. Mr. $A_2{}^2$	= 40,34 Br.	= 28 × 1,441.
	Amylalkohol	= $C_5{}^5H_{12}{}^{12}O_1{}^1$	. „	= 26,09 L.	= 18 × 1,449.
			Diff.	= 14,25.	
7.	Hydrozimmtsäureester	= $C_{11}{}^{17}H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	. Mr. $A_2{}^2$	= 50,85 Br.	= 34 × 1,495.
	Aethylvalerianat	= $C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$	. „	= 35,98 L.	= 24 × 1,499.
			Diff.	= 14,87.	

In diesen sieben Paaren enthält jedesmal das erste Glied vier Kohlenstoffatome und zehn Steren mehr als das zweite. Die Differenz ist immer = 14, ... = 10 × 1,4..., also zehn Steren. Es kann daraus die oben schon angegebene Sterenzahl der Kohlenstoffatome der aromatischen Verbindung in jedem Paar abgeleitet werden. Man findet sie immer um

sechs Einheiten grösser als die Anzahl der Kohlenstoffatome der aromatischen Verbindung, entsprechend der Refractionsconstitution $C_6^{12}H_5^{5}$ des Phenyls, welche durch obige Relationen begründet und unwiderleglich erwiesen ist.

Vom dritten Paare ab ist das Refractionsmaass der höher siedenden Phenylverbindung stets das etwas kleinere und würde, bei entsprechender Temperatur beobachtet, dem anderen gleich werden. Für Mr. A ist umgekehrt das Refractionsmaass der Phenylverbindung stets das grössere und würde, bei entsprechender Temperatur beobachtet, kleiner und dem anderen wohl gleich werden.

Es schliessen sich der gleichen Relation auch noch die aromatischen Kohlenwasserstoffe und Alkohole der Fettreihe mit gleichem Wasserstoffgehalte an:

8.	Benzol	$= C_6^{12}H_6^{6}$	. Mr. A^2	= 24,99 Br.	$= 18 \times 1,388$.
	Aethylalkohol	$= C_2^{2}H_6^{6}O_1^{1}$	. „	= 12,47 L.	$= 9 \times 1,386$.
			Diff.	= 12,52	$= 9 \times 1,391$.
9.	Toluol	$= C_7^{13}H_8^{8}$	. Mr. A^2	= 29,71 Br.	$= 21 \times 1,415$.
	Propylalkohol	$= C_3^{3}H_8^{8}O_1^{1}$	. „	= 17,09 Br.	$= 12 \times 1,424$.
			Diff.	= 12,62	$= 9 \times 1,402$.
10.	Mesitylen	$= C_9^{15}H_{12}^{12}$	. Mr. A^2	= 39,05 Br.	$= 27 \times 1,446$.
	Amylalkohol	$= C_5^{5}H_{12}^{11}O_1^{1}$	. „	= 26,09 L.	$= 18 = 1,449$.
			Diff.	= 12,96	$= 9 \times 1,440$.

Hier entspricht die Differenz jedesmal neun Steren, woraus sich die angegebene Sterenzahl der Kohlenstoffatome der aromatischen Verbindung ebenfalls ableiten lässt. Sie ergibt sich ebenso wie vorhin jedesmal um sechs Einheiten grösser, als die Anzahl der Kohlenstoffatome derselben, und führt wie oben zu der Refractionsconstitution $C_6^{12}H_5^{5}$ des Phenyls. Auch hier ist, übereinstimmend mit der theoretischen Auffassung das Refractionsmaass Mr. A^2 für die höher kochende aromatische Verbindung in der Regel etwas kleiner, dagegen für Mr. A stets grösser, als das der Vergleichssubstanz.

Die vorstehenden zehn Paare stellen es völlig ausser Zweifel, dass die sechs Kohlenstoffatome des Phenyls wirklich die Refractionsconstitution C_6^{12} haben; dass aber das Refractionsmaass mit der Zunahme der Brechbarkeit der Strahlen sehr rasch wächst.

Auch die Gruppe der vorstehenden zehn Paare enthält eine so unwiderlegliche Bestätigung des Sterengesetzes, dass sie in der Geschichte der Wissenschaft dereinst eine bleibende Stelle behalten wird.

§ 23. In Bezug auf die Dispersion der aromatischen Verbindungen stellt sich noch eine sehr lehrreiche Thatsache heraus.

Als richtigstes Maass der Dispersion möchte ich den Quotienten $\text{Mr.}\,\mu_\gamma^2/\text{Mr.}\,\mu_\alpha^2$ betrachten. Hier sieht man nun, dass diese Quotienten und ebenso die Coëfficienten *B* der Cauchy'schen Formel in jeder aromatischen Gruppe mit abnehmendem Moleculargewicht wachsen. Man hat in der That:

			$\frac{\text{Mr.}\,\mu_\alpha^2}{\text{Mr.}\,\mu_\gamma^2}$	
1.	Hydrozimmtsäureester	$= C_{11}H_{14}O_2$	1,037	*B* = 0,7130.
	Aethylbenzoat	$= C_9H_{10}O_2$	1,044	„ = 0,8844.
	Methylbenzoat	$= C_8H_{18}O_2$	1,046	„ = 0,9466.
2.	Mesitylen	$= C_9H_{12}$	1,040	*B* = 0,7811.
	Toluol	$= C_7H_8$	1,044	„ = 0,8669.
	Benzol	$= C_6H_6$	1,046	„ = 0,9082.
3.	Phenylpropylalkohol	$= C_9H_{12}O_1$	1,042	*B* = 0,9145.
	Benzylalkohol	$= C_7H_8O$	1,043	„ = 0,9246.
	Phenol	$= C_6H_6O$	1,047	„ = 1,039.
4.	Orthotoluidin	$= C_7H_7NH_2$	1,054	*B* = 1,266.
	Anilin	$= C_6H_5NH_2$	1,058	„ = 1,383.

Es ist hierdurch der Beweis geliefert, dass der Einfluss eines Componenten auf alle übrigen modificirend einwirkt. Denn es ist offenbar das Phenyl, welches auch den übrigen Bestandtheilen die grosse Dispersion aufprägt, und dies nothwendig in um so geringerem Grade, je grösser ihre Anzahl und relativ ihr Moleculargewicht ist.

Auch in Bezug auf das Refractionsmaass kommen ganz analoge Verhältnisse vor, auf welche ich jedoch der Kürze wegen hier nicht näher eingehen will.

IX. Chloralkyle.

§ 24. Ein zugleich mit Wasserstoff an ein Kohlenstoffatom gebundenes Chloratom übt ganz den nämlichen Einfluss auf die Molecularrefraction aus, wie $C_1^1H_3^3$.

Es liegen sich in der That, wie man unmittelbar aus beiden Tafeln ersieht die Werthe sowohl für Mr. μ^2 als für Mr. μ stets sehr nahe:

1.	Von Chloressigester	$= C_4{}^4H_7{}^7Cl_1{}^4O_2{}^3$
	und den Estern	$= C_5{}^5H_{10}{}^{10}O_2{}^3$.
2.	Von Aethylchlorpropionat	$= C_5{}^5H_9{}^9Cl_1{}^4O_2{}^3$
	und den Estern	$= C_6{}^6H_{12}{}^{12}O_2{}^3$.
3.	Von Aethylchlorbutyrat	$= C_6{}^6H_{11}{}^{11}Cl_1{}^4O_2{}^3$
	und den Estern	$= C_7{}^7H_{14}{}^{14}O_2{}^3$.
4.	Von Aethylenchlorid	$= C_2{}^2H_4{}^4Cl_2{}^3$
	und Propylchlorid	$= C_3{}^3H_7{}^7Cl_1{}^4$.

So nahe die Werthe dieser Paare namentlich für Mr. μ^2 auch übereinstimmen, so ist doch, wieder der theoretischen Auffassung entsprechend, in den drei ersten Paaren Mr. μ^2 für das höher siedende Chlorid in der Regel sehr wenig kleiner, Mr. μ aber immer etwas grösser.

Der Einfluss des, wie erwähnt, gebundenen Chlors ist also bei correspondirenden Temperaturen sowohl in Bezug auf die Brechung wie auf die Dispersion dem Einfluss von CH_3 gleich zu erachten.

Schlussbemerkung.

§ 25. Ich hätte noch auf einige andere Regelmässigkeiten des Refractionsmaasses aufmerksam zu machen, nehme jedoch Anstand, nachdem ich die wichtigsten Beziehungen glaube dargelegt zu haben, diese Abhandlung noch weiter zu verlängern. Für jede fernere Forschung bieten die vorgelegten Tafeln eine erwünschte Grundlage.

Mögen es die Herren Landolt und Brühl durch das hohe Interesse, welches die Sache gewährt, gütig entschuldigen, wenn ich ihre Beobachtungen diesen Discussionen unterwerfe, ohne, wie gern ich es auch möchte, in der Lage zu sein, eigene Beobachtungen beizutragen. Die Wissenschaft wird denselben die Vortrefflichkeit dieser Beobachtungen stets verdanken; und ich hoffe zuversichtlich, dass dieselben auch meinen persönlichen Dank dafür freundlich annehmen werden.

Karlsruhe, den 24. August 1882.

X. *Ueber die Aufbewahrung von Sauerstoffgas im Zinkgasometer;* *von Dr. Julius Loewe.*

Hr. L. Pfaundler brachte in diesen Annalen (Bd. **17.** Heft 1, p. 176) eine Notiz über eine Explosion eines Sauerstoffgasometers aus Zinkblech, welcher ich nachstehende kurze Mittheilung beifüge.

Um das Sauerstoffgas, sowie die atmosphärische Luft, welche beide bei der Elementaranalyse organischer Körper Verwendung finden, vor einer Verunreinigung mit Kohlensäure aus der Luft oder vor sauren Dämpfen der Luft des Laboratoriums zu schützen, stelle ich schon seit vielen Jahren dieselben über Kalkwasser. Zu diesem Zwecke bringt man 20—30 g frisch gelöschten Kalk als Pulver in einen starken Leinwandbeutel, schnürt denselben oberhalb der Füllung mit Bindfaden zu und hängt denselben in der Nähe der Ausflussröhre des Wassergefässes des Gasometers. Auf diese Art erlangt man die Sicherheit, dass alle Kohlensäure, sowie die sauren Dämpfe, welche das Wasser des Gasometers mit der Zeit aus der Luft absorbirt, durch das Kalkhydrat neutralisirt und für die Arbeit unschädlich gemacht werden. Dieses Verfahren liefert bei der Elementaranalyse noch den weiteren Vortheil, dass die Kali- oder Natronlauge, welche man zum Waschen der Gase vorschlägt, für lange Zeit ganz kaustisch bleibt und dadurch eigentlich weniger zur Reinigung der Gase, sondern mehr als Merkzeichen für den Gasstrom dient und dessen Regulirung gestattet. Der Leinwandbeutel mit dem Kalkpulver kann nach längerem Gebrauche leicht erneuert werden und hat sich bei dessen Gebrauch nach vielen Jahren niemals eine Störung ergeben.

Frankfurt a. M., September 1882.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 2.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XVIII.

I. *Das electrische Leitungsvermögen einiger Cadmium- und Quecksilbersalze in wässerigen Lösungen; von O. Grotrian.*

(Hierzu Taf. II Fig. 1—3.)

Die Ueberführungszahlen der Ionen eines Electrolyten, welche von verschiedenen Beobachtern, namentlich von Hittorf[1]) für eine grosse Anzahl von Lösungen bestimmt sind, liefern bekanntlich das während der Electrolyse vorhandene Verhältniss der mittleren Geschwindigkeit eines Ions zu der Summe der mittleren Geschwindigkeiten beider Ionen. Setzen wir mit Hittorf voraus, dass während der Electrolyse sich die beiden Ionen stets nach entgegengesetzten Richtungen bewegen, so müssen sämmtliche Ueberführungszahlen kleiner als Eins sein. Hittorf's Versuche haben aber bei einigen Electrolyten, nämlich bei den Chloriden und Jodiden von Zink und Cadmium, Ueberführungszahlen für das Anion ergeben, deren Werth den der Einheit übersteigt. Solche abnorme Ueberführungszahlen treten für die wässerigen Lösungen der genannten Substanzen erst dann auf, wenn der Salzgehalt ein gewisses Maass erreicht hat, während Lösungen von geringerer Concentration Ueberführungszahlen zukommen, deren Werth unter dem der Einheit bleibt. Hittorf erklärt diese eigenthümlichen Beobachtungsresultate dadurch, dass er für concentrirte und verdünnte Lösungen verschieden constituirte electrolytische Molecüle und eine verschiedenartige Zersetzung derselben durch den Strom annimmt.[2]) Während bei grösserem Wassergehalte CdJ_2 in die Ionen Cd und J_2 zerfällt, denkt Hittorf sich in con-

1) Hittorf, Pogg. Ann. **89.** p. 177. 1853; **98.** p. 1. 1856; **103.** p. 1. 1858; **106.** p. 337 u. 513. 1859.

2) Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 543—547. 1859.

centrirterer Lösung die einzelnen Molecüle CdJ_2 zu Molecülverbindungen zusammentretend, wie sie bei den Doppelsalzen vorkommen. Das electrolytische Molecül ist hier CdJ_4 und spaltet sich in das Kation Cd und das Anion Cd_2J_4. Die electrochemische Zersetzung erfolgt also analog derjenigen der wirklichen Doppelsalze; bei diesen wird nur das eine Metall zur Kathode geführt, während der das andere Metall enthaltende Rest zur Anode wandert.

Nach G. Quincke[1]) und F. Kohlrausch[2]) besteht zwischen den Ueberführungszahlen eines Electrolyten und dessen Leitungsvermögen eine gewisse numerische Beziehung, welche auf sehr verdünnte Lösungen aller Electrolyte angewandt zu dem von F. Kohlrausch gefundenen schönen Gesetze von der unabhängigen Wanderung der Ionen führt.

Die abnormen Werthe der Hittorf'schen Ueberführungszahlen für $CdCl_2$ und CdJ_2, welche bereits bei Concentrationen weit unterhalb der vollständigen Sättigung auftreten, lassen vermuthen, dass auch das Leitungsvermögen genannter Salze sich in ungewöhnlicher Weise mit der Concentration ändert. Da dessen Studium die electrolytischen Vorgänge vielleicht weiter aufzuklären geeignet ist, so bin ich bei meinen Versuchen von der Bestimmung des Leitungsvermögens der Salze $CdCl_2$ und CdJ_2 ausgegangen. Nach diesen untersuchte ich das Doppelsalz K_2CdJ_4, weil dieses nach Hittorf[3]) dasselbe Anion wie CdJ_2 in mässig concentrirter Lösung besitzt, und auch hier Bestimmungen der Ueberführungszahlen vorliegen. Ausser diesen Salzen gelangten zur Untersuchung $CdBr_2$, $Cd(NO_3)_2$, $CdSO_4$, $HgCl_2$, $HgBr_2$ und KJ, letzteres in zwei Concentrationen, von denen die eine bereits von F. Kohlrausch untersucht ist. Den Gedankengang, welcher mich auf die Wahl der letztgenannten Stoffe führte, werde ich später unter 5 darlegen.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **144.** p. 1. 161. 1871.

2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1876. p. 213; 1877. p. 181. Wied. Ann. **6.** p. 167. 1879.

3) Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 525—530. 1859.

1. Die Widerstandsmessung.

Zur Messung der Widerstände habe ich die kürzlich von F. Kohlrausch angegebene auf dem Princip der Wheatstone'schen Combination beruhende Versuchsanordnung[1]) benutzt. Bei derselben dient ein Inductor mit solidem Eisenkern als Erreger von Wechselströmen. In die Brücke ist ein Telephon eingeschaltet, dessen Ton durch geeignete Einstellung des Contactröllchens an der „Brückenwalze" zum Verschwinden gebracht, resp. bis zu einem Minimum geschwächt wird. Das Verhältniss des zu messenden Widerstandes zu dem eines von Selbstinduction freien Rheostaten ist durch das Längenverhältniss der beiden Theile des Walzendrahtes gegeben, die sich zwischen dessen Enden und dem Contactpunkte des Röllchens befinden. Bei der Widerstandsmessung lag der eine Verzweigungspunkt des ungetheilten Stromes im Contactpunkte des Röllchens, während die Brücke mit Telephon zwischen die Enden des Walzendrahtes eingeschaltet war.

Der Inductor, die Brückenwalze und die Widerstandsgefässe sammt den Platinelectroden sind aus der Werkstätte des Herrn Eugen Hartmann in Würzburg bezogen. Die Gefässe besitzen die l. c. in Fig. 8 Taf. V angegebene Form. Der Rheostat besteht aus zickzackartig auf einem verticalen Brett ausgespannten Neusilberdrähten. Die Widerstände desselben können in geeigneter Combination mittelst einer am oberen Theile des Brettes angebrachten Stöpselvorrichtung wie bei den Siemens'schen Rheostaten eingeschaltet werden. Sie waren bei Herstellung des Rheostaten so gewählt, dass Widerstände von annähernd 1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 100, 200 und 280 Siemens'schen Einheiten vorhanden waren. Später wurden dieselben unter Anwendung des constanten Stromes sorgfältig miteinander verglichen und genau auf Siemens'sche Einheiten reducirt mittelst eines Widerstandsdrahtes von nahezu vier Einheiten, welchen Herr Dr. Strouhal in Würzburg gütigst mit zwei im Besitz

1) F. Kohlrausch, Verh. d. phys.-med. Ges. zu Würzburg, N. F. **15.** Vom 21. Februar 1880; Wied. Ann. **11.** p. 653. 1880.

des Herrn F. Kohlrausch befindlichen Siemens'schen Widerstandsetalons von je vier Einheiten verglichen hatte.

Da der Draht der Brückenwalze nicht an allen Stellen gleichen Widerstand pro Längeneinheit besitzt, so musste derselbe calibrirt werden, d. h. es mussten für die einzelnen Stellungen des Contactröllchens die Correctionen ermittelt werden, welche an den abgelesenen Drahtlängen anzubringen sind, sodass das Verhältniss der so corrigirten Drahtlängen zugleich das Verhältniss der Widerstände der beiden Drahtzweige darstellt.

Diese Calibrirung habe ich nach der von Strouhal und Barus angegebenen Methode[1]) ausgeführt unter Anwendung von Wechselströmen und Telephon. Die annähernd gleichen Widerstände, welche bei diesem Verfahren benutzt werden, waren zur Vermeidung der Extraströme zickzackartig auf Brettern ausgespannt. Die Calibrirung erfolgte unter Anwendung von vier, fünf und sechs solchen Widerständen, sodass dadurch zunächst für elf Stellungen des Contactröllchens die Correctionen gegeben waren.

Eine Controle dieser Calibrirung und andererseits eine solche der Widerstandsvergleichung wurde dadurch gewonnen, dass man das Verhältniss verschiedener Rheostatenwiderstände mittelst Inductor, Brückenwalze und Telephon nochmals ermittelte. Diese Verhältnisse, verglichen mit denjenigen, welche sich bei Anwendung des constanten Stroms ergeben hatten, zeigen untereinander eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung. Die mit Telephon und Galvanometer gemachten Messungen sind daher theilweise zu einer Ergänzung der anfänglichen Calibrirung verwendet. Auf diese Weise waren zwischen den Stellungen des Contactröllchens, die $^1/_6$ und $^5/_6$ der ganzen Drahtlänge entsprechen, 17 Correctionen ermittelt.

Da bei den untersuchten Quecksilbersalzen sich die Widerstände als enorm gross herausstellten, so war ich genöthigt, auch eine Strecke in unmittelbarer Nähe des einen Drahtendes zu calibriren. Ich bediente mich hierbei eines

---

1) Strouhal und Barus, Wied. Ann. 10. p. 326. 1880.

von Selbstinduction freien Neusilberdrahtwiderstandes von ungefähr 200 Siemens'schen Einheiten. Derselbe wurde zunächst mit den grösseren Widerständen des Rheostaten unter Anwendung von Wechselströmen verglichen, und so sein Widerstand bestimmt. Später lieferte die Vergleichung desselben mit den kleineren Widerständen die gewünschten Correctionen. Jener Widerstand von circa 200 S.-E. wurde ausserdem bei Untersuchung der Quecksilbersalze zur Ergänzung des Rheostaten verwendet.

Da der Widerstand der untersuchten Lösungen von $HgCl_2$ und $HgBr_2$ sich zu 10 bis 300 mal grösser herausstellte als der gesammte zur Verfügung stehende Rheostatenwiderstand von ca. 500 S.-E.[1]), so sind die Werthe der für die Quecksilbersalze gefundenen Leitungsvermögen weit weniger genau als die für die übrigen Electrolyte erhaltenen Zahlen.

Die nächste Aufgabe war die Ermittelung der Widerstandscapacität der drei zur Aufnahme der Lösungen dienenden Glasgefässe.[2]) Es wurde dazu verwendet eine Lösung von reinem NaCl, $MgSO_4$-Lösung und reinste wässerige H_2SO_4. Die Concentration der beiden letzteren Lösungen entsprach dem Maximum des Leitungsvermögens.

Bei dieser Gelegenheit muss ich bemerken, dass das Verschwinden des Tones im Telephon, wenn man ein wirklich absolutes darunter versteht, im allgemeinen selten erfolgte. Die nahe liegende Vermuthung, dass bei meinen Versuchen die Polarisation nicht genügend ausgeschlossen gewesen sei und merkliche Fehler veranlasst habe, wird zunächst beseitigt durch die Widerstandsmessungen an Schwefelsäure von maximalen Leitungsvermögen. Diese, unter Anwendung sehr verschieden starker Ströme und verschiedener Zahl der Stromwechsel in der Zeiteinheit angestellt, führten dennoch auf merklich gleiche Werthe der Widerstandscapacität γ. Ich gebe hier eine Zusammenstellung der gefundenen Wider-

1) Zwei Rheostatenwiderstände waren durch Zerspringen der Drähte im Laufe der Zeit unbrauchbar geworden.

2) S. hierüber F. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik. 4. Aufl. p. 206; Wied. Ann. **6.** p. 49. 1879; **11.** p. 660. 1880.

standscapacitäten und schliesse daran Bemerkungen über die besonderen Bedingungen, unter denen einige derselben erhalten sind.

Gefäss I.

Flüssigkeit	Widerstands-capacität γ	Bemerkungen
NaCl. Gesättigte Lösung. Chemisch rein	0,001 576	—
H_2SO_4 Max. Chemisch rein	1 585	—
$MgSO_4$ Max.	1 568	—
H_2SO_4 Max. Gewöhnliche käufliche Säure . . .	0,001 584	Interruptor von Hartmann.
—	1 584	Interruptor der Sammlung.
—	—	Dubois-Reymond'scher Schlittenapparat bethätigt durch
—	—	
H_2SO_4 Max. Chemisch rein	1 581	4 Daniells.
—	1 579	3 D.
—	1 579	2 D.
—	1 580	1 D.
—	1 580	1 D. Inducirte Rolle etwa um ihre halbe Länge aus ihrer normalen Stellung auf dem Schlitten verschoben.
—	—	
—	—	
—	—	
—	1 580	1 D. Inducirte Rolle fast um ihre ganze Länge verschoben.
—	—	

Gefäss II.

Flüssigkeit	γ
NaCl. Gesättigte Lösung. Chemisch rein	0,000 583 8
$MgSO_4$ Max.	580 4

Gefäss III.

Flüssigkeit	γ
NaCl. Gesättigte Lösung. Chemisch rein	0,000 242 4
$MgSO_4$ Max.	241 4
—	240 9[1]
—	240 5[1]

1) Electroden $\left\{\begin{matrix}\text{1 mal}\\ \text{2 mal}\end{matrix}\right\}$ nachplatinirt.

Den späteren Rechnungen sind die Werthe:

	γ = 0,001 577	0,000 582 1	0,000 241 3
für Gefäss	I	II	III

zu Grunde gelegt. Dieselben sind bei Gefäss I das Mittel aus den drei ersten, bei II und III das aus allen in der

vorstehenden Tabelle angeführten Zahlen. Die Berechnung desselben ist bei Berücksichtigung von fünf Ziffern ausgeführt. Die Abweichung der einzelnen γ vom Mittel beträgt höchstens 0,6 %.

Von den unter I angeführten Zahlen, die für nicht besonders gereinigte Schwefelsäure von maximalem Leitungsvermögen gefunden wurden, ist die erste in gewöhnlicher Weise erhalten, die zweite bei einer weit geringeren Anzahl von Stromwechseln in der Zeiteinheit. Zu dem Zweck wurde der Hartmann'sche Inductor unter Anwendung eines in der physikalischen Sammlung der hiesigen Technischen Hochschule befindlichen Interruptors bethätigt. Die Zahl der Stromwechsel war so gering, dass man mit dem Ohre die einzelnen Schwingungen desselben unterscheiden konnte. Da durch den für gewöhnlich benutzten am Inductor befindlichen Hammer der Strom etwa 80 mal in der Secunde unterbrochen wird, so ist eine Beeinflussung des beobachteten Widerstandes durch die Zahl der Stromwechsel in der Zeiteinheit nicht anzunehmen.

Die sechs letzten für Gefäss I gefundenen Widerstandscapacitäten sind unter Benutzung eines gewöhnlichen Du Bois-Reymond'schen Schlittenapparates mit massiven Eisenkern erhalten. Derselbe wurde, wie in der dritten Columne angegeben ist, durch ein bis vier Daniell'sche Elemente bethätigt. Bei Anwendung von einem D. wurde ausserdem die inducirte Rolle verschieden weit aus ihrer normalen Stellung verschoben. Die Uebereinstimmung der sechs letzten Werthe für γ zeigt, dass auch die Intensität der Wechselströme ohne Einfluss auf den beobachteten Widerstand ist.

Von den unter III angeführten Werthen der Widerstandscapacität, die mit $MgSO_4$ Max. ermittelt sind, wurden der dritte und vierte erhalten, nachdem die bereits gut platinirten Electroden einer ein- und zweimaligen Nachplatinirung unterzogen waren. Ob die nach dem Nachplatiniren beobachtete Aenderung der Widerstandscapacität um ca. 0,4 % der Verminderung einer etwa noch vorhandenen geringen Polarisation zuzuschreiben ist, lasse ich dahin gestellt sein.

Das nicht ganz vollständige Verschwinden des Tones

beeinträchtigt kaum die Genauigkeit der erhaltenen Zahlen; denn in den meisten Fällen ist das Minimum des Tones mit dem deutlichen Auftreten eines schwachen Obertones verbunden, während der Grundton verschwindet. Ein mit empfindlichen Ohr begabter Beobachter findet dadurch leicht die richtige Stellung des Contactröllchens. Im Interesse einer bequemen und schnellen Einstellung des Röllchens ist natürlich ein möglichst schwaches Minimum sehr wünschenswerth.

Die gänzliche Beseitigung des Tönens ist mir fast vollkommen nach Beendigung meiner Widerstandsmessungen gelungen. Das durch die weiter unten beschriebene Behandlung der Electroden erreichte Tonminimum stand dem absoluten Verschwinden des Tones sehr nahe und war nur bei gespannter Aufmerksamkeit des Gehörsinnes und festem Andrücken des Telephons ans Ohr wahrnehmbar. Die vielen Versuche, welche ich anfänglich anstellte, um das Telephon zu absolutem Schweigen zu bringen, liefen im wesentlichen darauf hinaus, den Verlauf der Inductionsströme möglichst continuirlich zu machen, hatten aber nicht den gewünschten Erfolg. Dieses negative Resultat führte mich auf die Vermuthung, dass das nicht vollständige Verschwinden des Tones zusammenhänge mit der bekannten Eigenschaft des Platinmohrs, energisch den Sauerstoff der Luft zu absorbiren. Es war demnach zu versuchen, ob durch die Beseitigung des absorbirten Sauerstoffs ein absolutes Schweigen des Telephons erzielt werden könne. Zu dem Zwecke brachte ich die Electroden mit electrolytisch entwickeltem Wasserstoff in Berührung, indem ich jede derselben als Kathode in verdünnte Schwefelsäure eintauchte.[1]) Das Resultat dieses Versuches war ein in hohem Grade befriedigendes; denn die so behandelten Electroden liessen, bei der Widerstandsmessung verwendet, ein fast absolutes Verschwinden des Tones ein-

1) Bei diesem Verfahren dringt eine bedeutende Menge Wasserstoff in den Platinmohr ein, ohne frei zu werden; denn es vergeht eine merkliche Zeit, ehe an der Kathode H-Bläschen sichtbar werden, während an der blanken Platinanode die Sauerstoffentwicklung sofort mit dem Stromschlusse beginnt.

treten. Die der Wasserstoffentwicklung ausgesetzten Electroden liefern, was noch besonders wichtig erscheint, denselben Widerstand wie vor dieser Behandlung. Es beweisen dieses Widerstandsmessungen an einer 25,03 procentigen $CdSO_4$-Lösung. Die Untersuchung derselben in Gefäss II lieferte Zahlen, die weiter unten in Tabelle I mitgetheilt sind. Da das Tonminimum bei dieser Lösung stärker als bei den meisten anderen Versuchen erschien, so wurde die Untersuchung in demselben Gefässe wiederholt, nachdem die Electroden in der oben beschriebenen Weise mit Wasserstoff in Berührung gebracht waren. Das kaum hörbare Tonminimum, welches jetzt noch vorhanden war, liess hinsichtlich der bequemen und schnellen Einstellung des Contactröllchens nichts zu wünschen übrig. Die letzte Beobachtung ergab für das mit 10^8 multiplicirte, auf Quecksilber bezogene Leitungsvermögen bei der Temperatur 17,96° den Werth 399,7, während aus den Versuchen vor der Behandlung mit Wasserstoff 399,5 als entsprechende Zahl gefunden wird. Das nicht vollständige Verschwinden des Tones scheint hiernach keine Fehlerquelle zu bilden. Denselben Erfolg, der sich infolge der Behandlung der Electroden mit Wasserstoff ergibt, habe ich dadurch erzielt, dass ich die Electroden einige mal abwechselnd in eine Lösung von Platinchlorid und in absoluten Alkohol eintauchte. Dieses Verfahren bildet ein bekanntes Mittel, um dem Platinmohr seine absorbirende Wirksamkeit zu nehmen.

Hinsichtlich der Anordnung der Apparate für die Widerstandsmessung ist noch Folgendes zu erwähnen. Das mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllte Glasgefäss stand zur Herstellung einer constanten Temperatur in einem mit Wasser gefüllten Zinkkasten, welcher sich in einem zweiten mit Wasser gefüllten Zinkkasten befand, sodass die Böden beider Kästen um einige Centimeter voneinander entfernt waren. Die Temperatur der zu untersuchenden Flüssigkeit wurde an einem in Zehntelgrade getheilten Thermometer von Geissler abgelesen, dessen Kugel mit dem mittleren Theile des Widerstandsgefässes in Berührung stand. Die Lage der festen Punkte wurde ermittelt und die des Eispunktes von

Zeit zu Zeit controlirt. Die Aenderung des Rheostatenwiderstandes mit der Temperatur wurde auf Grund der Angaben eines neben dem Rheostaten hängenden Thermometers in Rechnung gezogen.

2. Die Lösungen.

Die Chemikalien, welche zur Untersuchung gelangten, sind sämmtlich als chemisch rein aus der Fabrik des Hrn. Dr. Th. Schuchardt in Görlitz bezogen. Für jede Lösung ist das spec. Gewicht bei 18° und der Procentgehalt wasserfreien Salzes, d. h. das in hundert Gewichtstheilen Lösung enthaltene Gewicht wasserfreien Salzes ermittelt. Das spec. Gewicht wurde bei zwei Temperaturen mittelst des Pyknometers bestimmt und daraus dasjenige bei 18° interpolirt. Bei der Bestimmung des Procentgehaltes haben mir die Hrn. Dr. La Coste, Dr. Bauer und Dr. Halberstadt in freundlichster Weise Beihülfe geleistet.

Der Procentgehalt der concentrirtesten $CdCl_2$-Lösung wurde von Hrn. Dr. La Coste durch Cl-Bestimmung ermittelt. Hr. Dr. Bauer bestimmte denselben für die concentrirtesten Lösungen von $Cd(NO_3)_2$, $CdBr_2$ und $HgCl_2$ durch die von Classen neuerdings ausgebildete Analyse auf electrolytischem Wege.[1]) Die Concentration der salzreichsten $CdSO_4$- und $HgBr_2$-Lösung ist von Hrn. Dr. Halberstadt ermittelt. Der Gehalt an $CdSO_4$ ist gefunden, indem ein bestimmtes Gewicht der Lösung abgedampft und das übrig bleibende trockene Salz gewogen wurde. Die Ermittelung des $HgBr_2$ geschah mittelst der electrolytischen Analyse. Den Procentgehalt der concentrirtesten K_2CdJ_4-Lösung habe ich durch Abwägen von CdJ_2 und KJ nach äquivalenten Mengen und Wasser erhalten, wobei dem geringen vorher ermittelten Wassergehalte beider Salze Rechnung getragen wurde. Ebenso ist der Gehalt der fünfprocentigen KJ-Lösung durch directes Abwägen von Salz und Wasser gefunden. Aus diesen concentrirtesten Lösungen sind durch Vermischen mit Wasser nach bestimmten Gewichtsverhältnissen die verdünnteren

1) Classen, Quantitative Analyse auf electrolytischem Wege. Aachen, 1882, Verlag von J. A. Mayer.

Lösungen hergestellt. Die CdJ_2-Lösungen endlich sind mit Ansnahme von zweien einzeln durch Abwägen von Salz und Wasser bestimmt. Bei der 44,13 procentigen Lösung erfolgte die Bestimmung durch Eindampfen und Trocknen. Die concentrirteste CdJ_2-Lösung ist eine gesättigte. Ihr Procentgehalt 47,5 ist auf Grund der Angaben von Kremers[1]) und Eder[2]) über die Löslichkeit von CdJ_2 berechnet. Der Zahl mag eine Unsicherheit von 0,5 Proc. anhaften, zumal da die Sättigungstemperatur von mir nicht beobachtet wurde.

Für einige der untersuchten Salze liegen bereits Bestimmungen von Procentgehalt und specifischem Gewicht vor. Folgende Tabelle gibt die einem bestimmten Procentgehalte entsprechenden specifischen Gewichte unter Weglassung der vierten Decimale, wie sie die Beobachtungen von Kremers[3]), B. Franz[4]) und mir ergeben haben. Die von mir gefundenen Zahlen sind auf graphischen Wege interpolirt.

	Procentgehalt	Spec. Gewicht bei 19,5° C. bezogen auf Wasser von gleicher Temperatur: Kremers	Gr.
$CdCl_2$	14,90	1,140	1,144
	25,93	1,269	1,276
	35,63	1,404	1,419
	41,63	1,500	1,516
$CdBr_2$	24,84	1,257	1,260
	37,70	1,443	1,452
CdJ_2	29,26	1,310	1,314

	Procentgehalt	Spec. Gewicht bei 17,5° B. Franz	Spec. Gewicht bei 18° bez. auf H_2O von 4° Gr.
$Cd(NO_3)_2$	5	1,053	1,041
	10	1,098	1,087
	20	1,213	1,190
	30	1,357	1,312
	40	1,537	1,459

Die Abweichungen zwischen den von Hrn. Kremers und mir gefundenen Zahlen entsprechen Concentrationsunterschieden, deren Betrag bei der 41,63 procentigen $CdCl_2$-Lösung ein Procent erreicht. Dass die von Hrn. Dr. La Coste ausgeführte Analyse der concentrirtesten $CdCl_2$-Lösung mit einem Fehler behaftet sei, ist nicht anzunehmen.

1) Kremers, Pogg. Ann. **104.** p. 162. 1858.

2) Eder, Dingl. Journ. **221.** p. 189. 1876.

3) Kremers, Pogg. Ann. **105.** p. 366. 1858; **108.** p. 117. 1859; **111.** p. 61. 1860.

4) B. Franz, Kolbe's Journ. (2) **5.** p. 293. 1872.

Denn durch Eindampfen und Trocknen derselben Lösung fand ich 49,74 als Procentgehalt, während die Cl-Bestimmung die wenig abweichende Zahl 49,51 ergab.

Sehr bedenklich sind die Unterschiede zwischen den Werthen des Hrn. B. Franz und den von mir für $Cd(NO_3)_2$ mitgetheilten Zahlen. Die Differenz der spec. Gewichte für 40 Proc. entspricht nahe einem Concentrationsunterschiede von 5 Proc. Dass die Unterschiede durch Fehler hervorgerufen sind, die von unserer Seite begangen wurden, halte ich für unwahrscheinlich. Denn der von Hrn. Dr. Bauer auf electrolytischem Wege für die salzreichste Lösung gefundene Procentgehalt 48,30 ist in wahrer Uebereinstimmung mit der Zahl 48,13. Letztere ist das Resultat einer Analyse, bei welcher aus einem Theile der Lösung von bekanntem Gewicht $CdCO_3$ durch Na_2CO_3 ausgefällt und ersteres getrennt vom Filter durch Glühen in CdO verwandelt wurde. Ausserdem lieferte eine von mir ausgeführte Controlbestimmung den Werth 48,73 für den Procentgehalt. Derselbe wurde gefunden, indem man ein bestimmtes Gewicht der Lösung vorsichtig eindampfte und trocknete, worauf durch anhaltendes Glühen $Cd(NO_3)_2$ in CdO übergeführt und letzteres gewogen wurde. Bezüglich der Reinheit des Präparates sei bemerkt, dass die Lösung neutral war, und dass sie kaum nachweisbare Spuren von Eisen, dagegen kein Zink enthielt.

3. Die gefundenen Leitungsvermögen und ihre Temperaturcoëfficienten.

In der untenstehenden Tabelle I sind die Resultate meiner Messungen übersichtlich zusammengestellt. Für jede Lösung sind die Leitungsvermögen für zwei Temperaturen in der Nähe von 18° und 26° ermittelt. Die Widerstände, aus denen dieselben berechnet sind, wurden aus einer grösseren Anzahl von Walzeneinstellungen abgeleitet. Bei 18° sind im allgemeinen 16, bei 26° 24 Einstellungen gemacht. Je vier solcher Einstellungen, während welcher die Temperatur mindestens zweimal abgelesen wurde, combinirte ich zu einer Widerstandsmessung, sodass bei niederer Temperatur vier, bei höherer sechs Bestimmungen vorliegen. Aus den so gewonnenen

Widerständen und Temperaturen wurde das Mittel genommen und dieses zur Berechnung der Leitungsvermögen verwandt, wie sie die Tabelle angibt. Eine Einzelangabe der aus vier Einstellungen berechneten Widerstände unterlasse ich, um die Tabelle nicht zu umfangreich zu machen. Es sei nur bemerkt, dass die einzelnen in der Nähe von 18° und 26° gemessenen Widerstände im allgemeinen den geringen Temperaturschwankungen in befriedigender Weise folgen. Erreichte während einer Reihe von vier Einstellungen die Temperaturschwankung den Betrag von 0,08°, so wurde die Messung verworfen.

In Tabelle I findet sich angegeben der Procentgehalt *P*, die mit 1000 multiplicirte Molecülzahl *m*, die bei den zwei Temperaturen τ beobachteten spec. Gewichte *s*, das spec. Gewicht s_{18} bei 18°, die Werthe des mit 10^8 multiplicirten, auf Quecksilber bezogenen Leitungsvermögens *k*, die für die Temperaturen *t* gefunden wurden, das daraus berechnete Leitungsvermögen $k_{18} . 10^8$ bei 18° und endlich der Temperaturcoëfficient $\Delta k / k_{18}$, d. h. die Zunahme des Leitungsvermögens bei 22° in Theilen des Leitungsvermögens bei 18°. Ausserdem ist bei jeder Lösung angegeben, welches Gefäss bei der Widerstandsmessung verwendet wurde. Die Molecülzahlen *m* sind nach F. Kohlrausch[1]) berechnet aus der Gleichung:

$$m = 10 . \frac{P . s_{18}}{A},$$

in welcher *A* das electrochemische Moleculargewicht bedeutet, d. h. das Gewicht des chemischen Molecüls getheilt durch die Anzahl der bei seiner Zerlegung durch den Strom gelösten Valenzen. Für $CdCl_2$ und CdJ_2 ist stets $A = \frac{1}{2} CdCl_2$ und $= \frac{1}{2} CdJ_2$ gesetzt. Wollten wir hier der Hittorf'schen Auffassung der electrolytischen Vorgänge folgen, so würden für concentrirtere Lösungen die Molecülzahlen in anderer Weise zu berechnen sein. Für CdJ_2 wäre $A = \frac{1}{2} Cd_2J_4 = CdJ_2$ entsprechend den Ionen $\frac{1}{2}$ Cd und $\frac{1}{2} CdJ_4$, für $CdCl_2$ wäre es ebenfalls ein einfaches Multiplum von $\frac{1}{2} CdCl_2$. Für K_2CdJ_4 ist den Ionen $\frac{1}{2} K_2$ und $\frac{1}{2} CdJ_4$ entsprechend $A = \frac{1}{2} K_2CdJ_4$ gesetzt.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 14—15; 145—147. 1879.

Es sei hier noch bemerkt, dass eine Aenderung des Leitungsvermögens der 40,03 procentigen CdJ_2-Lösung bei plötzlicher Beleuchtung derselben mittelst einer Magnesiumhandlampe nicht constatirt werden konnte.

Tabelle I.

	Procentgeh. P	Molecülzahl 1000 m	Specifisches Gewicht			Leitungsvermögen			
			τ	s	s_{18}	t	$k \cdot 10^8$	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
$CdCl_2$	0,849	93,7	17,44°	1,0063	1,0062	18,32°	45,8 III	45,5	0,0224
			20,44	1,0056		25,82	53,4		
	5,01	574	17,07	1,0440	1,0437	18,18	156	155	0,0218
			25,50	1,0418		25,85	181		
	10,04	1203	17,12	1,0926	1,0923	17,57	223	225	0,0217
			25,51	1,0898		26,78	268		
	14,94	1874	17,23	1,1439	1,1436	18,17	263	262	0,0218
			25,49	1,1410		25,79	306		
	19,80	2603	17,11	1,1987	1,1984	18,56	281	277	0,0227
			25,45	1,1952		25,62	325		
	29,97	4373	16,22	1,3311	1,3302	18,00	262	262	0,0252
			23,46	1,3272		26,14	316		
	40,13	6558	16,15	1,4912	1,4899	18,22	205	204	0,0291
			23,46	1,4863		25,84	251		
	49,51	9067	16,24	1,6710	1,6697	17,93	131	131	0,0353
			23,46	1,6655		26,11	169		
$CdBr_2$	1,010	75,1	17,74°	1,0073	1,0073	17,87°	33,3 III	33,4	0,0232
			19,96	1,0069		26,08	39,6		
	5,07	390	18,37	1,0436	1,0437	18,05	102	101	0,0225
			20,05	1,0430		25,92	120		
	10,10	813	17,95	1,0916	1,0916	18,11	153	152	0,0232
			19,83	1,0910		25,83	180		
	20,11	1781	17,94	1,2004	1,2004	17,78	218	219	0,0239
			20,34	1,1995		26,11	262		
	29,95	2936	17,81	1,3289	1,3288	17,82	252	253	0,0258
			19,83	1,3278		26,12	306		
	42,99	4904	17,74	1,5466	1,5464	17,86	241	242	0,0288
			19,77	1,5449		26,11	299		
CdJ_2	1,017	56,2	17,40°	1,0074	1,0073	19,04°	20,3 III	19,7	0,0286
			20,44	1,0068		25,21	23,6		
	4,87	278	20,61	1,0402	1,0413	18,62	56,4	55,5	0,0261
			23,62	1,0390		24,93	65,5		
	10,03	599	19,44	1,0880	1,0885	17,01	94,3	96,6	0,0248
			23,32	1.0868		26,60	117,2		
	14,67	913	21,91	1,1341	1,1354	17,03	129	132	0,0242
			28,54	1,1321		26,79	160		
	19,54	1274	18,67	1,1888	1,1890	17,58	167	169	0,0240
			22,66	1,1872		26,35	202		
	29,60	2138	18,75	1,3168	1,3171	17,52	231	234	0,0244
			24,69	1,3139		26,26	281		

(Fortsetzung von Tabelle I.)

	Procent-geh. P	Molecül-Zahl 1000 m	Specifisches Gewicht τ	s	s_{18}	Leitungsvermögen t	$k \cdot 10^8$	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
CdJ_2	40,03	3254	17,85°	1,4822	1,4821	18,21°	282	281	0,0254
			24,28	1,4781		25,54	334		
	44,13	3770	17,32	1,5581	1,5576	17,41	286	290	0,0258
			22,52	1,5544		26,20	352		
	47,5	—	—			17,75	291	293	0,0263
		—	—			26,21	356		
K_2CdJ_4	1,006	29,1	17,72°	1,0066	1,0065	18,15°	38,4 III	38,3	0,0235
			19,87	1,0061		25,66	45,2		
	5,04	151	16,59	1,0390	1,0387	19,04	151	148	0,0227
			19,80	1,0383		25,18	172		
	10,14	315	18,09	1,0821	1,0821	18,27	280	278	0,0224
			19,71	1,0817		25,65	326		
	15,11	490	17,73	1,1281	1,1280	17,82	406	408	0,0218
			19,48	1,1275		26,09	480		
	25,25	896	17,52	1,2340	1,2338	18,25	693 II	689	0,0214
			19,68	1,2329		25,72	803		
	34,96	1362	17,90	1,3553	1,3552	18,51	996	986	0,0207
			19,40	1,3540		25,49	1138		
	45,12	1957	17,95	1,5086	1,5086	18,30	1326 I	1319	0,0198
			19,80	1,5072		25,64	1518		
KJ	1,044	63,4	17,65°	1,0062	1,0062	18,03°	68,3 III	68,2	0,0215
			19,70	1,0059		25,92	79,9		
	5,00	313	17,94	1,0363	1,0363	18,01	315	315	0,0207
			20,24	1,0357		26,04	368		
$Cd(NO_3)_2$	1,014	86,8	17,95°	1,0070	1,0070	18,15°	65,4 III	65,2	0,0226
			19,77	1,0067		25,89	76,8		
	5,02	444	18,04	1,0416	1,0416	18,02	270 II	270	0,0221
			20,36	1,0406		26,04	318		
	10,07	930	18,04	1,0875	1,0875	18,34	483	480	0,0215
			20,36	1,0869		25,62	558		
	20,20	2047	17,95	1,1926	1,1926	18,27	778	773	0,0212
			19,77	1,1918		25,75	900		
	30,00	3345	17,57	1,3127	1,3124	18,17	895 I	891	0,0214
			19,86	1,3114		25,76	1039		
	39,99	4957	17,79	1,4590	1,4589	18,32	847	841	0,0228
			20,01	1,4574		25,71	989		
	48,30	6580	18,00	1,6034	1,6034	18,08	698	697	0,0253
			20,01	1,6017		25,91	836		
$CdSO_4$	0,282	27,2	17,75°	1,0015	1,0015	18,13°	14,4 III	14,3	0,0221
			20,00	1,0010		25,93	16,9		
	1,011	98,3	17,72	1,0085	1,0085	18,06	38,9	38,9	0,0210
			20,99	1,0079		26,01	45,4		
	5,08	514	17,82	1,0495	1,0495	18,15	137	137	0,0206
			21,33	1,0487		25,82	159		
	10,11	1076	17,64	1,1040	1,1039	18,19	233 II	232	0,0206
			20,00	1,1032		25,79	269		

(Fortsetzung von Tabelle I.)

	Procentgeh. P	Molecül-Zahl 1000 m	Specifisches			Leitungsvermögen			
			t	s	s_{18}	t	$k \cdot 10^8$	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
$CdSO_4$	25,03	3127	17,66°	1,2956	1,2955	18,16°	401	400	0,0223
			20,11	1,2949		25,92	470		
	36,07	5133	18,06	1,4755	1,4756	18,23	394 I	392	0,0255
			19,64	1,4748		25,79	470		
$HgCl_2$	0,229	17,0	17,92°	1,0008	1,0008	18,24°	0,41 III	0,41	0,044
			20,24	1,0003		25,79	0,55		
	1,013	75,4	17,55	1,0074	1,0073	18,10	1,06	1,06	0,0372
			20,23	1,0069		25,94	1,37		
	5,08	392	18,19	1,0444	1,0445	18,02	3,91	3,91	0,0249
			20,72	1,0438		25,98	4,69		
$HgBr_2$	0,223	12,4	17,99°	1,0007	1,0007	18,09°	0,15	0,15	0,038
			20,87	1,0001		25,92	0,19		
	0,422	23,6	18,19	1,0025	1,0025	18,01	0,24	0,24	0,032
			20,40	1,0020		25,94	0,30		

In der folgenden Tab. II (p. 193) theile ich für abgerundete Procentzahlen die Werthe des Leitungsvermögens bei 18°, die zugehörigen Temperaturcoëfficienten und die spec. Gewichte bei 18° für die Cadmiumsalze mit. Die Abrundung geschah nach demselben Verfahren, welches bereits früher von F. Kohlrausch und mir zu gleichem Zwecke angewandt wurde.[1]) Die mit einer eingeklammerten Procentzahl in einer Horizontalreihe stehenden Werthe sind direct aus graphischen Darstellungen entnommen und daher weniger genau.

Indem ich F. Kohlrausch weiter in der Anordnung des Beobachtungsmaterials folge, gebe ich in Tabelle III eine Zusammenstellung der Leitungsvermögen und Temperaturcoëfficienten der Cadmiumsalze für abgerundete Molecülzahlen. Dieselben sind nach dem von F. Kohlrausch benutzten Verfahren[2]) aus je zwei Curven für jeden Stoff entnommen. Hinsichtlich der Genauigkeit der so erhaltenen Zahlen gilt im allgemeinen dasselbe, was F. Kohlrausch darüber l. c. sagt. Weniger genau sind die den Molecül-

1) F. Kohlrausch u. Gr., Pogg. Ann. **154.** p. 225. 1875.
2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 146—148. 1879.

Tabelle II.

	P	s_{18}	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$		P	s_{18}	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
$CdCl_2$	1	1,0063	51,1	0,0222	K_2CdJ_4	1	1,0065	38,1	0,0235
	5	1,0436	155	0,0218		5	1,0384	146	0,0227
	10	1,0919	224	0,0217		10	1,0808	275	0,0224
	15	1,1443	262	0,0218		15	1,1269	405	0,0218
	20	1,2007	277	0,0228		(20)	1,1770	537	0,0215
	(25)	1,2620	276	0,0239		25	1,2313	682	0,0214
	30	1,3305	262	0,0252		(30)	1,2890	833	0,0211
	(35)	1,4075	237	0,0269		35	1,3557	987	0,0207
	40	1,4878	205	0,0290		(40)	1,4282	1149	0,0203
	(45)	1,5775	168	0,0319		45	1,5065	1315	0,0198
	50	1,6799	127	0,0353					
					$Cd(NO_3)_2$	1	1,0069	64,4	0,0226
$CdBr_2$	1	1,0072	33,1	0,0232		5	1,0415	269	0,0221
	5	1,0431	101	0,0226		10	1,0869	477	0,0215
	10	1,0907	152	0,0232		(15)	1,1360	639	0,0213
	(15)	1,1432	190	0,0236		20	1,1903	769	0,0212
	20	1,1991	219	0,0239		(25)	1,2500	855	0,0213
	(25)	1,2605	239	0,0247		30	1,3125	891	0,0214
	30	1,3296	253	0,0258		(35)	1,3802	883	0,0220
	(35)	1,4052	257	0,0270		40	1,4590	841	0,0228
	(40)	1,4915	251	0,0281		(45)	1,5430	766	0,0242
	43	1,5467	242	0,0288		48	1,5978	703	0,0252
CdJ_2	1	1,0071	19,7	0,0286	$CdSO_4$	1	1,0084	38,6	0,0210
	5	1,0425	56,5	0,0260		5	1,0486	135	0,0206
	10	1,0883	96,4	0,0248		10	1,1026	230	0,0206
	15	1,1392	135	0,0241		(15)	1,1607	302	0,0208
	20	1,1943	172	0,0240		(20)	1,2245	361	0,0214
	(25)	1,2550	206	0,0241		25	1,2950	400	0,0223
	30	1,3228	236	0,0244		(30)	1,3725	405	0,0236
	(35)	1,4000	262	0,0248		(35)	1,4575	395	0,0251
	40	1,4816	281	0,0253		36	1,4743	392	0,0255
	45	1,5741	291	0,0259					

zahlen 2, 2,5, 3,5, 4 und 4,5 entsprechenden Leitungsvermögen von $CdSO_4$ wegen des grösseren Concentrationsintervalles zwischen dem interpolirt wurde. Die grösste Abweichung der beiden graphisch bestimmten Werthe erreicht hier zwei Procent. Die Zahlen für die Leitungsvermögen, die kleineren Molecülzahlen als 0,5 entsprechen, zeigen Abweichungen bis zu 2,5 Proc. voneinander. Ich habe dieselben mitgetheilt, damit der Leser einen Maassstab gewinne für das sehr merklich verzögerte Wachsen des Leitungsvermögens mit zunehmender Molecülzahl, wenn der Salzgehalt ein geringer ist.

Tabelle III.

	m	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
$CdCl_2$	0,1	47,4	0,0224
	0,2	77,0	222
	0,3	102	221
	0,4	124	220
	0,5	143	219
	1	206	217
	1,5	244	217
	2	266	219
	2,5	276	225
	3	279	233
	3,5	277	239
	4	270	246
	5	247	262
	6	220	280
	7	192	301
	8	163	325
	9	134	351
$CdBr_2$	0,1	40,4	0,0231
	0,2	65,4	229
	0,3	86,0	226
	0,4	103	225
	0,5	117	226
	1	168	235
	1,5	203	237
	2	229	242
	2,5	246	250
	3	253	259
	3,5	254	267
	4	252	274
	4,5	248	281
CdJ_2	0,1	27,8	0,0278
	0,2	43,7	266
	0,3	58,8	259
	0,4	72,5	255
	0,5	84,9	251
	1	142	241
	1,5	188	240
	2	225	242
	2,5	253	247
	3	273	251
	3,5	286	256

	m	$k_{18} \cdot 10^8$	$\frac{\Delta k}{k_{18}}$
K_2CdJ_4	0,1	104	0,0230
	0,2	188	226
	0,3	268	225
	0,4	342	222
	0,5	415	217
	1	758	213
	1,5	1070	215
	2	1341	197
$Cd(NO_3)_2$	0,1	73,2	0,0226
	0,2	135	224
	0,3	193	223
	0,4	247	222
	0,5	297	221
	1	504	214
	1,5	651	213
	2	765	212
	2,5	836	213
	3	877	213
	3,5	893	215
	4	886	218
	4,5	868	222
	5	839	229
	5,5	799	236
	6	755	244
	6,5	705	252
$CdSO_4$	0,1	39,9	0,0210
	0,2	67,1	208
	0,3	91,4	207
	0,4	114	206
	0,5	135	206
	1	221	206
	1,5	284	208
	2	331	210
	2,5	368	215
	3	394	221
	3,5	409	228
	4	411	236
	4,5	405	244
	5	395	253

4. Gang des Leitungsvermögens mit der Concentration der Lösungen.

Ueber den Gang des Leitungsvermögens mit der Concentration der Lösungen geben die Tabellen I, II und III

näheren Aufschluss. Eine allgemeine Uebersicht über denselben erhält man durch die in Fig. 1 u. 2 Taf. II gezeichneten Curven, deren Abscissen die Molecülzahlen darstellen, während die Leitungsvermögens $k_{18} . 10^8$ als Ordinaten aufgetragen sind. In Fig. 1 sind die Curven für die Cadmiumsalze und ausserdem für einige von anderen Beobachtern untersuchte Salze eingetragen. Fig. 2 gibt die Curven für $HgCl_2$ und $HgBr_2$. Die Coordinaten sind hier in grösserem Maassstabe aufgetragen als in Fig. 1, weil Leitungsvermögen und Löslichkeit beider Quecksilbersalze von nur geringer Grösse sind. In Fig. 1_a sind die Temperaturcurven verzeichnet, welche die zusammengehörigen Werthe von m und $\Delta k / k_{18}$ für die Cadmiumsalze liefern. Die beiden Curvensysteme in Fig. 1 und Fig. 1_a für $k_{18} . 10^8$ und $\Delta k / k_{18}$ zeigen eine bereits bei anderen Salzen von F. Kohlrausch bemerkte Beziehung zu einander.[1]) Diese besteht darin, dass im allgemeinen der Temperaturcoëfficient um so grösser ist, je kleiner das Leitungsvermögen, und umgekehrt, sodass Fig. 1_a, wenn auch nicht in allen Theilen, so doch im grossen und ganzen als das „verzerrte Spiegelbild" von Fig. 1 erscheint.

Da das chemische Verhalten des Zinks dem des Cadmiums sehr ähnlich ist, so habe ich ausser den Curven der Cd-Salze auch einige der entsprechenden Zn-Salze eingetragen. Die Curve für $ZnSO_4$ ist nach den Beobachtungen von Beetz[2]) und F. Kohlrausch auf Grund der von letzterem gegebenen Tabelle[3]) construirt. Bei $ZnCl_2$ sind die Beobachtungen von Long[4]) und bei $Zn(NO_3)_2$ die von Freund[5]) benutzt. Für letzteres Salz ist nur ein Punkt verzeichnet. Endlich ist zur Vergleichung des Leitungsvermögens von K_2CdJ_4 und KJ die Curve für letzteres Salz nach den Beobachtungen von F. Kohlrausch und Tollinger[6]) eingetragen.

Wie man sieht, sind die Leitungsvermögen für die beiden

1) l. c. p. 195—196.
2) Beetz, Pogg. Ann. **117.** p. 1. 1862.
3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 150. 1879.
4) Long, Wied. Ann. **11.** p. 37. 1880.
5) Freund, Wied. Ann. **7.** p. 44. 1879.
6) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 16 u. 149. 1879.

Sulphate und Nitrate[1]) bei gleicher Molecülzahl wenig verschieden. Sehr voneinander abweichend verlaufen dagegen die Curven für $CdCl_2$ und $ZnCl_2$. Das Leitungsvermögen des letzteren ist bei gleichem *m* bis zu fünfmal grösser als das von $CdCl_2$, ein Umstand, der bei zwei chemisch so ähnlichen Stoffen, deren Sulphate und Nitrate zudem wenig verschiedene Leitungsvermögen besitzen, höchst auffällig erscheinen muss. Ganz besonders hervorzuheben ist ferner die Reihenfolge der drei Cd-Haloidsalze, wenn man diese nach der Grösse des Leitungsvermögens ordnet. Es zeigt sich nämlich für Lösungen bis etwa zur Molecülzahl 2, dass bei gleichem *m* das Chlorid am besten, das Jodid am wenigsten gut leitet, während das Bromid hinsichtlich des Leitungsvermögens in der Mitte steht. Diese Reihenfolge erscheint deshalb bemerkenswerth, weil die bisherigen Versuche stets die umgekehrte Reihenfolge ergeben haben.[2]) Dieselbe abnorme Reihenfolge zeigen auch die beiden Hg-Salze (s. Fig. 2). Das Chlorid leitet auch hier bei gleicher Molecülzahl besser als das Bromid.

Das Leitungsvermögen des Doppelsalzes K_2CdJ_4 ist, wenn wir von sehr verdünnten Lösungen zunächst absehen, kleiner als das gleichem *m* entsprechende Leitungsvermögen von KJ. Es dürfte sich dieses Verhalten dadurch erklären, dass der zur Anode wandernde Bestandtheil des Doppelsalzes, nach Hittorf $\frac{1}{2}CdJ_4$, wegen seiner complicirteren Zusammensetzung grössere Bewegungshindernisse zu überwinden hat, als das Anion J des KJ.

Bei den meisten der untersuchten Cd-Salze zeigt sich die Erscheinung des Maximums. Auf Grund graphischer Darstellungen finde ich folgende Maxima $k_{18} . 10^8$ für die Procentgehalte *P*:

---

1) Die Vergleichung der Nitrate ist nur innerhalb eines kleinen Concentrationsintervalles möglich, da Freund's concentrirteste Lösung eine fünfprocentige ist.

2) Ein Blick in F. Kohlrausch's Tabelle VII, Wied. Ann. 6. p. 148. 1879 lässt dieses leicht erkennen.

	P	$k_{18} . 10^8$
$CdCl_2$	21,6	278
$CdBr_2$	34,4	257
$Cd(NO_3)_2$	31,4	893
$CdSO_4$	28,6	405

Schliesslich verdienen noch die Temperaturcoëfficienten der Hg-Salze besonderer Erwähnung wegen ihrer Grösse. Werthe wie 0,044 und 0,038 für die verdünntesten Lösungen von $HgCl_2$ und $HgBr_2$ sind bisher nur für wenige Stoffe in concentrirter Lösung gefunden.

5. Verdünnte Lösungen.

Das moleculare Leitungsvermögen, d. h. der Werth, welchem sich das Verhältniss des Leitungsvermögens zur Molecülzahl bei wachsender Verdünnung annähert, erscheint besonders wichtig durch seine einfache Beziehung zu den Ueberführungszahlen der Ionen verdünnter Lösungen, die durch das Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen gegeben ist. F. Kohlrausch stellt für verdünnte Lösungen die Abhängigkeit des Leitungsvermögens von der Molecülzahl m oder dem in der Gewichtseinheit der Lösung enthaltenen Salzgewicht p dar durch die beiden quadratischen Gleichungen:

$$k_{18} = \lambda . m - \lambda' m^2, \qquad k_{18} = \varkappa . p - \varkappa' p^2,$$

in denen λ, λ', $\varkappa$ und $\varkappa'$ Constanten für jede Substanz bezeichnen. Das moleculare Leitungsvermögen ist durch die Constante λ, sowie durch $A\varkappa / 1000$ gegeben, wenn A das electrochemische Moleculargewicht bedeutet. Aus den beiden so gefundenen wenig verschiedenen Werthen des molecularen Leitungsvermögens nimmt F. Kohlrausch das Mittel und führt dasselbe in die spätere Rechnung ein.

Bei den Cd-Salzen sind nun die Curven, wie sie durch meine Beobachtungen für verdünnte Lösungen festgelegt sind, derartig gekrümmt, dass zur Darstellung des wirklichen Verlaufs derselben quadratische Gleichungen der obigen Form im allgemeinen nicht genügen. Bereits zu Anfang meiner Versuche fiel mir dieses bei CdJ_2 auf und veranlasste

mich, ausser der fünfprocentigen Lösung noch eine stärker verdünnte von 1 Proc. zu untersuchen. Um ein möglichst homogenes Material zu erhalten, wurden für die übrigen Cd-Salze ebenfalls die Leitungsvermögen einprocentiger Lösungen bestimmt.

In Ermangelung einer Formel, die den Gang des Leitungsvermögens verdünnter Lösungen für die untersuchten Salze genau darstellt, habe ich mich einstweilen quadratischer Gleichungen von der obigen Form bedient und die Rechnung für die einzelnen Salze unter Zugrundelegung verschiedener Werthepaare von k_{18} und m, resp. p ausgeführt. Die Resultate dieser Rechnung sind in der folgenden Tabelle IV zusammengestellt. Zwei von den für KJ angeführten Werthen sind der Abhandlung von F. Kohlrausch[1]) entlehnt. (Tabelle IV s. p. 199.)

In der 2. und 3. Verticalcolumne sind die Werthe von $\lambda . 10^8$ und $\lambda' . 10^8$ angeführt, wie sie sich ergeben, wenn man diejenigen Leitungsvermögen und Molecülzahlen der Rechnung zu Grunde legt, die den beiden ungefähren Procentgehalten 1 und 5 der Tab. I entsprechen. Die Zahlen der 4. und 5. Columne sind aus den den Molecülzahlen 0,5 und 1 entsprechenden Leitungsvermögen berechnet. In den Columnen 6 bis 11 sind die Werthe von $\varkappa$, $\varkappa'$ und $A\varkappa . 10^8/1000$ angegeben, welche die Rechnung mit den abgerundeten Procentzahlen 1 und 5, sowie 5 und 10 liefert. In der 12. Columne findet sich das Verhältniss des mit 10^8 multiplicirten Leitungsvermögen zur Molecülzahl, berechnet aus den Wertheu für die ca. einprocentigen Lösungen. Endlich gebe ich in Columne 13 Zahlen für $\lambda . 10^8$ an, welche, wie ich glaube, dem wahren Verlaufe der Curven in unmittelbarer Nähe von $m = 0$ am meisten entsprechen. Dieselben sind dadurch gewonnen, dass aus sorgfältig ausgeführten Zeichnungen durch Ziehen einer Tangente der Differentialquotient dk_{18}/dm für das der ca. einprocentigen Lösung entsprechende m entnommen und mit dem zugehörigen Werthepaare k_{18} und m zur Berechnung von λ verwendet wurde. Die aus zwei Curven

1) l. c. p. 153.

Tabelle IV.

	Ber. aus den m entsprechend den P = ca. 1% und 5% der Tab. I		Ber. aus m = 0,5 u. 1		Ber. aus den P = 1% und 5% der Tab. II			Ber. aus den P = 5% und 10% der Tab. II			Ber. aus k_{18} und m entsprechend P = ca. 1% der Tab. I	Ber. aus $\frac{dk_{18}}{dm}$ und k_{18} entsprechend P = ca. 1% der Tab. I
	$\lambda . 10^8$	$\lambda' . 10^8$	$\lambda . 10^8$	$\lambda' . 10^8$	$\varkappa$	$\varkappa'$	$\frac{A . \varkappa . 10^8}{1000}$	$\varkappa$	$\varkappa'$	$\frac{A . \varkappa . 10^8}{1000}$	$\lambda . 10^8$	$\lambda . 10^8$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
	—	—	—	—	0,000	0,000	—	0,0000	0,000	—	—	—
$\frac{1}{2}CdCl_2$	527	448	365	159	562	505	512	394	170	359	485	642
$\frac{1}{2}CdBr_2$	489	587	302	134	364	326	493	251	099	340	445	595
$\frac{1}{2}CdJ_2$	389	683	198	56	218	210	398	130	033	237	351	491
$\frac{1}{2}K_2CdJ_4$	1398	2774	902	144	403	221	1404	311	037	1083	1317	1694
KJ	1093	274	1012	36	—	—	—	63	01	1048	1076	1150
$\frac{1}{2}(CdNO_3)_2$	786	402	686	182	671	265	789	599	122	705	751	869
$\frac{1}{2}CdSO_4$	426	310	318	97	414	287	430	311	082	323	395	512
$\frac{1}{2}HgCl_2$	15	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

erhaltenen λ, deren Mittelwerthe in Col. 13 angegeben sind, weichen in maximo um 3 % voneinander ab.

Wie man sieht, ergeben sich sehr verschiedene Werthe für λ. Dieselben werden um so grösser, je schwächere Concentrationen man der Rechnung zu Grunde legt. Die grössten Werthe kommen den λ der letzten Columne zu. Dass indessen auch sie noch nicht die wahren Werthe der λ darstellen, dafür spricht der Umstand, dass bei $CdSO_4$ ein grösseres λ erhalten wird, wenn der Rechnung die Molecülzahlen der ca. 1- und 0,3procentigen Lösung (s. Tab. I) zu Grunde gelegt werden. Letztere Lösung gelangte zufällig infolge eines Fehlers zur Untersuchung, welcher bei der vor der Herstellung der Lösung ausgeführten Rechnung begangen war. Bei Berücksichtigung dieser verdünntesten $CdSO_4$-Lösung ergibt die Rechnung anstatt der Zahlen 395 und 512 der 12. und 13. Columne die erheblich grösseren Werthe 527 und 621.

Betrachten wir die λ der zweiten Columne, so ergibt sich für $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ das bemerkenswerthe Resultat, dass λ grösser ist als das von F. Kohlrausch gefundene moleculare Leitungsvermögen des KJ. Die Rechnung liefert $\lambda . 10^8 = 1398$, während F. Kohlrausch als Mittel aus den beiden Zahlen der vierten und elften Columne für KJ $\lambda . 10^8 = 1030$ findet.[1]) Die Curven für $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ und KJ müssen sich demnach in der Nähe von $m = 0$ schneiden, da bereits bei mässiger Concentration das Leitungsvermögen des Doppelsalzes kleiner ist als das einer KJ-Lösung von gleicher Molecülzahl (s. Fig. 1).

Das moleculare Leitungsvermögen des $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ erscheint nahe als die Summe der molecularen Leitungsvermögen von KJ und $\frac{1}{2}CdJ_2$.

Denn $\lambda . 10^8 = 1030$ für KJ nach F. Kohlrausch
und $\lambda . 10^8 = \ \ 389$ für $\frac{1}{2}CdJ_2$ nach Col. 2 der Tabelle

liefern summirt 1419, während für $^1/_2 K_2CdJ_4$ der Werth 1398 gefunden wurde.

Da gegen diese Rechnung der Einwand erhoben werden

1) l. c. p. 157.

kann, dass F. Kohlrausch's λ aus Werthen des Leitungsvermögens berechnet ist, die anderen Concentrationen als den von mir zur Rechnung benutzten entsprechen, so habe ich, um auch hier möglichst homogenes Beobachtungsmaterial zu erhalten, das Leitungsvermögen einer ca. einprocentigen KJ-Lösung bestimmt (s. Tab. I). Daneben gelangte eine fünfprocentige Lösung lediglich der Controle meiner Zahlen wegen zur Untersuchung. Die für diese gefundenen Werthe (Tab. I) sind mit denen von F. Kohlrausch in recht guter Uebereinstimmung. Es ist für $P = 5{,}00\,\%$:

$k_{18}\,.\,10^8 = 317$	$\frac{\Delta k}{k_{18}} = 0{,}0206$	$s_{18} = 1{,}0363$	nach den Versuchen von F. Kohlrausch.[1]
$= 315$	$= 0{,}0207$	$= 1{,}0363$	nach denen des Verfassers.

Berechnen wir aus den m, die der ca. ein- und der fünfprocentigen Lösung entsprechen, für KJ das moleculare Leitungsvermögen, so ergibt sich für die zweite Columne $\lambda\,.\,10^8 = 1093$[2]), ein Werth, der immer noch kleiner ist als die entsprechende Zahl für das Doppelsalz. Die Summation der so bestimmten $\lambda\,.\,10^8$ für KJ und $\frac{1}{2}CdJ_2$ liefert $1093 + 389 = 1482$, also einen Werth, der um ca. 6 % grösser ist als das für $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ gefundenen $\lambda\,.\,10^8$. Legen wir der Rechnung die Zahlen der Col. 13 zu Grunde, so erhalten wir für die Summe der molecularen Leitungsvermögen $1150 + 491 = 1641$, eine Zahl, die um ca. 3 % kleiner ist als der für $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ gefundene Werth 1694.

Die Abweichungen zwischen dem molecularen Leitungsvermögen des Doppelsalzes und der Summe der λ für KJ und $\frac{1}{2}CdJ_2$ dürften sich hinreichend erklären aus der Unsicherheit, die der Berechnung der λ anhaftet, wie sie sich aus meinen Beobachtungen ergeben. Sehen wir von diesen Abweichungen ab, so würde in sehr verdünnten Lösungen von $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ die Stromleitung gerade so erfolgen, wie wenn der Strom sich im Verhältniss der Leitungsvermögen zwischen

1) l. c. p. 38.

2) Dass das so berechnete $\lambda\,.\,10^8$ grösser ist als der von F. Kohlrausch gefundene Werth, ist vielleicht auf die von ihm l. c. p. 174—175 entwickelten Gründe zurückzuführen.

den einfachen Salzen KJ und $\frac{1}{2}CdJ_2$ theilte. In Bezug auf den Durchgang des electrischen Stromes würden wir somit das Doppelsalz in sehr verdünnter Lösung als in die einfachen Salze dissociirt anzusehen haben. Es ist das ein Resultat, zu welchem bereits Hittorf auf Grund seiner Ueberführungsversuche gelangte[1]), und welches somit durch meine Versuche eine neue Bestätigung erhalten hat.

Die Aenderung, welche das Leitungsvermögen k_{18} der Cadmiumsalze in verdünnten Lösungen durch Aenderung der Concentration erfährt, ist übersichtlich aus Fig. 3 zu ersehen, die in grösserem Maassstabe als Fig. 1 gezeichnet ist. Die mit $KJ + \frac{1}{2}CdJ_2$ bezeichnete Curve stellt die Summe der Leitungsvermögen von KJ und $\frac{1}{2}CdJ_2$ dar. Wie man sieht, fällt diese Curve mit derjenigen von $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ nur bei äusserster Verdünnung zusammen. Bei wachsender Concentration entfernt sich letztere von ersterer, schneidet die KJ-Curve und verläuft dann in der bereits unter 4 beschriebenen Weise weiter.

Bemerkenswerth erscheint noch, dass das moleculare Leitungsvermögen des Doppelsalzes nicht nur bei der Temperatur 18°, sondern überhaupt für das Temperaturintervall 18° bis 26° genähert als Summe der Leitungsvermögen der einfachen Salze erscheint. Extrapoliren wir linear aus den Temperaturcoëfficienten der beiden verdünntesten Lösungen $\Delta k/k_{18}$ für $m = 0$, so erhalten wir:

$\frac{\Delta k}{k_{18}} =$	0,0236	0,0217	0,0292
für	K_2CdJ_4	KJ	CdJ_2.

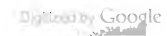
Hieraus ergeben sich bei 26° für $\lambda . 10^8$ folgende Werthe:

KJ	$\frac{1}{2}CdJ_2$	$\frac{1}{2}K_2CdJ_4$	$KJ + \frac{1}{2}CdJ_2$	
1283	480	1662	1763	nach Col. 2
1350	605	2014	1955	nach Col. 13.

Die unter $KJ + \frac{1}{2}CdJ_2$ stehende Summe der $\lambda . 10^8$ für die einfachen Salze weicht von den entsprechenden Zahlen unter $\frac{1}{2}K_2CdJ_4$ um nahe denselben Betrag ab wie bei 18°.

Es soll zunächst versucht werden, aus den Werthen des molecularen Leitungsvermögens und der Ueberführungszahlen

1) Hittorf, Pogg. Ann. 106. p. 525—530. 1859.



für $CdCl_2$ und CdJ_2 die Beweglichkeiten der Ionen beider Salze zu berechnen. Im Folgenden gebe ich eine Zusammenstellung der von Hittorf gefundenen Ueberführungszahlen n des Anions[1]) mit den entsprechenden Molecülzahlen der von ihm untersuchten Lösungen. Letztere habe ich aus Hittorf's Angabe des Procentgehaltes berechnet, indem ich das denselben entsprechende specifische Gewicht bei 18° graphisch interpolirte.

$\frac{1}{2}CdCl_2$			$\frac{1}{2}CdJ_2$		
Wassergehalt auf 1 Theil Salz nach H.	m	n	Wassergehalt auf 1 Theil Salz nach H.	m	n
191,82	0,0571	0,708	166,74	0,0328	0,613
98,708	0,111	0,725	69,60	0,0785	0,642
5,7611	1,853	0,744	18,12	0,300	0,931
3,3553	3,111	0,772	4,277	1,229	1,14
2,7588	3,744	0,779	3,04	1,699	1,192
1,9832	5,092	0,873	1,8313	2,722	1,258
1,2848	7,461	1,014			
1,2724	7,520	1,015			

Wie man sieht, ändern sich die n bei CdJ_2 beträchtlich auch für verdünnte Lösungen. Die Wahl der in Rechnung zu ziehenden Ueberführungszahl ist demnach hier höchst unsicher, und das von F. Kohlrausch befolgte Verfahren, die Ueberführungszahl für sehr verdünnte Lösungen zu bestimmen[2]), würde bei CdJ_2 sehr willkürlich erscheinen. In Ermangelung eines sicheren Anhaltspunktes für die Wahl der richtigen Ueberführungszahl wollen wir die Werthe von n in die Rechnung einführen, die den beiden Lösungen niedrigster Concentration entsprechen. Wir bezeichnen mit F. Kohlrausch die Beweglichkeit des Kations durch u, die des Anions durch v und haben demnach[3]):

$$u = (1 - n)\lambda \qquad v = n . \lambda$$

Indem wir die in der zweiten Columne der Tabelle IV enthaltenen λ benutzen, setzen wir für:

$$\tfrac{1}{2}CdCl_2 \qquad \lambda . 10^7 = 52,7 \qquad n = 0,708$$
$$\tfrac{1}{2}CdJ_2 \qquad \lambda . 10^7 = 38,9 \qquad n = 0,613$$

1) l. c. p. 542—543; 546—547.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 163. 1879.

3) l. c. p. 167—172.

und erhalten hieraus für:

$\frac{1}{2}CdCl_2$ $u.10^7 = 15{,}4$ $v.10^7 = 37{,}3$
$\frac{1}{2}CdJ_2$ $u.10^7 = 15{,}1$ $v.10^7 = 23{,}8$.

Legen wir die λ der Columne 13 zu Grunde, so ergibt sich für:

$\frac{1}{2}CdCl_2$ $u.10^7 = 18{,}7$ $v.10^7 = 45{,}5$
$\frac{1}{2}CdJ_2$ $u.10^7 = 19{,}0$ $v.10^7 = 30{,}1$.

F. Kohlrausch findet nun für die mit 10^7 multiplicirte Beweglichkeit des Anions die Werthe 49 für Cl und 53 für J[1]), also Zahlen, die von den obigen sehr erheblich abweichen, die bezüglich ihrer Grösse in anderer Reihenfolge stehen als die von mir erhaltenen, und von denen sogar die für J grösser ist als das für $\frac{1}{2}CdJ_2$ berechnete $\lambda.10^7$. Gegenüber diesen Abweichungen muss es sehr auffällig erscheinen, dass für $\frac{1}{2}$Cd sich aus beiden Salzen fast genau die gleiche Beweglichkeit ergibt.

Dieses eigenthümliche Resultat veranlasste mich zur Untersuchung der übrigen Salze. Offenbar muss es wünschenswerth erscheinen, nach einer weiteren Bestätigung der so gefundenen Beweglichkeiten zu suchen. Dieses kann geschehen durch Untersuchung noch anderer Cd = Salze, für deren Anion die Beweglichkeit bereits bekannt ist. Ich habe hierzu $Cd(NO_3)_2$ und $CdSO_4$ gewählt. Das moleculare Leitungsvermögen dieser Salze und die bekannten Beweglichkeiten von NO_3 und $\frac{1}{2}SO_4$ würden gestatten, die Beweglichkeit von $\frac{1}{2}$Cd zu berechnen.

Man kann andererseits nach einer Bestätigung der abnormen Werthe der v für Cl und J suchen. Dieses that ich auf Grund der Vermuthung, dass vielleicht jene abnormen Werthe auf irgend eine Weise im Zusammenhang ständen mit der einatomigen Constitution des Cd-Molecüls, und dass die Untersuchung der Haloidsalze anderer einatomiger Metalle auf dieselben Beweglichkeiten der Halogene führen könnte wie beim Cd. Soweit die Kenntniss der Moleculargewichte reicht, ist ausser dem Cd das Quecksilber das einzige Element, für welches das Atomgewicht gleich

1) l. c. p. 172 und 183.

dem Moleculargewichte ist. Da die Ueberführungszahlen für $HgCl_2$ nicht bekannt sind[1]), so musste ein Umweg eingeschlagen werden. Der nächst liegende Gedanke wäre wohl, die Leitungsvermögen von $HgCl_2$ und HgJ_2 zu bestimmen und zu untersuchen, ob die aus $CdCl_2$ und CdJ_2 abgeleiteten Beweglichkeiten von Cl und J bei beiden Hg-Salzen auf dieselbe Beweglichkeit des Hg führen. Da indessen auf die Untersuchung von HgJ_2 wegen seiner Unlöslichkeit in Wasser verzichtet werden muss, so wurde neben $HgCl_2$ noch $HgBr_2$ untersucht und ausserdem $CdBr_2$. Aus der Beweglichkeit des $\frac{1}{2}$Cd, wie sie sich aus $CdCl_2$ und CdJ_2 ergibt, findet sich dann die für Br. Diese neben der abnormen von Cl müsste mit Hülfe der λ von $HgCl_2$ und $HgBr_2$ gleiche Werthe der Beweglichkeit für $\frac{1}{2}$Hg liefern.

Obwohl der soeben dargelegte Gedankengang, der mich zur Untersuchung der Salze $Cd(NO_3)_2$, $CdSO_4$, $CdBr_2$, $HgCl_2$ und $HgBr_2$ führte, im wesentlichen sich als irrig erwiesen hat, so glaube ich doch, dass die vorliegende Untersuchung geeignet erscheint, eine Erweiterung unserer Kenntniss vom Durchgange des Stromes durch Electrolyte anzubahnen, falls es gelingt, die Ursachen aufzufinden, durch welche die eigenthümlichen Werthe des molecularen Leitungsvermögens bei den Cd-Salzen hervorgerufen sind.

Legt man dem $\frac{1}{2}$Cd diejenige Beweglichkeit bei, wie sie p. 203—204 mittelst der Hittorf'schen Ueberführungszahlen berechnet wurde, so kommt man zu Resultaten, die mit dem Gesetze von der unabhängigen Wanderung der Ionen nicht in Einklang zu bringen sind.

Setzen wir zunächst $u \cdot 10^7 = 15,2$ für $\frac{1}{2}$Cd, indem wir das Mittel aus den beiden p. 204 gefundenen $u \cdot 10^7$ nehmen, und benutzen wir die λ der zweiten Columne in Tabelle IV, so erhalten wir aus:

$\lambda \cdot 10^7 = 48,9$	für $\frac{1}{2}CdBr_2$
$\lambda \cdot 10^7 = 78,6$	„ $\frac{1}{2}Cd(NO_3)_2$
$\lambda \cdot 10^7 = 42,6$	„ $\frac{1}{2}CdSO_4$

1) Wegen des grossen Widerstandes der $HgCl_2$-Lösungen ist die Bestimmung der Ueberführungszahlen jedenfalls mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden. S. Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 569—570. 1859.

als Beweglichkeit des Anions:

$v \cdot 10^7 = 33{,}7$ für $\frac{1}{2}Br_2$

$v \cdot 10^7 = 63{,}4$ „ $\frac{1}{2}(NO_3)_2$

$v \cdot 10^7 = 27{,}4$ „ $\frac{1}{2}SO_4$.

Dagegen findet F. Kohlrausch ganz andere Zahlen[1]), nämlich:

$v \cdot 10^7 = 53$ für Br

$v \cdot 10^7 = 46$ „ NO_3

$v \cdot 10^7 = 40$ und $= 22$ „ $\frac{1}{2}SO_4$

den letzten Werth 22 aus den Sulphaten von Magnesium, Zink und Kupfer.

Durch Benutzung der Zahlen in Columne 13 der Tabelle IV und der Beweglichkeit $u \cdot 10^7 = 18{,}9$ für $\frac{1}{2}$Cd lässt sich ebenfalls keine Uebereinstimmung erzielen.

Auch die molecularen Leitungsvermögen der Hg-Salze liefern keine Bestätigung der vorhin gefundenen Beweglichkeiten von Cl und Br. Letztere sind sogar sehr bedeutend grösser als die λ für $\frac{1}{2}HgCl_2$ und $\frac{1}{2}HgBr_2$. Dagegen erscheint, was gewiss Beachtung verdient, auch hier die Beweglichkeit des Cl grösser als die des Br, wie es dem bereits unter vier dargelegten Gange des Leitungsvermögens mit der Concentration entspricht. Für $\frac{1}{2}HgCl_2$ liefert die Rechnung $\lambda \cdot 10^7 = 2{,}7$, für $\frac{1}{2}HgBr_2$ $\lambda \cdot 10^7 = 1{,}4$, wenn derselben die Zahlen der beiden Lösungen niedrigster Concentration zu Grunde gelegt werden.

Verwenden wir endlich die aus den Molecülzahlen $m = 0{,}5$ und $= 1$ berechneten λ von $\frac{1}{2}CdCl_2$ und $\frac{1}{2}CdJ_2$ zur Bestimmung der Beweglichkeiten von $\frac{1}{2}$Cd, Cl und J, so erhalten wir:

$u \cdot 10^7 = 10{,}7$ $v \cdot 10^7 = 25{,}8$ aus dem Chloride,

$u \cdot 10^7 = 7{,}7$ $v \cdot 10^7 = 12{,}1$ aus dem Jodide,

also Zahlen, die wiederum absolut nicht zu dem Gesetze von der unabhängigen Wanderung der Ionen passen.

Wie mir scheint, ist die auf den ersten Blick auffällige Uebereinstimmung der Werthe $u \cdot 10^7$ für $\frac{1}{2}$Cd, welche die früher angestellte Rechnung ergab, lediglich ein Zufall und

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 183. 1879.

zum Theil hervorgerufen durch die bei CdJ_2 einigermassen willkürliche Wahl der zur Rechnung verwendeten Ueberführungszahl (s. p. 203).

Im Folgenden will ich versuchen, die Ursachen darzulegen, durch welche vielleicht die eigenthümlichen Werthe der λ hervorgerufen sind. Ich bemerke ausdrücklich, dass die Hypothese, die ich dabei zu Grunde lege, noch sehr der weiteren Bestätigung bedarf, und ich dieselbe daher mit allem Vorbehalt mittheile.

Betrachtet man mittelst einer sorgfältigen graphischen Darstellung der Abhängigkeit von Leitungsvermögen und Molecülzahl näher den Verlauf der beiden Curven für $\frac{1}{2}CdCl_2$ und $\frac{1}{2}CdJ_2$, so lassen beide abgesehen von äusserster Verdünnung eine auffällige Beziehung zueinander erkennen. Diese zeigt sich darin, dass für denselben Werth des Leitungsvermögens die diesem entsprechende Molecülzahl für $\frac{1}{2}CdJ_2$ nahe zweimal so gross ist wie die für $\frac{1}{2}CdCl_2$. Genannte Beziehung ist vorhanden etwa bis zu dem Werthe $k_{18} . 10^8 = 175$ oder innerhalb einer Concentrationsänderung von ca. 6% bei $CdCl_2$, vou ca. 20,5% bei CdJ_2. Man kann demnach sagen: Es besitzen Lösungen von $CdCl_2$ und CdJ_2 bei gleicher Molecülzahl nahe gleiches Leitungsvermögen, wenn für $CdCl_2$ das electrochemische Moleculargewicht $A = \frac{1}{2}CdCl_2$, für CdJ_2 dagegen $A = \frac{1}{2}(CdJ_2 + CdJ_2) = \frac{1}{2}Cd_2J_4$ gesetzt wird. Wie weit diese Uebereinstimmung geht, ist aus folgender Tabelle ersichtlich. In der zweiten und dritten Columne sind die Molecülzahlen für beide Salze angegeben, wie sie dem Leitungsvermögen der ersten Columne entsprechen. Die letzte Columne enthält das Verhältniss beider Molecülzahlen.

$k_{18} . 10^8$	$\frac{1}{2}CdCl_2$ m	$\frac{1}{2}CdJ_2$ m	Verhältniss	$k_{18} . 10^8$	$\frac{1}{2}CdCl_2$ m	$\frac{1}{2}CdJ_2$ m	Verhältniss
25	0,041	0,083	2,0	125	0,406	0,850	2,1
50	0,109	0,240	2,2	150	0,543	1,081	2,0
75	0,192	0,420	2,2	175	0,719	1,350	1,9
100	0,290	0,626	2,2				

Nach F. Kohlrausch kommen den Anionen Cl und J die wenig verschiedenen Beweglichkeiten 49 und 53 zu, und Lösungen des Chlorids und Jodids eines bestimmten Metalls

besitzen in nicht allzu concentrirten Lösungen bei gleichem Leitungsvermögen auch angenähert gleiche Molecülzahl.[1]) Die nahe Uebereinstimmung, welche die Curven für $CdCl_2$ und CdJ_2 zeigen, wenn man für ersteres $A = \frac{1}{2}CdCl$, für letzteres $A = \frac{1}{2}Cd_2J_4$ setzt, muss den Gedanken nahe legen, dass in CdJ_2-Lösungen nur die Hälfte der Molecüle $\frac{1}{2}CdJ_2$ den Strom leitet, vorausgesetzt, dass in $CdCl_2$-Lösungen alle Molecüle $\frac{1}{2}CdCl_2$ Träger der Electricität sind. Diese Anschauungsweise möchte ich noch näher präcisiren durch die bereits von Hittorf gemachte Annahme, dass die Molecüle $\frac{1}{2}CdJ_2$ in der Lösung zu Molecülgruppen vereinigt sind. Nach meiner Auffassung, welche, wie mir scheint, von derjenigen Hittorf's im folgenden abweicht, bildet bei der Electrolyse nur je ein Molecül $\frac{1}{2}CdJ_2$ einer Gruppe mit den Ionen $\frac{1}{2}Cd$ und $\frac{1}{2}J_2$ den Träger der Electricität, während der Rest der Gruppe am Stromdurchgang nicht direct betheiligt ist. Dagegen kann durch Reibung oder sonstige Kräfte dieser Rest von einem der Ionen mitgenommen und mit gleicher oder geringerer Geschwindigkeit fortgeführt werden. Auf diese Weise lässt sich die von Hittorf beobachtete Vermehrung des Cd an der Anode bei der Electrolysirung von CdJ_2 erklären. Die Vermehrung des Cd an der Anode bei Lösungen von $CdCl_2$ findet in gleicher Weise ihre Erklärung. Die Gründe für die Annahme von Molecülgruppen auch bei diesem Salze, soweit dieselben auf den Beobachtungen der Leitungsvermögen beruhen, werden weiter unten hervortreten.

Mittelst der vorhin entwickelten Anschauungsweise möchte ich eine Erklärung der eigenthümlichen Werthe der früher für die Cd-Salze gefundenen λ versuchen. Ich gehe dabei aus von den Werthen des molecularen Leitungsvermögens, welche wie in den Rechnungen von F. Kohlrausch aus den Molecülzahlen 0,5 und 1 abgeleitet sind. Wenn ich die aus $p = 0{,}05$ und $p = 0{,}10$ berechneten λ nicht mit benutze, während dieses in den Rechnungen von F. Kohlrausch geschieht, so verkenne ich durchaus nicht, dass darin eine gewisse Willkür liegt.

1) l. c. Tab. VII. p. 148.

Zufolge Tabelle IV, Columne 4 ist:

	für $\frac{1}{2}CdCl_2$	$\frac{1}{2}CdBr_2$	$\frac{1}{2}CdJ_2$	$\frac{1}{2}Cd(NO_3)_2$
$\lambda . 10^7 =$	36,5	30,2	19,8	68,6
	2	2,5	4	1

Multipliciren wir die $\lambda . 10^7$ mit den darunter stehenden Zahlen 2, 2,5, 4 und 1, so ergibt sich:

$$2 . \lambda . 10^7 = 73,0 \text{ für } \tfrac{1}{2}CdCl_2$$
$$2,5 . \lambda . 10^7 = 75,5 \quad \tfrac{1}{2}CdBr_2$$
$$4 . \lambda . 10^7 = 79,2 \quad \tfrac{1}{2}CdJ_2$$
$$1 . \lambda . 10^7 = 68,6 \quad \tfrac{1}{2}Cd(NO_3)_2 .$$

Betrachten wir einmal diese Multipla der λ als die wirklichen molecularen Leitungsvermögen und berechnen aus ihnen die Beweglichkeit des $\frac{1}{2}Cd$, indem wir für Cl, Br, J und NO_3 nach F. Kohlrausch $v . 10^7 = 49$, $= 53$, $= 53$ und $= 46$ setzen, so erhalten wir aus:

$$\tfrac{1}{2}CdCl_2 \text{ für } \tfrac{1}{2}Cd \quad u . 10^7 = 24,0$$
$$\tfrac{1}{2}CdBr_2 \quad 22,5$$
$$\tfrac{1}{2}CdJ_2 \quad 26,2$$
$$\tfrac{1}{2}Cd(NO_3)_2 \quad 22,6 ,$$

also Zahlen, die nicht erheblich differiren. Die Uebereinstimmung wird noch besser, wenn wir das Mittel gleich 23,8 aus den $u . 10^7$ für $\frac{1}{2}Cd$ nehmen und aus demselben und aus den Beweglichkeiten von F. Kohlrausch das oben bestimmte Multiplum des molecularen Leitungsvermögens berechnen. Es ergibt sich dann:

	Berechnet aus		
	den Beweglichkeiten	den $k_{18} . 10^8$ entsprechend $m = 0,5$ und $m = 1$	
$2 \lambda . 10^7 =$	72,8	73,0	$\frac{1}{2}CdCl_2$
$2,5 \lambda . 10^7 =$	76,8	75,5	$\frac{1}{2}CdBr_2$
$4 \lambda . 10^7 =$	76,8	79,2	$\frac{1}{2}CdJ_2$
$\lambda . 10^7 =$	69,8	68,6	$\frac{1}{2}Cd(NO_3)_2$

Die Uebereinstimmung ist eine auffallende, wenn man bedenkt, dass gerade bei den Cd-Salzen die Berechnung der λ mit Unsicherheiten verbunden ist.

Auch $CdSO_4$ schliesst sich dem Gesetze von der unabhängigen Wanderung der Ionen an, wenn wir statt des mole-

cularen Leitungsvermögens $\lambda . 10^7 = 31,8$ den doppelten Werth 63,6 einführen und mit F. Kohlrausch die mit 10^7 multiplicirte Beweglichkeit von $\frac{1}{2} SO_4$ gleich 40 setzen; denn letztere zu 23,8 addirt, gibt als Summe 63,8. Setzen wir $v . 10^7 = 22$ für $\frac{1}{2} SO_4$, eine Zahl, die F. Kohlrausch aus den Beobachtungen an den Sulphaten von Magnesium, Zink und Kupfer ableitet[1]), so liefert die Differenz $31,8 - 22 = 9,8$ einen Werth für $u . 10^7$, der hinsichtlich seiner Grösse den entsprechenden Zahlen 14, 12 und 12 für Mg, Zn und Cu nahe steht.

Durch die vorhin ausgeführte Multiplication der $\lambda . 10^7$ mit den Zahlen 2, 2,5 und 4 haben wir diejenigen molecularen Leitungsvermögen berechnet, welche sich ergeben, wenn bei $CdCl_2$, $CdBr_2$ und CdJ_2 nur $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{4}$ aller Molecüle $\frac{1}{2} CdCl_2$, $\frac{1}{2} CdBr_2$ und $\frac{1}{2} CdJ_2$ den Strom leiten würde, falls bei $Cd(NO_3)_2$ alle Molecüle $\frac{1}{2} Cd(NO_3)_2$ den Stromdurchgang vermitteln. Das ist in Wirklichkeit bei sehr verdünnten Lösungen wohl nicht der Fall; bei zunehmender Verdünnung dürfte vielmehr ein Zerfall der Molecülgruppen eintreten. Ein solcher wird bereits von Hittorf auf Grund seiner Ueberführungsversuche angenommen. Derselbe sagt bei Besprechung der für CdJ_2 erhaltenen Resultate[2]): „Mit der Zunahme des Wassers zerfallen die Doppelatome in immer wachsender Zahl in die einfachen, der Strom wird daher immer mehr von den einfachen geleitet, welche bei starken Verdünnungen allein vorhanden sind.“ Dafür scheint mir auch das bedeutend verzögerte Wachsthum des Leitungsvermögens mit zunehmender Molecülzahl bei sehr verdünnten Lösungen der untersuchten Salze zu sprechen, wie es aus Tab. III und den Werthen von λ' in Col. 3 der Tab. IV zu ersehen ist. Bliebe die Constitution der electrolytischen Molecüle ungeändert, so würde vielmehr bei verdünnten Lösungen angenäherte Proportionalität zwischen Leitungsvermögen und Molecülzahl zu erwarten sein. Die obigen Vielfachen der λ möchte ich daher als ideale moleculare Lei-

1) l. c. p. 179—180.

2) Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 546. 1859.

tungsvermögen bezeichnen, d. h. als die Verhältnisse des Leitungsvermögens zur Zahl der wirklich leitenden Molecüle, wenn die Constitution der in Lösung vorhandenen Molecüle in äusserst verdünnter Lösung dieselbe bliebe, wie sie im Mittel zwischen den Concentrationen $m = 0{,}5$ und $m = 1$ vorhanden ist.

Die sehr kleinen Werthe des molecularen Leitungsvermögens von $\frac{1}{2} HgCl_2$ und $\frac{1}{2} HgBr_2$ sind vielleicht ebenfalls durch das Vorhandensein von Molecülgruppen in der wässerigen Lösung zu erklären.

Die Beantwortung der Frage, ob die vorhin entwickelte Hypothese über die Stromleitung durch die Cd-Salze richtig ist, muss weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Ich beabsichtige, dieselbe zunächst durch genauere Untersuchung des Leitungsvermögens sehr verdünnter Cd-Salz-Lösungen weiter zu verfolgen.

Zu Gunsten der Anschauung, dass während des Stromdurchganges nicht alle Salzmolecüle eine Wechselzersetzung erleiden[1], möchte ich noch die von G. Wiedemann[2]) Stephan[3]) und mir[4]) gefundenen Beziehungen zwischen der Fluidität, d. h. der reciproken Reibungsconstante, und dem galvanischen Leitungsvermögen anführen. Wenn selbst für concentrirte Lösungen auffällige Zahlenbeziehungen bestehen zwischen der Aenderung des Leitungsvermögens und der Fluidität, so scheint daraus hervorzugehen, dass die Hindernisse, die sich den electrolytischen Verschiebungen der Ionen entgegensetzen, in sehr merklichem Grade durch die innere Reibung des Electrolyts, wenn auch nicht allein durch diese, hervorgerufen sind. Wenn es hier erlaubt ist, die Mechanik grösserer Massen auch auf solche von molecularen Dimensionen anzuwenden, so würden wir bei der Bewegung der

---

1) Auch F. Kohlrausch hält dieses für möglich; s. den zweiten Absatz Wied. Ann. **6.** p. 167. 1879.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **99.** p. 228. § 10. 1856.

3) Stephan, Beiträge zu den Beziehungen zwischen Fluidität und galvanischem Leitungsvermögen. Inaug.-Diss. Breslau 1882.

4) Pogg. Ann. **157.** p. 130, 237. 1876; **160.** p. 238. 1877. Wied. Ann. **8.** p. 529. 1879.

Ionen durch die Schaar der Molecüle von Lösungsmittel und unzersetztem Salz analoge Verhältnisse haben, wie bei der Bewegung eines Körpers in einer reibenden Flüssigkeit. Nach Stokes[1]) ist die Geschwindigkeit, welche durch eine gegebene Kraft einer Kugel ertheilt wird, die sich in einer reibenden sie benetzenden Flüssigkeit befindet, direct der Fluidität der Flüssigkeit proportional. Falls dieser Satz ohne weiteres für die Bewegung der Ionen gültig wäre, so würde das Leitungsvermögen, dividirt durch die Zahl der electrolytisch leitenden Molecüle, der Fluidität des aus Lösungsmittel und unzersetztem Salz bestehenden Mediums proportional sein oder angenähert der Fluidität des Electrolyten selbst, wenn die Zahl der electrolytisch leitenden Molecüle einen nicht zu grossen Bruchtheil aller in Lösung befindlichen Salzmolecüle bilden würde. Unter dieser Voraussetzung müssten ferner die Fluidität einer Salzlösung und deren Leitungsvermögen bei verschiedenen Temperaturen genähert einander proportional sein. In dem Umstande, dass diesen Beziehungen die Beobachtungen in allerdings nur sehr roher Annäherung entsprechen, möchte ich eine weitere Stütze für eine nur partielle Electrolysirung der in nicht zu verdünnten Lösungen vorhandenen Salzmolecüle beim Stromdurchgange erblicken.

Vielleicht steht die Gruppirung der Molecüle zu Molecülcomplexen, in denen nur eines die Stromleitung vermittelt, in einem inneren Zusammenhange mit dem Hittorf'schen Satze: „Electrolyte sind Salze.“[2]) Es würde das bedeuten, dass die chemische Zersetzung eines Electrolyten durch einen anderen unter Austausch der Ionen um so schwerer eintritt, und zugleich ein um so geringeres Leitungsvermögen vorhanden ist, je grösser die Zahl der zu einer Molecülgruppe vereinigten Molecüle ist. Hittorf hat seinen Satz u. a. in eingehender Weise an $HgCl_2$ und $HgBr_2$ erläutert und

---

1) Stokes, Cambridge Phil. Soc. Trans. **9.** 1856. Kirchhoff, Mechanik. Sechsundzwanzigste Vorlesung.

2) Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 561—574. 1859. Wied. Ann. **4.** p. 374. 1878.

bereits mitgetheilt, dass beide Salze einen nicht viel geringeren Widerstand, wie das reine Wasser besitzen.[1]) In der That haben meine Versuche in beiden Salzen Leiter sehr niederer Ordnung ergeben.

Aachen, im November 1882.

II. *Ueber die durch electrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes; von W. C. Röntgen.*

(Aus den Ber. d. Oberhess. Ges. für Natur- u. Heilkunde. 22.)

Es hat bekanntermassen Hr. W. Thomson die Erscheinungen der Pyroelectricität durch die Annahme zu erklären versucht, dass das Innere der pyroelectrischen Krystalle sich in einem Zustand dauernder electrischer Polarisation befindet; die Wirkung dieser Polarisation nach aussen wäre durch eine immer vorhandene electrische Ladung der Oberfläche neutralisirt, solange die Polarisation unverändert bleibt. Temperaturänderungen der Krystalle sollten nun dieselbe ändern, und es wäre die beobachtete Pyroelectricität eine Folge dieser Aenderung.

Diese Ansicht hat durch die vor einiger Zeit von den Hrn. J. und P. Curie[2]) aufgefundenen, von Hrn. Hankel[3]) bestätigten und als piëzoelectrische bezeichneten Erscheinungen, sowie durch die ebenfalls von J. und P. Curie[4]) angestellten Versuche über die durch Electricität erzeugten Formveränderungen von pyroelectrischen Krystallen eine Stütze gewonnen; wenigstens lassen sich jene Erscheinungen durch die erwähnte Hypothese in ungezwungener Weise erklären.

---

1) Hittorf, Pogg. Ann. **106.** p. 344. 569—570. 1859.

2) J. u. P. Curie, Compt. rend. **91.** p. 294. 383. 1880; **92.** p. 186. 350. 1881; **93.** p. 204. 1881.

3) Hankel, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. **12.** p. 459. 1881.

4) J. u. P. Curie, Compt. rend. **93.** p. 1137. 1881.

Ich will an dieser Stelle nicht die Schwierigkeiten besprechen, welche sich meiner Meinung nach der Annahme jener Hypothese entgegenstellen, sondern nur mittheilen, in welcher Weise jene Anschauung mich dazu geführt hat, die unten beschriebenen Versuche anzustellen, deren Resultate an und für sich gewiss bemerkenswerth sind.

Die Ueberlegung, von der ich ausging, ist die folgende:

Wenn in einem pyroelectrischen Krystall in bestimmten Richtungen eine dauernde electrische Polarisation vorhanden wäre, und wenn es gestattet wäre, aus den kürzlich aufgefundenen Wirkungen der statischen Electricität auf die optischen Eigenschaften von einfach brechenden Medien zu folgern, dass nicht allein die durch äussere electrische Kräfte hervorgerufene Polarisation, sondern auch eine bereits vorhandene natürliche Polarisation einen Einfluss auf die Schwingungen des durchgehenden Lichtes ausübte, so müssten die optischen Eigenschaften eines pyroelectrischen Krystalles in verschiedener Weise geändert werden, jenachdem eine Schwächung oder eine Verstärkung der natürlichen Polarisation durch äussere electrische Kräfte erzeugt wird.

Nehmen wir als Beispiel einen Quarzkrystall, so ergeben zunächst die piëzoelectrischen Versuche mit demselben ein Resultat, das sich wenigstens für normal und einfach ausgebildete Krystalle in folgender Weise angeben lässt. Einen senkrecht zur Hauptaxe gelegten ebenen Schnitt kann man durch drei sich unter 60° in einem beliebigen Punkt schneidende gerade Linien in sechs Felder theilen, welche die nachstehenden Eigenschaften haben. Ein Druck, der in irgend einer durch jenen Punkt gehenden oder dieser parallelen Richtung auf den Krystall ausgeübt wird, hat zur Folge, dass der Krystall an den zwei Druckstellen electrisch wird, und zwar an der einen Stelle positiv, an der anderen negativ. Geht man von einer Druckrichtung zu einer anderen, in zwei benachbarten Feldern liegenden Richtung über, so wechselt das Zeichen der Electricitäten an den Druckstellen im Augenblick, wo die Druckrichtung die Grenze der benachbarten Felder überschreitet.

Daraus folgt, dass ein in der Richtung einer der drei

erwähnten geraden Linien ausgeübter Druck keine Piëzoelectricität erzeugen kann; ich möchte deshalb diese drei Richtungen die Axen fehlender Piëzoelectricität nennen. In den drei Richtungen, welche die Winkel zwischen diesen Axen halbiren, müsste das Maximum von Piëzoelectricität erzeugt werden, diese Richtungen seien deshalb als Axen maximaler Piëzoelectricität bezeichnet. Dieselben fallen mehr oder weniger mit den sogenannten Nebenaxen, den Verbindungslinien von zwei gegenüberliegenden Säulenkanten des Quarzes zusammen; ob sie immer genau damit coincidiren, kann ich noch nicht sagen, da ich darüber noch zu wenig Versuche angestellt habe; bei einigen Krystallen scheint dies wirklich der Fall zu sein. Wäre dem nun so, so würden die Axen fehlender Piëzoelectricität mit den Zwischenaxen des Quarzes dieselbe Richtung haben.

Ich denke mir nun, dass die drei Axen maximaler Piëzoelectricität die drei Richtungen der natürlichen Polarisation angeben; legt man den Enden einer jeden Axe das positive oder negative Zeichen bei, entsprechend der natürlichen Vertheilung der Electricität im Innern, so müssen diese Enden, wenn man sie der Reihe nach verfolgt, abwechselnd positiv und negativ sein. Diese Zeichen sind zugleich die Zeichen der durch Druck entstehenden Electricität und gelten, wie oben bemerkt, für das ganze Feld, in welchem je eine Axe liegt.

Wird nun ein Quarzstück so der inducirenden Wirkung statischer Electricität ausgesetzt, dass an einer Stelle die Kraftlinien senkrecht zur Hauptaxe und zugleich nicht in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität verlaufen, so würde an dieser Stelle durch diese Kräfte die natürliche Polarisation und damit nach der eingangs mitgetheilten Hypothese die natürliche Doppelbrechung von Strahlen, die senkrecht zur Hauptaxe und zu den Kraftlinien gehen, zu oder abnehmen müssen. Das Eintreten des einen oder des anderen Falles wäre ganz und gar davon abhängig, in welchem der drei Paare von gegenüberliegenden Feldern die Richtung der Kraftlinien liegen, und in welchem Sinn sie dieselben durchlaufen. Keine Aenderung der natürlichen

Doppelbrechung würde unter den angenommenen Verhältnissen zu beobachten sein, wenn die Kraftlinien in der Richtung einer der drei Axen fehlender Piëzoelectricität verlaufen.

Diese Folgerungen, dass die Doppelbrechung des Quarzes durch Einwirkung statischer Electricität nach Belieben vermehrt oder vermindert werden kann, und dass die Doppelbrechung unter bestimmten Umständen durch eine solche Einwirkung nicht merklich verändert wird, habe ich durch Versuche bestätigt gefunden.

Zu den ersten Versuchen dienten zwei rechtwinklige Parallelepipede aus reinem brasilianischem Quarz, deren optische Untersuchung keine Verwachsungen erkennen liess. Diese von Hrn. Steeg und Reuter bezogenen Stücke sind 2,0 cm lang, 1,2 cm dick und breit und genau gleich gearbeitet. Die Längsrichtung beider Stücke sollte nach meiner Angabe mit einer Nebenaxe zusammenfallen, indessen wurde durch ein Missverständniss seitens des Verfertigers auf diese Angabe wenig Gewicht gelegt. Nachträglich eingezogene Erkundigungen, sowie eine von mir mittelst der Leydolt'schen Aetzfiguren[1]) vorgenommene Untersuchung haben ergeben, dass jene Richtung bei beiden Stücken jedenfalls nur wenig von der Richtung der Nebenaxen abweicht; übrigens sei bemerkt, dass es für die vorliegende Untersuchung genügt, wenn die Längsrichtung nicht mit einer Axe fehlender Piëzoelectricität coincidirt; die piëzoelectrische Untersuchung hat gezeigt, dass dies nicht der Fall ist. — Zwei Seitenflächen stehen genau senkrecht zur Hauptaxe, und die zwei anderen Seitenflächen sind somit genau der Hauptaxe und ungefähr der Nebenaxe parallel.

Beide Stücke sind in der Längsrichtung in einer Weite von 0,2 cm angebohrt, und zwar jedes von der Mitte der zwei Endflächen aus; die coaxialen Bohrlöcher erreichen sich in der Mitte des Krystalls nicht, sie lassen vielmehr eine ungefähr 0,2 cm dicke Schicht zwischen sich stehen, welche diejenige Stelle bildet, welche auf ihr electrooptisches Verhalten untersucht werden soll.

1) Leydolt, Wien. Ber. **15.** p. 59. 1855.

Beide Krystalle wurden untersucht; bei jedem Versuch aber befand sich nur der eine im electrischen Feld, der andere diente dazu, die natürliche Doppelbrechung des ersteren zu compensiren; zu diesem Zweck waren die Stücke mit einer Spur von Hausenblase so zusammengekittet, dass ihre Hauptaxen senkrecht zueinander standen. Das unter 45° gegen die Hauptaxen polarisirte Licht ging senkrecht zur Ebene, welche die Hauptaxe und die Nebenaxe eines Krystalles enthält, somit senkrecht zu zwei Seitenflächen durch den Krystall. Zwischen gekreuzten Nicols war die Mitte des Gesichtsfeldes, die Stelle zwischen den Bohrlöchern, bei Anwendung von Natriumlicht, dessen Intensität für die vorliegende Untersuchung vollständig genügte, ziemlich gleichmässig dunkel, abgesehen von geringen Unregelmässigkeiten, die wahrscheinlich von dem beim Bohren ausgeübten Druck herrührten.

In die zwei Bohrlöcher des zu untersuchenden Krystalles wurden gut abgerundete 0,15 cm dicke Messingdrähte gesteckt, von denen je einer mit einer Electrode einer Holtz'schen Maschine so verbunden war, dass ein rasches Commutiren ermöglicht war. Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden konnte bei constanter Rotationsgeschwindigkeit der Maschine mit Hülfe einer Nebenschliessung, welche einen variablen Luftwiderstand enthielt, beliebig viel und continuirlich geändert werden. Dieses bei vielen Versuchen schon seit längerer Zeit von mir angewandte Verfahren besteht darin, dass die eine Electrode der Maschine mit einer isolirten scharfen Spitze, die andere mit einer isolirten Metallplatte in Verbindung steht; Spitze und Platte stehen sich gegenüber und können gegeneinander verschoben werden; je weiter sie voneinander entfernt sind, desto grösser ist der Luftwiderstand für die dunkle Entladung, desto grösser ist folglich die Potentialdifferenz zwischen den Electroden.

Um das bei grösseren Potentialdifferenzen vorkommende lästige Ueberspringen von Funken zwischen den in die Krystalle eingesteckten Messingdrähten zu verhüten, brachte ich die Krystalle in eine kleine mit Schwefelkohlenstoff, bei den

späteren Versuchen mit Benzol gefüllte Flasche; das polarisirte Licht trat unter senkrechter Incidenz durch die eine durchbohrte und mit einer Birmingham-Glasplatte bedeckte Seitenfläche ein und verliess die Flasche durch die gegenüberliegende, gleich bearbeitete Fläche.

Zur Controle habe ich die Quarzstücke auch in Luft untersucht und dabei im wesentlichen dasselbe Verhalten gefunden, wie wenn dieselben sich in Schwefelkohlenstoff oder Benzol befanden.

Die Richtung der Nebenaxe, der Längsaxe des auf electrooptischen Effect geprüften Krystalles wurde vertical gestellt, die Richtung der Kraftlinien in der Mitte des Krystalls war folglich ebenfalls vertical, und die Hauptschnitte der Nicols machten somit Winkel von 45° mit diesen Kraftlinien (die früher als Stellung I der Nicols bezeichnete Anordnung.[1])) Die Quarzstücke sollen zur Unterscheidung von einander mit Krystall I und Krystall II bezeichnet werden; eine Endfläche eines jeden derselben ist mit einer eingeritzten Marke versehen, welche im Folgenden das bezeichnete Ende genannt wird.

Die Wirkung, welche die Electricität auf das durch den Quarz gehende Licht ausübte, wurde verglichen mit der Wirkung, welche eine Compression eines zwischen Analysator und Krystall eingeschalteten Glasstückes in verticaler oder horizontaler Richtung zur Folge hatte. Wenn es unten z. B. heisst:

unten +, oben −: dieselbe Wirkung wie verticale Compr.,

so ist das so zu verstehen, dass eine Ladung der Enden der Nebenaxe unten mit positiver, oben mit negativer Electricität dieselbe optische Veränderung der Mitte des Gesichtsfeldes erzeugte, wie eine Compression der Glasplatte in verticaler Richtung.

Versuch 1. Krystall I; bezeichnetes Ende *unten*.

unten +, oben −: dieselbe Wirkung wie *verticale* Compr.
unten −, oben +: " " " *horizontale* " .

---

1) Röntgen, Ber. d. Ob. Ges. **19.** p. 1. 1880. — Wied. Ann. **10.** p. 77. 1880.

Versuch 2. Krystall I; bezeichnetes Ende *oben.*

unten +, oben —: dieselbe Wirkung wie *horizontale* Compr.
unten —, oben +: „ „ „ *verticale* „ .

Versuch 3. Krystall I; bezeichnetes Ende *oben.*

a. Durch verticale Compression der Glasplatte konnte die Mitte des Gesichtsfeldes etwas dunkler gemacht werden, darauf bewirkte, während die Glasplatte comprimirt blieb, unten +, oben — eine Zunahme der Helligkeit. Durch stärkere Compression in verticaler Richtung konnte diese Wirkung compensirt werden.

b. Durch verticale Compression der Glasplatte wurde wiederum die Mitte des Gesichtsfeldes dunkler gemacht; unten —, oben + erhellte auch jetzt das Gesichtsfeld, diese Erhellung konnte jedoch durch eine stärkere Compression in verticaler Richtung nicht aufgehoben werden, dieselbe wurde vielmehr dadurch verstärkt.

Versuch 4. Nachdem die Krystalle umgekittet waren. Krystall II, bezeichnetes Ende *oben.*

unten +, oben —: dieselbe Wirkung wie *horizontale* Compr.
unten —, oben +: „ „ „ *verticale* „ .

Versuch 5. Bei den obigen Versuchen befanden sich die Quarze in Schwefelkohlenstoff, bei den folgenden in Luft. Krystall I, bezeichnetes Ende *oben.*

unten +, oben —: dieselbe Wirkung wie *horizontale* Compr.
unten —, oben +: „ „ „ *verticale* „ .

Versuch 6. Krystall II, bezeichnetes Ende *oben.*

unten +, oben —: dieselbe Wirkung wie *horizontale* Compr.
unten —, oben +: „ „ „ *verticale* „ .

Die Versuche wurden zu sehr verschiedenen Zeiten und unter geänderten Umständen wiederholt; so befand sich bei späteren Versuchen öfters nur der eine Krystall in der mit Benzol gefüllten Flasche, der andere als Compensator dienende war in Luft aufgestellt; als Compensator wählte ich auch einigemal Glimmerplättchen oder andere Quarzstücke; immer erhielt ich aber die Resultate, die oben mitgetheilt sind, nie ergab sich etwas anderes.

Es ist nun bekannt, dass eine comprimirte Glasplatte sich optisch verhält, wie ein negativer Krystall, dessen Hauptaxe mit der Compressionsrichtung zusammenfällt; da nun Quarz ein positiver Krystall ist, so kann man die obigen Resultate in dem Satz zusammenfassen, dass die Doppelbrechung der untersuchten Quarzstücke zunimmt, wenn das bezeichnete Ende der Nebenaxe positiv, das nicht bezeichnete Ende negativ electrisch gemacht wird; dass dieselbe dagegen abnimmt, wenn das bezeichnete Ende jener Axe negativ, das nicht bezeichnete Ende positiv electrisch wird.

Es wurde nun untersucht, wie diese Enden sich in piëzoelectrischer Beziehung verhalten. Die Untersuchung geschah, indem die an den Endflächen mit Stanniolstreifen versehenen Krystalle zwischen Hartgummiplättchen mittelst einer Schraubenpresse in der Längsrichtung zusammen gedrückt wurden; der eine Stanniolstreifen war in Verbindung mit einem empfindlichen Fechner'schen Goldblattelectroskop, welches die Spannung auf dem isolirten Pol eines Daniell'schen Elementes durch einen kräftigen Ausschlag zu erkennen gibt; der andere war zur Erde abgeleitet.

Die wiederholt angestellten Versuche ergaben nun übereinstimmend, dass das bezeichnete Ende der Nebenaxen beider Quarze bei Zunahme des Druckes negativ electrisch und bei Abnahme des Druckes positiv electrisch wurde; das nicht bezeichnete Ende zeigte positive, resp. negative Electricität.

Man kann somit das Resultat der electrooptischen Untersuchung auch so aussprechen: Die Doppelbrechung des Quarzes nimmt zu, wenn demjenigen Ende einer Nebenaxe positive Electricität zugeführt wird, welches durch Zunahme eines in der Richtung dieser Nebenaxe wirkenden Druckes negativ electrisch wird und zugleich dem anderen Ende negative Electricität zugeführt wird. Die Doppelbrechung nimmt dagegen ab, wenn die Vertheilung der mitgetheilten Electricitäten die entgegengesetzte ist.

Hält man an der Ansicht fest, dass ein piëzoelectrischer Krystall sich in einem Zustand electrischer Polarisation befindet, dessen Richtung speciell beim Quarz mit der Rich-

tung der Nebenaxen zusammenzufallen scheint, und dass die beobachtete Piëzoelectricität eine Folge der durch Druck geänderten Polarisation ist, so ergibt eine einfache Ueberlegung, dass das durch Druckzunahme negativ werdende Ende dasjenige ist, welchem die negative Seite der electrisch polarisirten Theilchen zugewendet ist. Oben fanden wir nun, dass die Doppelbrechung zunimmt, wenn diesem Ende positive Electricität und dem anderen negative Electricität zugeführt wird; durch diese Zufuhr muss die Polarisation verstärkt werden, und wir erhalten somit das Resultat, dass die Doppelbrechung des Quarzes zunimmt oder abnimmt, jenachdem die natürliche Polarisation durch äussere electrische Kräfte verstärkt oder geschwächt wird.

Nachdem somit die erste in der Einleitung erwähnte Folgerung durch Versuche eine Bestätigung gefunden hatte, ging ich daran, auch die zweite einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Die mitgetheilten Versuche hatten mir gezeigt, dass jedenfalls keine grosse Differenz, was die Stärke anbetrifft, zwischen der durch gleiche electrische Kräfte erzeugten Zunahme und Abnahme der Doppelbrechung vorhanden war; daraus schloss ich, dass es in der That gelingen musste, im Quarz eine Richtung aufzufinden, welche die Eigenschaft hat, dass in dieser Richtung wirkende electrische Kräfte keine merkliche Aenderung der Doppelbrechung hervorbringen. Nach dem, was oben über diese Richtung gesagt ist, müsste dieselbe in einer Axe fehlender Piëzoelectricität, folglich in oder jedenfalls in der Nähe einer Zwischenaxe des Krystalles zu suchen sein. Ich liess mir deshalb von Hrn. Steeg und Reuter eine quadratische Quarzplatte von 1,5 cm Seitenlänge und 0,25 cm Dicke, die genau parallel einer Säulenfläche, somit senkrecht zu einer Zwischenaxe geschnitten ist, herstellen. Die Hauptaxe liegt parallel einer Seite des Quadrates, eine Nebenaxe also parallel einer zur zuerst genannten senkrechten Seite. Die vier schmalen Seitenflächen sind polirt.

Zunächst wurde nun untersucht, ob die Zwischenaxe dieses Krystalls wirklich eine Axe fehlender Piëzoelectricität ist. Es ergab sich, dass sogar starke Druckänderungen in

der Richtung der Zwischenaxe keine merklichen Mengen von Electricität auf den Druckstellen hervorbrachten, dass diese Richtung also eine Axe fehlender Piëzoelectricität ist. Nebenbei sei bemerkt, dass ein Druck parallel der Hauptaxe dasselbe Resultat ergab, dass dagegen ein Druck parallel der Nebenaxe beträchtliche Mengen von Electricität entwickelte.

Darauf wurde die Platte in der Mitte einer quadratischen Endfläche angebohrt, sodass dort eine ungefähr halbkugelförmige Vertiefung entstand (Tiefe 0,1 cm); eine nochmalige Untersuchung auf Piëzoelectricität ergab dasselbe wie vorher.

Diese so vorbereitete Platte wurde auf die bei meinen früheren electrooptischen Versuchen gebrauchte Messingscheibe zwischen zwei dünnen auf derselben aufgekitteten Glasstreifchen gelegt und in horizontaler Lage in die kleine, oben erwähnte, mit Benzol gefüllte Flasche gebracht. In die Vertiefung der Platte ragte das Ende eines gut abgerundeten Messingdrahtes. Die Scheibe war die untere, der Draht die obere Electrode. Die Lichtstrahlen gingen parallel der Nebenaxe, somit senkrecht zur Hauptaxe und zur Zwischenaxe durch die Platte. Die Nicols befanden sich in der Stellung I.

Um die natürliche Doppelbrechung zu compensiren gebrauchte ich dasselbe Mittel, wie bei den Versuchen mit den Quarzparallelepipeden: eine zweite quadratische Quarzplatte, die senkrecht zur Hauptaxe geschnitten ist und ungefähr dieselben Dimensionen hat wie die erstere, wurde zwischen Analysator und Glasflasche auf ein um drei senkrecht zu einander stehende Axen bewegliches Stativ befestigt und so gestellt, dass ihre Hauptaxe senkrecht zur Hauptaxe der ersten Platte war. Die Doppelbrechung konnte nicht vollständig compensirt werden, allein um die in der ersten Platte eventuell hervorgebrachte Aenderung der Doppelbrechung beobachten zu können, konnte einer jener verticalen dunklen Streifen sehr gut benutzt werden, welche das Gesichtsfeld durchwanderten, wenn die compensirende Platte ein wenig um eine verticale Axe gedreht wurde. Eine geänderte Doppelbrechung müsste sich durch ein Verschieben des Streifens nach rechts oder links bemerkbar machen.

Ich stellte nun die Versuche in der Weise an, dass zuerst ein Streifen in die Mitte des Gesichtsfeldes, somit gerade unterhalb der kugelförmigen Vertiefung gebracht und nachgesehen wurde, ob bei rascher Aenderung der Potentialdifferenz zwischen den Electroden eine Verschiebung dieses Streifens eintrat. Eine solche Verschiebung habe ich, wie oft auch die Versuche unter geänderten Bedingungen wiederholt wurden, niemals erkennen können. Daraus folgt somit, dass eine Aenderung der Doppelbrechung durch electrische Kräfte, welche in der Richtung der Axe fehlender Piëzoelectricität wirkten, in nicht merklicher Weise erzeugt wurde.[1])

Nun wurde der Streifen zuerst auf die linke, dann auf die rechte Seite von der centralen Vertiefung, dieser aber immer sehr nahe bleibend verlegt; auch in diesen Stellungen war kein Einfluss der Electrisirung auf die Doppelbrechung zu bemerken; sowohl das untere wie das obere Ende des Streifens änderte seine Lage nicht.

Die Beobachtung, dass auch das obere Ende des Streifens nicht verrückt wurde, ist von Wichtigkeit, denn da dort die Kraftlinien, die von der halbkugelförmigen Vertiefung ausgehen, horizontal verlaufen und folglich links und rechts von der oberen Electrode mit der Richtung der Hauptaxe zusammenfallen, so ergibt sich daraus, dass auch in der Richtung der Hauptaxe des Quarzes durch electrische Kräfte keine merkliche Aenderung der Doppelbrechung erzeugt werden konnte. Auch hier gilt natürlich die vorhin in einer Fussnote gemachte Bemerkung. Die piëzoelectrische Untersuchung hatte, wie bemerkt, ergeben, dass durch Druckänderungen in der Richtung der Hauptaxe keine Electricität an der Druckstelle auftrat.

---

1) Ich kann selbstverständlich nicht behaupten, dass auch bei viel grösseren Potentialdifferenzen als die, welche ich anwandte, und bei Benutzung einer intensiveren Lichtquelle keine Spur eines electrooptischen Effectes in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität beobachtet werden könne. Würde jemand eine solche Aenderung beobachten, so wird diese jedenfalls viel geringer sein, als die in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelectricität stattfindende; die obigen Versuche würden ihre Bedeutung nicht verlieren.

Das soeben mitgetheilte Resultat verdiente direct geprüft zu werden; zu diesem Zwecke wurde die senkrecht zur Hauptaxe geschliffene Platte gerade so wie die parallel der Axe geschliffene mit einer centralen halbkugelförmigen Vertiefung versehen und an die Stelle der letzteren in die Flasche gebracht; die Platten wurden einfach vertauscht. Wenn nun bei dieser Anordnung ein Interferenzstreifen unter der Vertiefung, also an der Stelle lag, wo die Kraftlinien parallel der Hauptaxe verliefen, so konnte ich durch Vermehrung oder Verminderung der Potentialdifferenz zwischen den Electroden keine Verschiebung desselben hervorbringen; folglich änderte sich auch in dieser Platte die Doppelbrechung durch in der Richtung der Hauptaxe wirkende electrische Kräfte nicht merklich. Auch diese Platte hatte bei einer Pressung parallel der Hauptaxe keine Piëzoelectricität an der Druckstelle geliefert.

Lag der Streifen seitlich von der Vertiefung, dieser aber sehr nahe, so beobachtete ich beim Electrisiren eine Erscheinung, die eine sehr willkommene Bestätigung der mit den Quarzparallelepipeden erhaltenen Resultate lieferte. Während nämlich das untere Ende des verticalen Streifens sich nicht bewegte, neigte sich das obere Ende desselben nach rechts oder links, und zwar wechselte die Richtung der Bewegung mit den Zeichen der Electricitäten auf den Electroden; ausserdem fand ich bei unverändertem Zeichen der Electricität, dass das obere Ende eines Streifens sich in verschiedener Richtung bewegte, je nachdem der Streifen auf der rechten oder auf der linken Seite von der Mitte sich befand. Eine verticale oder horizontale Compression der eingeschalteten Glasplatte hatte eine Verschiebung des g a n z e n Streifens parallel sich selbst nach links oder nach rechts zur Folge.

Die Erklärung dieser Erscheinungen ist bald gefunden, wenn man bedenkt, dass, wie die unten mitgetheilten Versuche darthun, die Richtung nach links und rechts, d. h. die zu den Lichtstrahlen senkrechte horizontale Richtung in dem benutzten Krystall nicht gerade mit einer Axe fehlender Piëzoelectricität zusammenfällt. Die Erscheinungen sind dann einfach aus den zuerst besprochenen Versuchen abzuleiten; ver-

laufen doch die Kraftlinien im oberen Theile der Platte neben der Vertiefung ungefähr horizontal; ein Theil derselben fällt folglich mit Richtungen zusammen, in welchen die Doppelbrechung geändert werden kann; im unteren Theil der Platte dagegen stehen die Kraftlinien vertical, diese liegen somit in der Richtung der Hauptaxe und erzeugen deshalb keine Aenderung der Doppelbrechung. Dem entsprechend verschiebt sich blos das obere Ende des Streifens und nicht das untere. Die Beobachtung, dass die Richtung der Verschiebung wechselt, wenn die Electrisirung oder die Lage des Streifens wechselt, ist in vollständiger Uebereinstimmung mit der gefundenen Thatsache, dass die Zunahme der Doppelbrechung des Quarzes in eine Abnahme übergeht, wenn die Richtung der Kraftlinien umgekehrt wird.

Es hatte sich oben weiter ergeben, dass man aus der Vertheilung der Piëzoelectricität bei gegebener Richtung der Kraftlinien mit Bestimmtheit im voraus schliessen kann, ob eine Zunahme oder eine Abnahme der Doppelbrechung stattfinden wird, und es fragt sich somit, ob bei dem neuen Krystall die aufgestellte Regel bestätigt gefunden wird oder nicht.

Die Platte wurde auf Piëzoelectricität untersucht. Ein Druck auf die quadratische Oberfläche in der Richtung der Hauptaxe lieferte keine deutlich erkennbare Menge von Electricität an den Druckstellen. Anders verhielten sich jedoch die vier schmalen Seitenflächen; dieselben sollen der Reihe nach mit *a*, *b*, *c*, *d* bezeichnet werden. Eine Druckzunahme in der Richtung parallel *b* und *d* lieferte bei *a* positive, bei *c* negative Electricität; eine Druckabnahme die entgegengesetzten Electricitäten. Eine Druckzunahme in der Richtung parallel *a* und *c* ergab bei *b* negative, bei *d* positive Electricität; eine Druckabnahme das Gegentheil. In beiden Fällen erhielt ich kräftige Ausschläge des Electroskops.[1])

1) Zwischen den beiden Richtungen parallel *b* und *d* und parallel *a* und *c* muss ein Feld liegen, welches sich in piëzoelectrischer Beziehung entgegengesetzt verhält zu den beiden Feldern, zu welchen diese Richtungen gehören. In der That ergab eine Druckzunahme in der Richtung der Diagonale des Quadrates, welche von der Ecke *a*, *d* zu der Ecke *b*, *c* geht, bei *a*, *d* negative, bei *b*, *c* positive Electricität; eine Druckabnahme das Gegentheil.

Es wurde nun die Platte wieder in die mit Benzol gefüllte Flasche gebracht und eine Wiederholung der electrooptischen Versuche vorgenommen. Die optische Wirkung der Electricität wurde auch jetzt verglichen mit der Wirkung einer in horizontaler oder verticaler Richtung comprimirten Glasplatte. Wenn es also im Folgenden z. B. heisst: unten +, oben –; oberes Ende des Streifens links : horizontale Compr., so ist das eine Abkürzung von folgendem Satz: Wenn die untere Electrode positiv, die obere negativ war, so neigte sich das obere Ende des links von der Mitte liegenden Streifens nach der Seite hin, nach welcher der ganze Streifen durch eine Compression der Glasplatte in horizontaler Richtung verschoben werden konnte.

Versuch 1. Die Lichtstrahlen gingen parallel *a* und *c* durch die Platte; *a* lag links, *c* rechts:

unten +, oben –;	oberes	Ende	des	Streifens	links	: verticale	Compr.
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: horizontale	„
unten +, oben –;	„	„	„	„	rechts	: horizontale	„
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: verticale	„

Versuch 2. Lichtstrahlen parallel *a* und *c*; *a* rechts, *c* links:

unten +, oben –;	oberes	Ende	des	Streifens	links	: horizontale	Compr.
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: verticale	„
unten +, oben –;	„	„	„	„	rechts	: verticale	„
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: horizontale	„

Versuch 3. Lichtstrahlen parallel *b* und *d*; *b* rechts, *d* links:

unten +, oben –;	oberes	Ende	des	Streifens	links	: verticale	Compr.
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: horizontale	„
unten +, oben –;	„	„	„	„	rechts	: horizontale	„
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: verticale	„

Versuch 4. Lichtstrahlen parallel *b* und *d*; *b* links, *d* rechts:

unten +, oben –;	oberes	Ende	des	Streifens	links	: horizontale	Compr.
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: verticale	„
unten +, oben –;	„	„	„	„	rechts	: verticale	„
unten –, oben +;	„	„	„	„	„	: horizontale	„

Man überzeugt sich nun leicht, dass diese Ergebnisse sich in jeder Beziehung in vollständiger Uebereinstimmung befinden mit den aus den zuerst mitgetheilten Versuchen erhaltenen Resultaten.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass die im Obigen mitgetheilten Phänomene auch mit Hülfe von zwei bekannten Thatsachen sich erklären lassen. Die eine dieser Thatsachen wurde vor kurzem von den Hrn. J. und P. Curie aufgefunden[1]) und lautet: theilt man den Enden einer Nebenaxe eines Quarzkrystalles entgegengesetzte Electricitäten mit, so ist die Folge davon, dass der Krystall sich in der Richtung dieser Axe zusammenzieht, resp. ausdehnt, jenachdem die Zeichen der zugeführten Electricitäten den Zeichen der an diesen Enden durch einen in jener Richtung ausgeübten Druck entstehenden Piëzoelectricitäten entgegengesetzt oder gleich sind. Ich halte es nun für sehr wahrscheinlich, dass dieses zunächst nur für die Richtung einer Nebenaxe gefundene Resultat, sich für jede Richtung senkrecht zur Hauptaxe ergeben wird, und dass somit die Richtung der Zwischenaxe, der Axe fehlender Piëzoelectricität die Eigenschaft besitzt, dass electrische Kräfte, welche in dieser Richtung wirken, keine merklichen Formveränderungen des Quarzes in dieser Richtung erzeugen. Bis jetzt habe ich noch keine Gelegenheit gehabt, die Richtigkeit der Curie'schen Versuche zu prüfen und dieselben in der angedeuteten Weise zu erweitern; da mich jene Versuche auch deshalb sehr interessiren, weil sie in naher Beziehung stehen zu meinen früheren Versuchen über sogenannte electrische Ausdehnung[2]), werde ich sobald wie möglich diese Untersuchung in Angriff nehmen.

Die zweite leicht zu bestätigende Thatsache ist die, dass eine mechanische Compression des Quarzes senkrecht zur Hauptaxe auf die Lichtstrahlen, welche senkrecht zur Hauptaxe und zur Compressionsrichtung durch den Krystall gehen, qualitativ dieselbe Wirkung ausübt, wie eine in gleicher Richtung stattfindende Compression einer eingeschalteten Glasplatte.[3])

Unschwer wird man finden, dass die beschriebenen Erscheinungen bis in ihre Details hinein vollständig in Uebereinstimmung sind mit den soeben mitgetheilten Eigenschaften des Quarzes.

1) J. u. P. Curie, Compt. rend. **93.** p. 1137. 1881.

2) Röntgen, Ber. d. Oberh. Ges. **20.** p. 1. 1881.

3) Brewster, Trans. of Edinb. **8.** p. 281. 1818.

Ueber die eigenthümlichen Erscheinungen, welche ich beobachtete, wenn die Lichtstrahlen parallel mit der Hauptaxe hindurchgingen, hoffe ich später zu berichten.

Giessen, den 25. Nov. 1882.

III. *Ueber das optische Verhalten des Quarzes im electrischen Felde; von A. Kundt.*

Im verflossenen Sommer begannen Hr. Prof. F. Braun und ich eine gemeinschaftliche Untersuchung über die von Kerr entdeckte Doppelbrechung im dielectrischen Felde. Unter den festen Körpern, die wir prüften, befanden sich auch einige Quarzstücke. Wir schickten homogenes Licht (Natronflamme) längs der optischen Axe durch die Krystalle, sodass man zwischen zwei Nicol'schen Prismen Theile der bekannten Ringfigur eines einaxigen Krystalls im Gesichtsfeld hatte.

Beim Electrisiren des Quarzstückes erlitten die Abschnitte der Ringe, welche man sah, stets eine kleine Verrückung, sodass dadurch eine Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes durch Electrisiren erwiesen war.

Wir mussten indess die Arbeit unterbrechen, bevor es uns gelang, die Gesetze des eigenthümlichen Verhaltens des Quarzes klarzustellen, da in den uns zu Gebote stehenden Räumen im Sommer die benutzten Holtz'-schen Maschinen fast ständig den Dienst versagten.

Ich habe nun, nach Uebereinkommen mit Hrn. Braun, im Beginn dieses Winters die Untersuchung allein wieder aufgenommen. Es gelang mir bald, die im electrischen Felde auftretende Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes auf eine bereits bekannte Erscheinung, nämlich die von Hrn. Lippmann theoretisch erschlossene und von den Herren J. und P. Curie experimentell nachgewiesene Compression und Dilatation eines hemimorphen Krystalls beim Electrisiren desselben zurückzuführen. Der Quarz gehört, wie Hr. Hankel nachgewiesen hat, wenigstens in Bezug auf sein pyroelectri-

sches Verhalten zu den hemimorphen Krystallen, und zwar ist jede der drei Richtungen, welche zwei gegenüber liegende Kanten des sechsseitigen Prismas des Quarzes verbinden und auf ihnen senkrecht stehen, eine hemimorphe Axe. Ich beabsichtigte, ausser Quarz noch andere hemimorphe Krystalle, wie Zucker u. s. w. zu untersuchen.

Eine soeben erhaltene Abhandlung des Hrn. Röntgen „Ueber die durch electrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes"[1]) veranlasst mich, meine bisherigen Versuche kurz mitzutheilen, welche, wie ich glaube, das optische Verhalten des Quarzes im electrischen Felde völlig klarstellen. Ich habe überdies eine etwas einfachere Beobachtungsmethode als Röntgen angewandt, welche gleichwohl doch die ziemlich complicirten Erscheinungen sehr übersichtlich darstellt.

Es genügt, eine Versuchsreihe an einem bestimmten Quarzstücke zu beschreiben; alle anderen geben analoge Resultate. Das betreffende Stück, auf welches sich die nachfolgenden Versuche beziehen, war eine Säule von quadratischem Querschnitt. Die Längsrichtung der 30 mm langen Säule fiel mit der Richtung der optischen Axe zusammen. Die Fig. 1 zeigt den Querschnitt des einen Endes, das mit *E* bezeichnet sein mag; in denselben ist die Lage der drei hemimorphen Axen eingezeichnet und sind dieselben mit 1,4; 2,5; 3,6; bezeichnet.

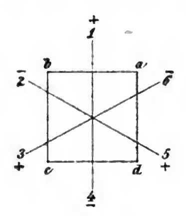


Fig. 1.

Dass letztere Axen wirklich die gezeichnete Lage hatten, ergab die piëzoelectrische Untersuchung des Stückes.

Wird ein Druck auf die Flächen *ab* und *cd* ausgeübt in der Richtung 1,4; so wird Fläche *ab* positiv, Fläche *cd* negativ; beim Nachlassen des Druckes tritt die umgekehrte Electricität auf. Wird in der Richtung *bd* gedrückt, so wird

1) Röntgen, Ber. der Oberhess. Ges. f. Natur- u. Heilkunde. **22.** p. 49. 1882. Wied. Ann. **18.** p. 213.

die Kante *b* negativ, *d* positiv; wird in Richtung *ca* gedrückt, so wird Konte *c* negativ, *a* positiv. — Da die Axen der Hemimorphie sich unter je 60° schneiden, und an ihren Enden entgegengesetzte Electricität durch Druck auftreten soll, so müssen sie also nach den obigen Versuchen die in der Figur gezeichnete Lage im Krystall haben. Die Zeichen der durch Druck hervorgerufenen Electricitäten sind in der Figur den Enden der Axen beigefügt.

Nach der Entdeckung der Hrn. Lippmann[1]) und J. und P. Curie[2]) tritt, wenn ein Krystall so in ein electrisches Feld gebracht wird, dass die electrischen Kraftlinien oder eine Projection derselben mit einer piëzoelectrischen Axe zusammenfallen, eine Compression oder Dilatation in dieser Richtung auf, und zwar eine Dilatation, wenn die dielectrische Polarisation des Krystalles im Felde die gleiche ist wie diejenige, welche durch Druck erzeugt wird, und eine Compression, wenn die dielectrische Polarisation im Felde die umgekehrte ist von derjenigen, welche ein Druck in der betreffenden Richtung hervorrufen würde.

Bringen wir also unsere Quarzsäule so in ein electrisches Feld, dass die optische Axe senkrecht zu den Kraftlinien, und diese selbst senkrecht zu zwei gegenüberliegenden Seiten sind, so haben wir folgende Fälle:

1) Wenn *ab* positiv und *cd* negativ electrisirt werden, so findet in Richtung 1,4 Dilatation statt.

2) Wenn *ab* negativ und *cd* positiv, so ist in Richtung 1,4 Compression.

3) Wenn *bc* positiv und *cd* negativ, so ist in Richtung 2,5 Compression, in Richtung 3,6 Dilatation.

4) Wenn *bc* negativ und *ad* positiv, so ist in Richtung 2,5 Dilatation, in Richtung 3,6 Compression.

Diese Compressionen und Dilatationen müssen ebenso, als ob sie auf mechanischem Wege erzeugt wären, die optischen Eigenschaften des Quarzes beeinflussen.

Aus den Untersuchungen von Pfaff und denen von

1) Lippmann, Journ. de Phys. **10.** p. 381. 1881; Ann. de chim. et de phys. **24.** p. 145. 1881.

2) J. u. P. Curie, Compt. rend. **93.** p. 1137. 1881.

Mach und Merten[1]) weiss man, dass, wenn man auf einen Quarz senkrecht zur optischen Axe einen Druck ausübt, der Quarz zweiaxig wird, und zwar der Art, dass die Axenebene die Richtung des Druckes enthält. Wenn man also im Quarzstücke, welches im Polarisationsapparate die bekannte Ringfigur zeigt, seitlich presst, so verlängern sich die Ringe in der Richtung des Druckes zu Lemniscaten; bei einem seitlichen Zuge erhält man ein Oeffnen der Kreise zu Lemniscaten senkrecht zur Zugrichtung. Bei meinen Versuchen brachte ich nun die Quarzsäule in einen horizontalen Polarisationsapparat. Man hatte alsdann zwei bis drei Ringe im Gesichtsfeld. Das Ocularnicol wurde meist so gedreht, dass die Mitte des Ringsystems hell war. (Vgl. Fig. 2.)

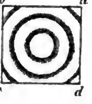


Fig. 2.

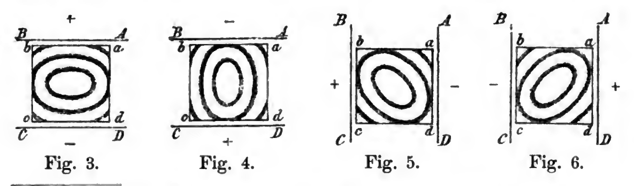
Wurden dann zwei gegenüber liegende Seiten der Säule mit Metallbelegungen versehen, welche mit den Electroden einer Holtz'schen Maschine verbunden waren, und wurden diese in Thätigkeit gesetzt, so änderte sich das Ringsystem, und zwar:

1) Wenn die Seiten *ab* und *cd* mit Metallbelegungen versehen waren, die den Bezeichnungen der Seiten entsprechend mit *AB* und *CD* bezeichnet werden mögen, und *AB* positiv, *CD* negativ electrisirt wurde, so erhält man die Fig. 3.

2) Wurde *AB* negativ und *CD* positiv gemacht, so erhielt man die Fig. 4.

3) Sind die Seiten *bc* und *ad* mit den Belegungen *BC* und *AD* versehen, und wird *BC* positiv und *AD* negativ electrisirt, so sieht man Fig. 5.

4) Wird *BC* negativ und *AD* positiv electrisirt, so erhält man Fig. 6.


Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6.

1) Mach und Merten, Wiener Ber. **72.** p. 315. 1875.

Die Veränderung der Ringe ist in den Figuren etwas stärker gezeichnet, als sie bei den Versuchen wirklich beobachtet wurde. Dass das Quarzstück in dem Sinne, wie es die Figuren 3 bis 6 angeben, optisch zweiaxig wurde, war aber selbst bei schwacher Electrisirung immer deutlich zu erkennen. Die Axenebene enthält immer die Längsrichtung der gezeichneten ellipsenähnlichen Ringe.

Vertauscht man die Stellen von Beobachter und Lichtquelle, so folgen für Ersteren die Buchstaben *abcd* nicht in einem Sinne aufeinander, welcher dem des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, sondern in einem diesem gleichgerichteten. Dadurch wird für den Beobachter für die unter 1) und 2) gegebenen Electrisirungen nichts geändert. Wird aber wie unter 3) electrisirt, so bleibt zwar die Veränderung des Ringsystems im Quarz dieselbe, für den Beobachter erscheint dann aber die in Figur 6 gezeichnete Figur, und wird nach der angegebenen Umdrehung des Quarzstücks wie in 4) electrisirt, so sieht der Beobachter die in Fig. 5 gezeichnete Figur.

Eine Vergleichung der in Fig. 3 bis 6 gegebenen Ringsysteme mit den oben unter 1 bis 4 gegebenen Compressionen und Dilatationen zeigt nun sofort, dass die bei der Electrisirung auftretenden Aenderungen der Doppelbrechung durch jene Compressionen und Dilatationen völlig erklärt werden. Es kann wohl kaum bezweifelt werden, dass die bei anderen hemimorphen Substanzen im electrischen Felde etwa auftretenden Aenderungen der Doppelbrechung sich in derselben Weise erklären. Die Versuche geben somit eine sehr anschauliche Darstellung der Lippmann-Curie'schen Entdeckung der elastischen Deformationen hemimorpher Krystalle im electrischen Felde.

Sie sind auch im allgemeinen in Uebereinstimmung mit den Resultaten des Hrn. Röntgen.

Wenn letzterer in dem Fall, in welchem die electrischen Kraftlinien mit den Mittellinien zwischen zwei hemimorphen Axen des Quarzes (Axe fehlender Piëzoelectricität nach Röntgen's Bezeichnung) zusammenfallen, keine Veränderung der Doppelbrechung erhielt, so liegt der Grund

hierfür, wie ich glaube, nur in seiner Versuchsanordnung. In diesem Fall liegen die Schwingungsebenen der Doppelbrechung, welche durch die Electrisirung erzeugt wird unter 45° zu jener Mittellinie und zu den Kraftlinien. Nun gibt Röntgen an, dass die Schwingungsebene seiner Nicols stets unter 45° zu der Richtung der Kraftlinien standen; mithin konnte ihm die erzeugte Aenderung der Doppelbrechung entgehen.

Strassburg, Physik. Inst. December 1882.

IV. *Ueber die Magnetisirungsfunction von Stahl und Nickel; von Hugo Meyer.*

1. Einleitung.

Lässt man auf einen weichen Eisenstab, mit sehr schwachen Kräften beginnend, nach einander stärkere und stärkere magnetisirende Kräfte wirken, so wächst bekanntlich das magnetische Moment anfangs schneller als die magnetisirende Kraft, später tritt das entgegengesetzte Verhalten ein.[1]) Bei der Untersuchung von Stahlellipsoiden hat Fromme[2]) gefunden, dass jener Wendepunkt sehr niedrig liegt, und dass schon bei sehr schwachen magnetisirenden Kräften der Quotient: magnetisches Moment der Volumeneinheit durch magnetisirende Kraft, den wir allgemein als Magnetisirungsfunction bezeichnen, abnimmt mit wachsender magnetisirender Kraft. Fromme schliesst aus seinen Beobachtungen, dass die Mag-

1) W. Weber, Electrod. Maassbest. **3.** p. 570 (Kirchhoff, Crelle's Journ. **48.** p. 370. 1854. Abh. p. 193. 1882); v. Quintus Icilius, Pogg. Ann. **121.** p. 125. 1864; Overbeck, Pogg. Ann. **135.** p. 74. 1868; Stoletow, Pogg. Ann. **144.** p. 439. 1872; Rowland, Phil. Mag. **46.** p. 140. 1873; Riecke, Pogg. Ann. **149.** p. 433. 1873. Wied. Ann. **13.** p. 465. 1881; Ruths, Ueber den Magnetismus weicher Eisencylinder, Dortmund 1876; A. L. Holz, Pogg. Ann. Ergbd. **8.** p. 353. 1877; Baur, Wied. Ann. **11.** p. 394. 1880. Wiedemann, Galvanismus (2) II 1. p. 343.

2) C. Fromme, Pogg. Ann. Ergbd. **7.** 390. 1876.

netisirungsfunction des Stahls von einem grossen Anfangswerthe an zuerst rasch, dann langsamer abnimmt und sehr bald ein Minimum erreicht, dessen Eintreten von der specifischen Natur des Stahls abhängig ist. Es tritt bei einem desto kleineren Werthe ein, je härter der Stahl ist.

Es beruhen diese Schlüsse auf Beobachtungen mit verhältnissmässig wenig gestreckten Ellipsoiden; je kleiner aber das Verhältniss der grossen zur kleinen Axe ist, desto weniger zuverlässig erscheinen die Resultate.[1]) Versuche mit sehr gestreckten Ellipsoiden, resp. Cylindern sind allerdings zu einer Prüfung der Poisson'schen Theorie, auf welche die genannten Arbeiten zum grössten Theile abzielen, nicht geeignet[2]), allein es dürften gegen jene Theorie kaum noch Zweifel erhoben werden, und man wird daher auch stark gestreckte Cylinder zur experimentellen Bestimmung der Magnetisirungsfunction benutzen können. Auf Veranlassung des Hrn. Prof. Riecke habe ich es daher unternommen, die Abhängigkeit des magnetischen Momentes von der magnetisirenden Kraft für sehr schwache Kräfte an stark gestreckten Stahlcylindern zu prüfen.

2. Material, Apparate und Versuchsanordnung.

Ich habe mich bemüht, meine Resultate durch möglichst zahlreiche und umfassende Versuche zu stützen und demgemäss von drei verschiedenen Stahlsorten für je neun Stäbe die Magnetisirungsfunction k bestimmt, d. i. den Quotienten magnetisches Moment eines unendlich gestreckten Cylinders vom Volumen Eins dividirt durch die magnetisirende Kraft. Die Stäbe waren gerade Kreiscylinder durch den Mechanikus Apel, hier, aus Stahl angefertigt, welcher von H. Kirchhoff in Berlin unter folgender Bezeichnung in den Handel gebracht wird:

I. Bester blanker englischer Gussstahl,
II. Polirter englischer Stubbstahl,
III. Gezogener weicher blanker Stahl.

---

1) Stoletow, l. c. p. 441; Fromme, l. c. p. 399; Riecke, Wied. Ann. **13.** p. 496. 1881.

2) Riecke. l. c. p. 490.

In der folgenden Tabelle sind die Dimensionen der Stäbe zusammengestellt; die Länge a und der Durchmesser b in Millimetern, das Volumen v in Cubikmillimetern, das Gewicht p in Milligrammen, das specifische Gewicht s und eine Constante P, welche bedingt ist durch das Verhältniss der Länge der Stäbe zu ihrem Durchmesser; es ist nämlich:

$$P = 4\pi\sigma(\sigma^2 - 1)\left\{\tfrac{1}{2}\log\text{nat}\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma}\right\},$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2}.$$

Die Längen wurden mit dem Comparator gemessen, das Volumen durch Wägung in Wasser bestimmt und daraus der mittlere Durchmesser berechnet.

Tabelle 1.

Stahlsorte I.

	a	b	v	p	s	$100\,P$
1.	299,190	5,107	6129,6	47622	7,7315	1,3667
2.	349,265	5,120	7192,0	55757	7,7152	1,0305
3.	399,130	5,112	8192,3	63802	7,7504	0,8172
4.	450,213	5,126	9286,7	73034	7,8266	0,6346
5.	400,025	3,921	4829,9	37642	7,7558	0,4862
6.	440,040	3,918	5304,8	41372	7,7614	0,4434
7.	359,827	3,088	2695,3	20826	7,6896	0,4434
8.	390,132	3,091	2926,7	22625	7,6932	0,3720
9.	419,940	3,087	3142,1	24373	7,7193	0,3435
			Stahlsorte II.			
1.	300,157	4,997	5886,1	45887	7,7604	1,3316
2.	350,053	4,989	6842,9	53543	7,7891	1,0305
3.	399,563	5,001	7847,5	61281	7,7735	0,8172
4.	449,770	4,992	8806,3	68773	7,7741	0,6346
5.	399,640	3,970	4946,3	37954	7,6383	0,5403
6.	440,183	3,973	5457,1	41956	7,6534	0,4587
7.	359,997	2,971	2495,1	19350	7,7199	0,4006
8.	389,840	2,964	2690,7	20767	7,6832	0,3435
9.	419,823	2,971	2911,1	22578	7,7205	0,2862
			Stahlsorte III.			
1.	299,837	5,209	6389,0	50082	7,8009	1,4138
2.	349,787	5,204	7440,4	58355	7,8051	1,0796
3.	399,743	5,207	8511,7	66758	7,8051	0,8172
4.	449,500	5,203	9556,1	75079	7,8187	0,6749
5.	399,777	4,014	5058,3	39603	7,7914	0,5402
6.	439,350	4,000	5515,2	43182	7,7918	0,4616
7.	359,750	3,043	2616,4	20545	7,8143	0,3880
8.	389,613	3,047	2840,9	22260	7,7977	0,3435
9.	420,100	3,050	3069,3	24002	7,7822	0,2862

Um den Einfluss der Härtung des Stahles auf die Magnetisirungsfunction zu prüfen, wurden später die ursprünglich weichen Stäbe stark geglüht und alsdann plötzlich abgelöscht. Die mechanischen Aenderungen, welche die Stäbe durch diesen Process erlitten, sind aus folgender Tabelle zu erkennen; sie enthält Volumen, Gewicht und specifisches Gewicht der gehärteten Stäbe.

Tabelle 2.

Sorte I.				Sorte II.			
	v	*p*	*s*		*v*	*p*	*s*
1.	6138,3	47460	7,6749	1.	5926,1	45776	7,7244
2.	7212,6	55575	7,7052	2.	6923,0	53458	7,7217
3.	8240,4	63587	7,7165	3.	7918,8	61190	7,7272
4.	9351,1	72792	7,7843	4.	8859,7	68672	7,7511
5.	4864,4	37497	7,7085	5.	5014,2	37870	7,5526
6.	5351,1	41243	7,7064	6.	5553,5	41833	7,7097
7.	2710,8	20684	7,6301	7.	2504,1	19260	7,6915
8.	2949,6	22489	7,6255	8.	2718,8	20712	7,6180
9.	3179,3	24278	7,6363	9.	2939,6	22482	7,6480

Sorte III.

	v	*p*	*s*		*v*	*p*	*s*
1.	6312,7	49531	7,8643	6.	5447,7	42724	7,8426
2.	7378,4	57764	7,8288	7.	2606,0	20231	7,7632
3.	8420,2	66160	7,8573	8.	2816,7	22036	7,8232
4.	9486,0	74495	7,8532	9.	3048,5	23752	7,7914
5.	5011,2	39176	7,8177				

Die Vergleichung dieser beiden Tabellen ergibt für die Sorten I und II durch das Härten eine Abnahme des Gewichtes und eine Zunahme des Volumens, demgemäss eine Abnahme des specifischen Gewichtes, was mit früheren Beobachtungen von Fromme[1]) in Einklang steht. Dass von Stäben verschiedener Dicke die dünneren durch das Härten eine grössere Abnahme des specifischen Gewichtes erfahren als die dickeren, tritt bei I deutlich hervor, weniger gut bei II. Anders verhalten sich die Stäbe der Sorte III, die Stäbe aus „gezogenem weichen blanken Stahl.“ Hier haben beim Härten Gewicht und Volumen abgenommen, und das

1) Fromme, Gött. Nachr. 1876. p. 165.

specifische Gewicht ist gewachsen; nur III 7 macht eine Ausnahme. Diese Erscheinung wie auch das weiter unten behandelte magnetische Verhalten der Sorte III können leicht zu der Vermuthung führen, dass der gezogene Stahl durch das Härten in einen weicheren Zustand übergeführt worden ist; es mag aber besonders hervorgehoben werden, dass eine Prüfung mit der Feile, wenn sie auch nur einen Schluss auf den Zustand der äussersten Oberflächenschichten gestattet, diese Vermuthung nicht bestätigte.

Wie schon oben erwähnt, wurden nur schwache magnetisirende Kräfte verwandt, nämlich die horizontale und die verticale Componente der erdmagnetischen Kraft. Die Beobachtungsmethode ist genau dieselbe wie die von Riecke und Fromme. Die zu untersuchenden Stäbe wurden in einen auf einen hohlen Messingcylinder aufgewickelten Erdinductor eingeschoben, dessen Drehungsaxe horizontal oder vertical senkrecht und parallel zum magnetischen Meridian eingestellt werden konnte, und alsdann die Ströme gemessen, welche dadurch in dem Inductor inducirt wurden, dass bei einer Drehung desselben um 180° die Pole des eingeschobenen Stahlcylinders umgekehrt wurden. Zur Messung dieser inducirten Ströme diente ein (entfernt aufgestelltes) empfindliches Galvanometer mit astatischem Nadelpaar, dessen Schwingungsdauer anfangs nahe 39 Sec. betrug, später wurde sie auf 46 Sec. gebracht. Inductor und Galvanometer besassen nahe denselben Widerstand. Der Inductor war bei dem Statif des Beobachtungsfernrohrs ungefähr 5,5 m vom Galvanometer entfernt aufgestellt, sodass eine directe Einwirkung des ersteren auf letzteres nicht zu befürchten war; doch habe ich nicht unterlassen, mich durch besondere Versuche zu überzeugen, dass eine solche Wirkung in der That nicht stattfand. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Galvanometermessungen kann ich auf die angezogenen Abhandlungen von Riecke und Fromme verweisen, in denen ausführliche Beobachtungsprotocolle mitgetheilt sind.

Wirkt auf einen magnetisirbaren Körper eine constante magnetisirende Kraft f, so ist das dadurch inducirte magnetische Moment M gegeben durch:

$$M = \gamma \,.\, v \,.\, f,$$

wenn v das Volumen bezeichnet, demnach ist das Moment m der Volumeneinheit:

$$m = \gamma f.$$

Der Factor γ bestimmt sich bei der angewandten Beobachtungsmethode durch die Gleichung:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi v} \cdot \frac{F}{S} \cdot \frac{p-q}{q},$$

wenn p und q die Sinus der halben Ausschlagswinkel des Galvanometers bezeichnen, wenn der Inductor mit, oder wenn er ohne eingeschobenen Cylinder gedreht wird; F ist die Windungsfläche des Inductors und S eine Constante, die in folgender Weise von den Dimensionen der Inductorrolle und des betreffenden Stahlstabes abhängt:

$$S = n_1 \Sigma_1 + n_2 \Sigma_2 + n_3 \Sigma_3 + n_4 \Sigma_4;$$

hierin sind n_1, n_2, n_3, n_4 die Anzahl der Windungen, welche in den vier Lagen, aus denen der Inductor besteht, auf die Längeneinheit entfallen, und die Σ sind bestimmt durch:

$$\sum_i = \frac{\sigma_1}{\sigma_i} + \frac{\sigma_1}{\sigma_i}\left(1 - \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_i}^2}\right)\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{{\sigma_i}^2} + \frac{3}{35}\frac{1}{{\sigma_i}^4} + \cdots\right\},$$

$${\sigma_1}^2 = \frac{4\,l^2}{a^2 - b^2} \qquad 2l = \text{Länge des Inductors},$$

${\sigma_i}^2$ berechnet sich als eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\frac{4}{a^2 - b^2}\left(\frac{l^2}{\sigma^2} + \frac{{r_i}^2}{\sigma^2 - 1}\right) = 1.$$

Entsprechend den Werthen von r_i, d. i. den Werthen der Halbmesser der verschiedenen Windungslagen des Inductors, ergeben sich hieraus vier Werthe von ${\sigma_i}^2$, deren Substitution in der Reihe für Σ_i die Specialwerthe $\Sigma_1 \ldots \Sigma_4$ liefert. Die Convergenz der Reihe in Σ_i ist um so mangelhafter, je grösser das Verhältniss der Länge des Cylinders zu seinem Durchmesser ist, doch genügte auch für die gestrecktesten der hier untersuchten Cylinder die Berechnung der ausgeschriebenen Glieder. Mit der Function γ hängt die Magnetisirungsfunction k zusammen durch:

$$k = \frac{\gamma}{1 - \gamma P},$$

wenn P die oben p. 235 angeführte Constante bezeichnet.



In der Formel für γ ist unter F die Windungsfläche des Inductors zu verstehen. Zum Zweck einer möglichst genauen Bestimmung dieser Grösse wurde der Inductor von gut übersponnenem Kupferdraht neu auf die schon von Riecke und Fromme benutzte Messingröhre aufgewickelt und dabei die Anzahl der Windungen gezählt, deren Durchmesser und Umfang ausgemessen, und hieraus die nachfolgenden Mittelwerthe der Halbmesser bestimmt. Wie schon erwähnt, wurden vier Lagen übereinander gewickelt:

erste Lage:	$2ln_1 = 188{,}0$	$r_1 = 23{,}82$ mm
zweite Lage:	$2ln_2 = 187{,}5$	$r_2 = 26{,}38$ „
dritte Lage:	$2ln_3 = 187{,}0$	$r_3 = 28{,}95$ „
vierte Lage:	$2ln_4 = 184{,}0$	$r_4 = 31{,}41$ „

Daraus ergibt sich:

$$F = 2\pi l (n_1 r_1^2 + n_2 r_2^2 + n_3 r_3^2 + n_4 r_4^2) = 1\,807\,500 \text{ qmm.}$$

Ein Fehler von 0,05 des mittleren Radius ergibt für F einen Fehler von 0,35 Proc. Ausserdem wurde die Windungsfläche wiederholt auf galvanischem Wege bestimmt, indem das magnetische Moment des Inductors durch Ablenkung eines kleinen Magnetspiegels gemessen wurde, wenn ein galvanischer Strom die Windungen der Inductorspirale durchfloss. Der Inductor befand sich gegen das stark gedämpfte Magnetometer in der ersten Hauptlage nach Gauss, die dem Magnetometer zugewandte Endfläche im Abstande R. Wenn dann die Spirale ein Strom von der Intensität i durchfloss, so wurde die Magnetnadel um einen Winkel φ aus dem magnetischen Meridian abgelenkt, und es konnte daraus die Windungsfläche F berechnet werden nach der Formel:

$$F = \frac{A \,.\, T \,.\, \operatorname{tg}\varphi\,(1 + \Theta)}{i};$$

die Intensität wurde durch eine Tangentenbussole vom Reductionsfactor C gemessen:

$$i = C \,.\, T' \,.\, \operatorname{tg}\psi\,(1 + \Theta'),$$

$$F = \frac{A}{C} \cdot \frac{T}{T'} \cdot \frac{1+\Theta}{1+\Theta'} \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}.$$

Darin ist: $\quad A = \frac{1}{2}(R + l)^3 \left(1 - \left(\frac{l}{R+l}\right)^2\right)^2$

oder auch: $A = r^2 l \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^{-1}$;

beide Formeln lieferten bei den hier in Betracht kommenden Verhältnissen dieselben Resultate.

T, T' bezeichnen die horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft an der Stelle des Magnetometers, resp. im Mittelpunkte der Tangentenbussole;

Θ, Θ' das Verhältniss des Drehungsmomentes der Torsion des Suspensionsfadens beim Magnetometer, resp. der Tangentenbussole zum erdmagnetischen Drehungsmomente;

r den mittleren Halbmesser der Windungen des Inductors;

α und β die beiden Winkel, welche die vom Mittelpunkte des Magnetometers nach der Peripherie der beiden äussersten Windungen der mittleren Windungslage gezogenen Geraden mit der Axe der Spirale einschliessen.

Auf die Länge der Bussolennadel brauchte keine Rücksicht genommen zu werden. Die Kreistheilung der Bussole befand sich auf einer Spiegelplatte; das Magnetometer wurde mit Fernrohr, Spiegel und Scala beobachtet. Selbstverständlich war ein Commutator eingeschaltet, der die Umkehrung der Stromrichtung im ganzen Schliessungskreise gestattete.

Ein aus den Beobachtungsprotocollen ohne besondere Wahl herausgenommenes Beispiel mag zeigen, in welcher Weise die Beobachtungen ausgeführt wurden.

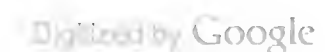
Inductor östlich vom Magnetometer . . . $R = 1230{,}83$ mm,
Abstand von Magnetometerspiegel zu Scala 2308,39 „

$$\log C = 1{,}685\,167\,8, \qquad \log \frac{T}{T'} = 9{,}994\,713\,3,$$

$$\log \frac{1 + \Theta}{1 + \Theta'} = 9{,}998\,351\,3.$$

Strom-richtung	Einstellung der Bussole		des Magnetometers	der Bussole	
1.	108,0°	289,5°	838,5	108,0°	289,8°
2.	71,3	254,0	664,0	71,3	254,0
1.	108,3	289,7	839,0	108,2	289,8

Wegen directer Einwirkung des ganzen Schliessungskreises, den Inductor ausgenommen, auf das Magnetometer



musste bei den Ablesungen des letzteren eine Correction von — 2,45 Scalentheilen angebracht werden, alsdann ergab sich:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 8{,}264\,516\,9, \qquad \log \operatorname{tg} \psi = 9{,}515\,203\,9,$$
$$F = 1\,811\,800 \text{ qmm.}$$

Ein Fehler im Ablesen der Magnetometerstellung von 0,1 Scalentheilen hat in F einen Fehler von 0,21 Proc. zur Folge, ein Beobachtungsfehler bei der Tangentenbussole von 0,2° einen solchen von 1,10 Proc. Danach stimmt der auf galvanischem Wege gefundene Werth gut mit dem Werthe überein, welcher durch directe Ausmessung der Dimensionen des Inductors gegeben wurde. Vierzehn galvanische Bestimmungen lieferten im Mittel:

$$F = 1\,801\,400 \text{ qmm}$$

mit einem mittleren Fehler von 0,30 Proc. Dieser Werth ist im Folgenden benutzt worden. (Die Abweichung von dem oben p. 239 berechneten Werthe von F beträgt 0,34 Proc.).

3. Die Magnetisirungsfunction von Stahl.

Die von mir ausgeführten Bestimmungen der Magnetisirungsfunction k zerfallen der Zeit nach in zwei Abschnitte. Der erste derselben umfasst die Beobachtungen vom Juni bis September 1881, in ihm wurden die Bestimmungen von k unter dem Einfluss der horizontalen und der verticalen Componente der erdmagnetischen Kraft für die rohen Stäbe aller drei Sorten ausgeführt, ferner die für I in gehärtetem Zustande unter Einwirkung der verticalen Componente. Für den mittleren Termin (1. Aug.) wurde die Horizontalintensität für den magnetischen Pavillon des physikalischen Instituts nach der Variationsformel von K. Schering[1]) berechnet und danach mit Hülfe des compensirten Magnetometers von Weber und Kohlrausch[2]) für den Beobachtungssaal bestimmt zu $T = 1{,}8888$, für die Verticalcomponente ergab sich $V = 3{,}6304$. Die Temperatur der Stäbe wurde als dieselbe angenommen wie die des Beobachtungsraumes, aus dem die Stäbe nur selten entfernt wurden, sie

1) K. Schering, Göttinger Nachr. 1881. p. 133. Wied. Ann. **13.** p. 328. 1881.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. **142.** p. 551. 1871.

schwankte zwischen 17,3 und 25,0°, von ihrem Einfluss auf die Magnetisirungsfunction wird weiter unten die Rede sein. In der folgenden Tabelle 3 sind zunächst alle Werthe von k für die rohen Stäbe mitgetheilt; k_v bezieht sich auf die Vertical-, k_h auf die Horizontalcomponente.

Tabelle 3.

	Sorte I		Sorte II		Sorte III	
	k_v	k_h	k_v	k_h	k_v	k_h
1.	6,57 6,88 6,75 6,83	6,36 6,66 6,52 6,25	5,58 5,64 5,62 5,62	5,35 5,35 5,42 5,57	6,16 6,14 6,13 6,14	6,07 5,94 5,84 5,86
2.	6,55 6,71 6,62 6,58	6,37 6,53 6,34 6,14	5,33 5,48 5,32 5,40	5,13 5,25 5,23 5,07	6,04 6,10 6,05 6,11	5,99 5,90 5,76 5,83
3.	6,71 6,85 6,71 6,74	6,41 6,57 6,47 6,34	5,29 5,36 5,30 5,31	5,09 5,10 5,16 5,09	5,98 6,04 6,02 6,04	5,85 5,77 5,75 5,73
4.	4,51 4,59 4,52 4,53	— 4,39 4,44 4,28	5,54 5,64 5,62 5,59	5,37 5,39 5,46 5,50	6,25 6,27 6,27 6,34	5,97 5,97 6,03 5,99
5.	7,44 7,62 7,67 7,52	7,37 7,39 7,34 7,24	7,55 7,65 7,59 7,61	7,32 7,27 — 7,38	6,62 6,72 6,62 6,69	6,31 6,20 6,19 6,50
6.	7,75 7,70 7,69 7,64	7,38 7,40 7,58 7,48	7,45 7,53 7,53 7,61	7,21 7,29 7,25 7,20	6,82 6,98 6,88 6,89	6,66 6,72 6,45 6,51
7.	7,51 7,77 7,78 7,69	7,57 7,54 7,40 7,55	5,76 5,89 5,83 5,83	5,62 5,85 5,81 5,58	8,25 8,38 8,34 8,51	8,01 8,12 8,03 8,14
8.	7,78 7,73 7,79 7,59	7,37 7,45 7,50 7,45	5,98 6,06 6,02 6,03	5,76 6,03 5,83 5,94	8,51 8,31 8,47 8,53	8,19 8,11 7,98 7,94
9.	7,39 7,71 7,68 7,62	7,39 7,12 7,51 7,50	5,92 5,99 5,84 5,88	5,79 5,61 5,74 5,80	8,51 8,43 8,42 8,48	7,76 7,93 7,82 7,92

Die Werthe für die einzelnen Stäbe zeigen eine genügende Uebereinstimmung, und man wird daher, statt sie einzeln zu behandeln, die Mittelwerthe betrachten können, welche sich aus ihnen ergeben. Diese Mittelwerthe finden sich in der folgenden Tabelle 4, ihnen sind hinzugefügt die zugehörigen Momente der Volumeneinheit m und die Werthe k_0 für eine verschwindende magnetisirende Kraft, welch letztere berechnet sind mit Hülfe der Formel:

$$k = k_0 + am;$$

die Coëfficienten a finden sich in der letzten Columne der Tabelle.

Tabelle 4.

Sorte I.

	k_v	m_v	k_h	m_h	k_0	a
1.	6,76	22,47	6,45	11,20	6,14	0,027
2.	6,61	22,47	6,34	11,26	6,07	0,024
3.	6,75	23,23	6,45	11,58	6,15	0,026
4.	4,54	16,01	4,35	7,93	4,16	0,023
5.	7,56	26,50	7,33	13,37	7,11	0,017
6.	7,69	27,03	7,46	13,65	7,23	0,017
7.	7,69	26,97	7,51	13,73	7,32	0,013
8.	7,72	27,26	7,44	13,60	7,15	0,021
9.	7,60	26,90	7,38	13,60	7,16	0,017
Sorte II.						
1.	5,62	18,99	5,42	9,56	5,22	0,021
2.	5,38	18,52	5,17	9,27	4,96	0,023
3.	5,31	18,52	5,11	9,27	4,91	0,022
4.	5,60	19,64	5,43	9,92	5,26	0,018
5.	7,60	26,50	7,32	13,30	7,03	0,021
6.	7,53	26,43	7,24	13,24	6,96	0,022
7.	5,83	20,69	5,71	10,54	5,58	0,012
8.	6,02	21,42	5,89	10,90	5,75	0,013
9.	5,91	21,09	5,73	10,65	5,55	0,017
Sorte III.						
1.	6,14	20,55	5,93	10,33	5,72	0,020
2.	6,08	20,69	5,87	10,43	5,66	0,020
3.	6,02	20,84	5,78	10,54	5,53	0,024
4.	6,28	21,89	5,99	10,88	5,70	0,026
5.	6,66	23,34	6,30	11,46	5,95	0,031
6.	6,89	24,25	6,58	12,07	6,27	0,025
7.	8,37	29,44	8,07	14,82	7,77	0,020
8.	8,45	29,84	8,06	14,81	7,67	0,026
9.	8,46	29,95	7,92	14,62	7,41	0,035

Nachdem diese Bestimmungen ausgeführt waren, wurden sämmtliche Stäbe gehärtet; dabei haben sie sich fast alle

ein wenig gekrümmt, auch haben sich, wie eine Vergleichung von Tabelle 1 und 2 zeigt, die Volumina geändert, da diese Aenderungen aber nur gering waren, so habe ich trotzdem dieselben Werthe von P benutzt wie früher, die Resultate dürften durch den hieraus entspringenden Fehler nicht wesentlich beeinträchtigt werden.

Wie schon erwähnt, wurde noch im September 1881 eine Reihe von Beobachtungen mit den Stäben I in gehärtetem Zustande ausgeführt, indem dieselben der Wirkung der verticalen Componente des Erdmagnetismus ausgesetzt wurden. Dabei zeigte sich, dass für diese Cylinder die Differenz der Ausschläge des Galvanometers, wenn der Inductor mit, oder wenn er ohne eingeschobenen Stahlstab gedreht wurde, so bedeutend gegen früher abgenommen hatte, dass die mit den Cylindern 7, 8, 9 angestellten Versuche verhältnissmässig wenig zuverlässige Resultate lieferten, daher wurde auf eine Bestimmung der Magnetisirungsfunction für diese Stäbe verzichtet. Aus demselben Grunde wurde von einer Bestimmung von k_h abgesehen. Die Beobachtungen lieferten folgende Resultate.

Tabelle 5.

Sorte I.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
k_v	2,29 2,25 2,29 2,21	2,20 2,21 2,23 2,20	2,28 2,25 2,25 2,20	3,19 3,04 3,18 3,13	2,16 2,19 2,18 2,13	2,32 2,26 2,32 2,27
Mittel	2,26	2,21	2,25	3,13	2,16	2,29
m_v	7,95	7,84	8,02	11,15	7,77	8,24

Die Untersuchungen ruhten sodann bis Januar 1882, wo sie wieder aufgenommen und in den beiden folgenden Monaten zu Ende geführt wurden. Das Verhältniss der inducirenden Kräfte betrug $T : V = 1,9057 : 3,2268$. Um zu prüfen, ob die Stäbe sich in der Zwischenzeit geändert hätten, und wie gross sich der Einfluss in der Temperaturverschiedenheit zeigte, wurden zunächst die Beobachtungen mit I wiederholt und sodann auch II und III im gehärteten Zu-

stande dem Versuche unterworfen. Ebenso wenig wie die Stäbe der Sorte I erlaubten die der Sorte II eine genaue Bestimmung von k_h; bei III zeigten sich dagegen keinerlei Schwierigkeiten. Die gewonnenen Resultate sind in den folgenden Tabellen verzeichnet.

Tabelle 6.

k_v für I und II.

	I	II		I	II		I	II
1.	2,15 2,19 2,17 2,25	2,28 2,31 2,26 2,25	3.	2,17 2,19 2,20 2,17	2,37 2,39 2,35 2,39	5.	2,09 1,95 2,10 2,10	2,36 2,34 2,35 2,36
2.	2,08 2,15 2,12 2,14	2,51 2,45 2,48 2,46	4.	3,07 3,05 3,09 3,09	4,25 4,19 4,13 4,15	6.	2,20 2,21 2,19 2,21	2,24 2,20 2,16 2,19

Tabelle 6_a.

Sorte III.

	k_v	k_h		k_v	k_h		k_v	k_h
1.	8,83 8,82 8,96 9,11	8,69 8,85 8,80 9,01	3.	9,26 9,51 9,90 9,73	9,53 9,33 9,65 9,49	5.	12,19 12,71 12,74 13,05	12,16 12,42 12,26 12,50
2.	9,70 10,15 10,22 9,96	9,51 9,71 9,61 9,82	4.	10,67 10,29 10,58 10,72	10,55 10,29 10,21 10,38	6.	12,14 12,70 12,57 12,30	11,91 11,72 11,94 11,68

Die aus diesen Beobachtungen resultirenden Mittelwerthe sind in Tabelle 7 für I und II mit den zugehörigen Werthen von m zusammengestellt; die hier angegebenen Werthe für I gelten für eine Temperatur von $4,5^0$, während die in Tab. 5 mitgetheilten sich auf 18^0 beziehen. In Tabelle 7_a sind die Werthe von k_v und k_h für die Sorte III angegeben und ihnen die nach der Formel auf p. 243 berechneten Werthe von k_o und dem Factor a hinzugefügt.

Tabelle 7.

	Sorte I		Sorte II	
	k_v	m_v	k_v	m_v
1.	2,19	6,84	2,28	7,13
2.	2,12	6,71	2,48	7,81
3.	2,18	6,91	2,37	7,52
4.	3,08	9,78	4,18	13,13
5.	2,06	6,58	2,35	7,49
6.	2,20	7,03	2,20	7,00

Tabelle 7_a.

Sorte III.

	k_v	m_v	k_h	m_h	k_0	a
1.	8,93	25,62	8,84	15,00	8,71	0,008
2.	10,01	29,17	9,66	16,69	9,19	0,028
3.	9,60	28,75	9,50	16,71	9,36	0,008
4.	10,57	31,85	10,36	18,47	10,07	0,016
5.	12,67	38,27	12,33	22,03	11,87	0,021
6.	12,43	37,97	11,81	21,36	11,01	0,037

Die bisher mitgetheilten Tabellen zeigen, dass auch für Stahl folgende Sätze gelten:

1. Die Magnetisirungsfunction hat für eine verschwindende magnetisirende Kraft einen positiven Werth (Tab. 4 und 7_a)[1].

2. Die Magnetisirungsfunction wächst anfangs mit der magnetisirenden Kraft (Tab. 3, 4, 6_a, 7_a).

3. Die Magnetisirungsfunction für schwache magnetisirende Kräfte wächst mit der Temperatur (Tab. 5, 7)[2]. Eine Aenderung der Structurverhältnisse der Stahlsorte I in der Zeit eines halben Jahres ist anzunehmen nicht nothwendig. Andererseits reicht die Differenz der Werthe von k für 4,5° und 18° nicht aus zur Erklärung der Differenzen $k_v - k_h$, auch wenn man annehmen wollte, dass alle k_h bei niedrigeren Temperaturen bestimmt wären als die zugehörigen k_h, was allerdings nicht der Fall ist.

4. Die Sorten I und II zeigen bei zunehmender Härte eine Abnahme des Werthes der Magnetisi-

1) Baur, l. c. p. 399. Riecke, l. c. p. 497. Ruths, l. c. p. 15.
2) Baur, l. c. p. 403. Wassmuth, Beibl. 5. p. 66. 1881.

rungsfunction; diese Abnahme ist um so grösser, je dünner der Stab ist, was vielleicht darauf hindeutet, dass die Härtung bei den Cylindern von 4 mm Durchmesser besser gelungen ist als bei denen von 5 mm Durchmesser. Die Sorte III zeigt das entgegengesetzte Verhalten.

Wollte man annehmen, dass die Stäbe III durch das Glühen und plötzliche Ablöschen in einen weicheren Zustand gelangt wären, so wäre es doch wahrscheinlich, dass dieses bei den Stäben 5 und 6, da sie beim Eintauchen in Wasser wegen ihres kleineren Durchmessers schneller erkalten als die übrigen, weniger der Fall wäre als bei 1, 2, 3, 4. Es würden also diese beiden Cylinder nach dem Härten weniger von ihrem ursprünglichen Zustande abweichen als die übrigen. Da das magnetische Verhalten aber ganz entschieden hiergegen spricht, so glaube ich eher behaupten zu sollen, dass nicht bei allen Stahlsorten die Magnetisirungsfunction abnimmt, wenn die Härte steigt. Auch insofern zeigte III ein von I und II abweichendes Verhalten, als die Stäbe dieser Sorte einen verhältnissmässig starken permanenten Magnetismus angenommen hatten, während sämmtliche Stäbe denselben Bedingungen ausgesetzt waren; sie lagen, wenn eben nicht mit ihnen beobachtet wurde, neben einander in einem hölzernen Kasten nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian.

Die Tabelle I zeigt, dass die von dem Axenverhältnisse der Cylinder abhängige Constante *P* für einige Cylinder der verschiedenen Sorten denselben Werth hat, man wird daher diese Stäbe zu einer Prüfung des Thomson'schen Satzes benutzen können, nach welchem das von denselben Kräften in der Gewichtseinheit ähnlich geformter Stäbe inducirte magnetischen Moment dasselbe sein soll.[1])

Bezeichnet man dieses Moment mit μ, so ist:

$$\mu = \frac{m}{s}.$$

Die Zusammenstellung der bezüglichen Werthe liefert nun folgende Tabellen:

---

1) Wied. Galv. (2) **2.** 1. p. 418. 1874.

Tabelle 8.
Weicher Stahl.

		I	II	III
μ_v	2.	2,91	2,38	—
	3.	2,99	2,38	2,67
	4.	2,05	2,53	—
	5.	—	3,47	3,00
		9. 3,49	8. 2,79	8. 3,83

		I	II	III
μ_h	2.	1,45	1,19	—
	3.	1,49	1,19	1,35
	4.	1,01	1,28	—
	5.	—	1,74	1,47
		9. 1,76	8. 1,79	8. 1,90

Tabelle 9.
Harter Stahl.

		I	II	III
μ_v	2.	0,87	1,01	—
	3.	0,90	0,97	3,66
	4.	1,26	1,69	—
	5.	—	0,99	4,90

Daraus ziehen wir das Resultat:

5. Der Thomson'sche Satz gilt nur für Eisen[1]), nicht aber für Stahl, weder für weichen, noch für harten.

Will man auch die verschiedenen Stäbe derselben Sorte untereinander vergleichen, so muss man sich dabei, wie ein Blick auf obige Tabellen zeigt, auf die Cylinder von gleichem Durchmesser beschränken[2]), dabei ist I 4 von vorn herein auszuschliessen, dieser Cylinder ist sicher von einer ganz anderen Stahlsorte. Es zeigt sich dann, dass die Magnetisirungsfunction für zusammengehörende Stäbe nahezu constant, also vom Axenverhältnisse unabhängig ist. Zur Erklärung der Verschiedenheiten von k für Stäbe von verschiedenem Durchmesser wird man annehmen müssen, dass die Structurverhältnisse in den Oberflächenschichten andere sind als im inneren Kern, und dass diese Verschiedenheit bei verschieden dicken Stäben verschieden entwickelt ist, während man sie bei gleich dicken Cylindern als gleich annehmen darf. Aus diesem Grunde wurde darauf verzichtet, den Einfluss zu prüfen, welchen die Abweichung der cylin-

1) Ruths, l. c. p. 11.

2) Strouhal u. Barus: Ueber den Einfluss der Härte des Stahls auf dessen Magnetisirbarkeit. Würzburg 1882.

drischen Form der benutzten Stäbe von der ellipsoidischen hat, die ja der Theorie zu Grunde liegt, indem etwa durch Abfeilen einem der Stäbe möglichst genau die Form eines Rotationsellipsoides gegeben, und dann eine neue Bestimmung der Magnetisirungsfunction vorgenommen wäre. Es war vorauszusehen, dass die Abweichung zwischen den Werthen von k vor und nach dem Abfeilen viel bedeutender ausfallen würde, als die Verschiedenheit der Formen sie bedingte.

Der oben an zweiter Stelle angeführte Satz steht in Widerspruch mit dem Resultate, zu dem Fromme (l. c.) durch seine Beobachtungen geführt wurde: k nimmt ab mit wachsender magnetisirender Kraft; k soll von einem grossen Werthe bei wachsender magnetisirender Kraft erst rasch, dann langsamer zu einem Minimum herabsinken. Da sich die Stahlellipsoide, mit denen Fromme experimentirte, im hiesigen physikalischen Institute noch vorfanden, so habe ich mit den gestrecktesten derselben die Bestimmung der Magnetisirungsfunction wiederholt und dabei die in den nachfolgenden Tabellen niedergelegten Werthe erhalten. Die Bezeichnung der Ellipsoide ist die von Fromme. Durch die zufällige Annäherung eines grossen Stabmagnets war das Verhältniss der horizontalen zur verticalen Componente der erdmagnetischen Kraft gegen die früheren Beobachtungen etwas verändert, es ergab sich $T:V = 1{,}717:3{,}096$.

Tabelle 10.

	I		II			I		II	
Ellipsoid	4	5	4	5	Ellipsoid	4	5	4	5
k_v	14,65	15,02	8,74	7,34	k_h	10,26	9,17	7,48	6,72
	13,73	14,89	8,80	7,51		10,29	9,41	7,44	6,82
	14,63	15,19	8,55	7,33		10,01	8,92	7,25	6,56
	14,29	15,17	8,78	7,51		10,31	9,03	7,32	6,74

Die aus dieser Tabelle resultirenden Mittelwerthe stelle ich mit den entsprechenden Momenten der Volumeneinheit zusammen und füge den Werth der Magnetisirungsfunction für eine verschwindende magnetisirende Kraft als fernere Stütze des Satzes 1 p. 246 bei, ausserdem habe ich in die folgende Tabelle noch die Werthe der Function γ (cf. p. 238)

aufgenommen, das ist das magnetische Moment eines ähnlich gestalteten Körpers vom Volumen Eins, dividirt durch die magnetisirende Kraft, es muss diese Function also mit der Excentricität wachsen; je grösser das Axenverhältniss ist, desto mehr nähert sich der Werth von γ dem von k, mit dem er bei sehr starker Streckung des Cylinders zusammenfällt.

Tabelle 11.

	I		II			I		II	
Ellipsoid	4	5	4	5	Ellipsoid	4	5	4	5
k_v	14,32	15,06	8,72	7,42	γ_v	2,02	3,06	1,87	2,52
m_v	6,25	9,47	5,79	7,80	γ_h	1,90	2,70	1,80	2,43
k_h	10,22	9,13	7,37	6,71	γ_o	1,79	2,36	1,72	2,33
m_h	3,28	4,64	3,09	4,17	α	0,036	0,074	0,026	0,024
k_o	5,68	3,44	5,84	5,88					
a	1,384	1,228	0,499	0,197					

Diese Werthe stimmen vollkommen mit den Resultaten überein, welche Fromme vor der Reparatur seines Inductors gefunden hat, und bestätigen den Satz 2 p. 241. In dem ausgeglühten Zustande, in welchem sich die Ellipsoide befanden, hat Fromme leider nur die Magnetisirungsfunction unter Einfluss der verticalen Componente für I bestimmt und gefunden: I 4, $k = 16{,}22$ I 5, $k = 11{,}37$.

Vergleicht man diese Werthe mit den von mir gefundenen, so ergibt sich, dass die Ellipsoide sich jetzt in einem ganz anderen Zustande befinden wie vor sieben Jahren, als Fromme mit ihnen beobachtete. Heute verhalten sie sich mit Beziehung auf die Aenderung der Magnetisirungsfunction bei wachsender magnetisirender Kraft, wie Eisen und die von mir untersuchten Stahlsorten. Damals war allerdings die Windungsfläche des Inductors nicht eben sehr genau bekannt[1]), aber der hierher rührende Fehler ist nicht im Stande die Abweichungen zu erklären, welche zwischen Fromme's Beobachtungen und den meinigen bestehen.

Um dann zu untersuchen, bei welchen inducirenden Kräften zuerst remanenter Magnetismus auftrete, hat Fromme

1) Riecke l. c. p. 495.

die Ellipsoide allmählich aufsteigenden galvanischen Kräften unterworfen, die Werthe, welche er dabei für *k* erhielt, hat er nicht discutirt, weil er sie für zu wenig genau hielt. Die auf diesem Wege gewonnenen Grössen sind für gleiche magnetisirende Kräfte zum Theil bedeutend kleiner als die früher bestimmten. Mag nun auch die Genauigkeit dieser Werthe keine grosse sein, so wird man doch die miteinander vergleichen dürfen, welche denselben Ellipsoiden zukommen. Für den Bereich der hier in Betracht kommenden Kräfte theilt Fromme[1]) folgende Werthe mit:

	f	*k*		*f*	*k*		*f*	*k*		*f*	*k*
I 3	1,739	6,86	II 3	2,427	4,77	I 5	1,670	8,70	II 5	1,724	5,23
	2,411	7,26		3,810	5,13		2,373	7,75		2,396	5,15
	3,803	8,30		—	—		2,636	7,71		2,651	5,17
4	1,731	5,94	4	1,731	4,31		3,872	7,79		3,857	5,16
	2,342	6,96		2,388	3,81						
	3,865	7,40		3,857	6,50						

Es sprechen also I 3, 4 und II 3 für den Satz 2 p. 241, I 5 und II 4 dagegen treten für Fromme's Ansicht ein, II 5 lässt mit Rücksicht auf die erwähnte Ungenauigkeit der Werthe die Frage unentschieden.

Ueberblicke ich alle vorliegenden Beobachtungen, so glaube ich zur Aufstellung des erwähnten Satzes 2 vollberechtigt zu sein. Es bleibt zwar die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass für gewisse Stahlsorten die Magnetisirungsfunction schon bei sehr schwachen magnetisirenden Kräften mit wachsender Kraft abnimmt. Nach den bisherigen Beobachtungen aber sind diese Stahlsorten, vielleicht besser diese vorübergehenden Zustände von Stahlsorten, selten.

4. Die Magnetisirungsfunction von Nickel.

Nach ganz derselben Methode wie bei den Stahlcylindern habe ich auch die Magnetisirungsfunction eines chemisch reinen Nickeldrahtes, den ich der Güte des verstorbenen Geheimrath Wöhler verdanke, zu bestimmen mich bemüht. Der Draht hatte eine Länge von 560,94 mm und einen Durchmesser von 0,504 mm.

1) Fromme, l. c. p. 408 u. 409.

Die Beochtungen waren sehr schwierig, da die Differenzen zwischen den Galvanometerabweichungen, wenn der Inductor mit, und wenn er ohne eingeschobenen Draht gedreht wurde, bei höchster Empfindlichkeit des Galvanometers und bei inducirender verticaler Componente der erdmagnetischen Kraft, noch nicht ganz einen Scalentheil betrugen. Es ist demnach der durch die Ungenauigkeit in der Galvanometerbeobachtung bedingte Fehler hier ein verhältnissmässig grosser, und man muss daher die Bestimmung häufiger wiederholen, wenn man ein einigermassen genaues Endresultat erzielen will. Ich habe unter Einfluss der Wirkung der verticalen Componente des Erdmagnetismus, $V = 3{,}096$, bei einer Temperatur von 14° C. folgende zehn Werthe für k bestimmt:

2,71	1,25	2,27	2,24	1,59
2,76	2,15	1,97	1,98	2,97.

Daraus berechne ich, indem ich die einzelnen Werthe nach Maassgabe der bei ihnen begangenen Fehler in der Galvanometerbeobachtung berücksichtige, die Magnetisirungsfunction des Nickels zu $k = 2{,}24$ für eine magnetisirende Kraft $f = 3{,}096$ mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{,}03$ oder 1,3 %.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, diesen Werth mit denjenigen zu vergleichen, welche Rowland bestimmt hat, indem er mit aus Nickel gegossenen Ringen von kreisförmigem Querschnitt unter Einwirkung stärkerer magnetisirender Kräfte arbeitete. Nehmen wir an, dass die Temperatur, bei welcher die in Rowland's erster Abhandlung[1]) mitgetheilten Werthe gewonnen wurden, etwa zwischen 12 bis 15° lag, so können wir dieselben mit den in der zweiten Abhandlung[2]) gegebenen zusammenstellen. Wir berücksichtigen nur die bei den schwächsten Kräften erhaltenen Resultate und bekommen:

1) „Cast Nickel, normal"		2) „Cast Nickel, normal 15°"		3) „Cast Nickel, magnetic., 12°"	
f	k	f	k	f	k
18,01	3,69	12,84	4,10	—	—
36,49	5,10	26,85	6,35	23,25	4,18
44,32	6,69	45,14	13,06	47,69	12,91.

1) Rowland, Phil. Mag. (4.) **46.** p. 153. Tab. VI. 1873.

2) Rowland, Phil. Mag. (4) **48.** p. 327 u. 328. Tab. I u. II. 1874.

Dabei ist zu bemerken, dass die Resultate 1 nicht ganz so zuverlässig sind wie die übrigen, weil der benutzte Ring sich als ein wenig porös erwies. — Mit diesen Werthen scheint der oben für $f = 3{,}096$ angegebene, $k = 2{,}24$, wohl verträglich.

Göttingen, physikal. Inst., November 1882.

V. *Beiträge zur Geschichte der neueren dynamoelectrischen Maschinen mit einigen Bemerkungen über die Ermittelung des Wirkungsgrades electromagnetischer Motoren; von A. von Waltenhofen.*

(Aus den Sitzungsber. der k. böhm. Ges. der Wiss. (1882) im Auszuge mitgetheilt vom Verfasser.)

Nach einer geschichtlichen Einleitung über die Entwickelung der Electrotechnik von den folgenreichen Entdeckungen Oersted's und Davy's bis zum Zustandekommen der ersten für den Grossbetrieb geeigneten Dynamomaschine von Gramme wird hervorgehoben, dass die Herstellung solcher Maschinen, welche nicht nur sehr starke, sondern auch continuirliche Ströme liefern, auf eine glückliche Vereinigung von zwei vorausgegangenen wichtigen und sinnreichen Erfindungen zurückzuführen ist, nämlich auf das von Pacinotti herrührende Princip der continuirlichen Induction mittelst eines ringförmigen rotirenden Ankers und auf das von Werner Siemens herrührende Princip der dynamoelectrischen Stromerzeugung. Nach einer näheren sachlichen und geschichtlichen Besprechung dieser beiden Erfindungen (wobei der Verfasser auch auf seinen im 5. Bde. der 3. Auflage von Karmarsch und Heeren's technischem Wörterbuche erschienenen Artikel: „Licht, electrisches" Bezug nimmt) geht derselbe auf den eigentlichen Gegenstand seiner Mittheilung über, nämlich auf die Frage: wann und von wem die vereinigte Anwendung dieser beiden Principien — also die Erzeugung von continuirlichen dynamoelectrischen Strömen — zuerst bewerkstelligt worden ist, und sagt darüber Folgendes.

Dass Gramme der erste war, welcher eine dynamoelectrische Maschine mit continuirlicher Induction gebaut hat, wobei er — unabhängig von Pacinotti — einen dem Pacinotti'schen Ringe ganz ähnlichen Ringanker zur Anwendung brachte, bleibt eine unbestrittene Thatsache.

Wenn es sich aber um die Frage handelt, wer zuerst continuirliche dynamoelectrische Ströme erzeugt hat, wer also der erste war, der die Principien von Siemens und Pacinotti in vereinigter Anwendung experimentell zur Ausführung brachte, so wird man nach den Aufklärungen, welche ich hierüber zu geben in der Lage bin, Prof. Pfaundler in Innsbruck die Priorität zuerkennen müssen.

Im Jahre 1867 hatte der Innsbrucker Mechaniker J. Kravogl seinen seither auch in weiteren Kreisen bekannt gewordenen electromagnetischen Motor zur Pariser Ausstellung gesendet.[1]) Aus der neuerdings in Müller-Pfaundler's Lehrbuch der Physik erschienenen Beschreibung desselben ist ersichtlich, dass der Erfinder bei demselben das Princip der Spiralanziehung auf einen beweglichen Eisenkern, welches Page in bekannter Weise zur Hervorbringung einer hin- und hergehenden Bewegung benutzt hatte, zur Erzeugung einer continuirlichen Rotationsbewegung angewendet hat, welche jedoch in der Art stattfindet, dass nicht der Eisenkern bei feststehenden Spulen sich bewegt, sondern vielmehr die in kreisförmiger Anordnung einen hohlen Ring bildenden Spulen um eine horizontale Axe kreisen, während ein in der Höhlung dieses Spulenkranzes gleitender Eisenkern (von der Form eines entsprechend gebogenen cylindrischen Stabes) in einer bestimmten Gleichgewichtslage verbleibt.[2]) Die Stromzuleitung findet nämlich in der Art

1) Nach meinen damals ausgeführten Untersuchungen übertrifft dieser Motor an Wirkungsgrad alle anderen bisher diesfalls untersuchten electromagnetischen Motoren.

2) Man erhält eine Vorstellung vom Kravogl'schen Ringe, wenn man sich aus dem Spulenkranze des Gramme'schen Ringes $^2/_3$ vom ringförmigen Eisenkern fortgenommen und das übrig bleibende Drittel in der Höhlung des Spulenkranzes nicht feststeckend, sondern vielmehr mit

statt, dass von den sämmtlichen, den rotirenden Hohlring bildenden Spulen immer nur eine Gruppe von Spulen Strom bekommt, nämlich stets diejenigen Spulen, die gerade eine bestimmte Stellung seitwärts von der durch die Rotationsaxe gelegten Verticalebene passiren. Dadurch wird der in der Höhlung des Spulenkranzes gleitende Eisenkern aus seiner tiefsten Stellung, die er vermöge seines Gewichtes einzunehmen sucht, in die durchströmten Spulen hineingezogen und somit in einer gehobenen Stellung schwebend erhalten, wodurch eben die continuirliche Rotation des Spulenkranzes bedingt ist. Hierbei bleibt der Batteriestrom ununterbrochen gleichgerichtet und — sowie auch der Electromagnetismus des Eisenkerns — bei nicht allzulangsamem, gleichförmigem Gange des Motors nahezu constant.

Ueber diesen Motor berichtete mir Hr. Prof. Pfaundler (der eben damals mein Nachfolger an der Innsbrucker Universität geworden war) in einem Briefe vom 9. Nov. 1867, dass derselbe nicht mehr nach Innsbruck zurückkommen werde, und fügt dann folgende Worte bei: „Es ist mir aber leid, dass ich ihn“ (den Motor nämlich) „nicht mehr sehe; ich hätte noch gern den Versuch gemacht, mit demselben umgekehrt aus mechanischer Arbeit electrische Ströme, resp. auch electrisches Licht zu erzeugen. Ich wollte nämlich mit eingeschalteter Batterie das Rad durch stärkere Kraft

möglichst geringer Reibung gleitend gemacht denkt. Würde man ferner die inducirenden Magnete beseitigen und mittelst der Schleifcontacte einen Batteriestrom dem Ringe zuführen, so würde es durch entsprechende Verstellung der Schleifcontacte möglich sein, eine Differenzwirkung der beiden durchströmten Ringsegmente auf den gleitenden Eisenkern zu Stande zu bringen, welche eine Rotation des Ringes zur Folge hätte. Denkt man sich endlich noch die Stromzuleitung in der Art modificirt, dass überhaupt nur ein Ringsegment Strom bekommt, und sonach die Gegenwirkung der übrigen Spulen entfällt, so wird der Ring mit viel grösserer Energie als vorhin rotiren müssen. Auf diese Art lässt sich auch ohne eine Zeichnung das Princip der Kravogl'schen Kraftmaschine aus dem Principe der allgmein bekannten Gramme'schen Inductionsmaschine ableiten. Hinsichtlich der Details (auf die es übrigens hier gar nicht ankommt) citiren wir ausser Müller-Pfaundler's Lehrbuch und den dort angeführten Quellen noch den im Innsbrucker Gymnasial programm vom Jahre 1870 enthaltenen Aufsatz von Fr. Kiechl.

in entgegengesetzter Richtung drehen, dann die Batterie mittelst Nebenleitung zuerst theilweise und dann ganz ausschalten. Diese Idee, von Siemens in Poggendorff's Annalen auch ausgesprochen, liesse sich sicher auch auf Kravogl's Motor anwenden."

Ungefähr zwei Jahre später (in einem vom 20. December 1869 datirten Briefe) benachrichtigte mich Pfaundler von der Vollendung eines zweiten, grösseren Motors, welchen Kravogl gebaut hatte, und nachdem er sich gegen eine Idee ausgesprochen hat, welche Kravogl dabei ausführen wollte, setzt er hinzu: „Eher scheint mir versuchenswerth, nach dem Vorschlage von Siemens die Anwendung des Apparates in der Art umzukehren, dass man mittelst desselben mechanische Arbeit in strömende Electricität verwandelt, d. h. aus dem Apparate einen „Electromotor" im eigentlichen Sinne, d. h. einen Stromerzeuger zu machen."

Bald darauf hat Pfaundler das von ihm beabsichtigte Experiment mit dem Kravogl'schen Motor (an welchem der Erfinder inzwischen noch Verbesserungsversuche machte) auch wirklich ausgeführt und mir davon in einem Briefe vom 11. Februar 1870 mit folgenden Worten Nachricht gegeben: „Das Siemens'sche Princip lässt sich in der That in Anwendung bringen. Man erhält durch Treiben mit der Hand ohne Batterie einen Strom in der Stärke wie von einem Bunsen'schen Elemente."

Es unterliegt sonach wohl keinem Zweifel, dass Pfaundler schon vor Gramme continuirliche dynamoelectrische Ströme erzeugt hat, und dass er die Möglichkeit, solche Ströme mittelst der Kravogl'schen Ringmaschine zu erzeugen, noch in demselben Jahre (1867) ausgesprochen hat, in welchem die Siemens'sche Erfindung der dynamoelectrischen Maschinen in die Oeffentlichkeit gelangt war.

In den vorstehenden Mittheilungen ist von meinen mit dem Kravogl'schen Motor im Jahre 1867 vorgenommenen Untersuchungen die Rede gewesen. In manchen seither erschienenen Publicationen, worin diese oder ähnliche Untersuchungen des Wirkungsgrades electromagnetischer Motoren

besprochen werden, sind jedoch über dasjenige, was mein Verfahren mit älteren Methoden gemein hat, und worin es sich von denselben unterscheidet, unklare oder unrichtige Aussprüche enthalten.

Nachdem nun in neuerer Zeit der Betrieb electromagnetischer Maschinen — jetzt in der Form von Dynamomaschinen — durch Batterieströme — nämlich electrischer Accumulatoren — eine praktische Bedeutung gewonnen hat, dürfte die Klarstellung der angedeuteten Fragen nicht ohne Interesse sein.

Während Jacobi (1840) die ersten Grundlagen einer Theorie der electromagnetischen Maschinen geliefert hat, sind Grove (1844) Joule und Scoresby (1847) und W. Petrie (1851) als die ersten zu nennen, von welchen bestimmte Angaben über den Wirkungsgrad von electromagnetischen Motoren gemacht worden sind.[1]) Dabei sind die genannten Physiker von dem Grundsatze ausgegangen: die zur Unterhaltung einer Pferdekraft theoretisch erforderliche Zinkconsumtion mit derjenigen zu vergleichen, welche sich aus den beim untersuchten Motor vorgenommenen experimentellen Bestimmungen der Arbeitsleistung und des Zinkverbrauches, per Pferdekraft ergeben würde. Von all diesen Angaben können nur die von W. Petrie als auf verlässlichen Daten beruhend angesehen werden, da unter den Angaben der anderen vorgenannten Physiker so enorm hohe Wirkungsgrade vorkommen, dass die Unrichtigkeit der dabei zu Grunde gelegten Daten, nach den Kenntnissen, die wir heutzutage über die Leistungsfähigkeit der besten electromagnetischen Motoren besitzen, keinem Zweifel unterliegen kann. Auch ist W. Petrie der einzige, in dessen Mittheilungen ganz klar und ausdrücklich gesagt ist, dass

---

1) Jacobi hat sich damit nicht befasst, er sagt ja selbst hierüber: „Bei meinen zahlreichen Versuchen über die electromagnetischen Maschinen bin ich weit davon entfernt gewesen, die Menge von Zink, die aufgelöst werden muss, um eine Arbeitseinheit zu erzeugen, genauer oder auch nur annähernd bestimmen zu können und auch ernstlich zu wollen.“ Hierauf folgt eine Darlegung der Gründe, welche ihn davon abgehalten haben. (Krönig's Journ. **3.** p. 399. 1851).

er auf die Abhängigkeit der der Gewichtseinheit Zink entsprechenden theoretischen Arbeit von der Beschaffenheit der Kette, in welcher die Zinkconsumtion stattfindet, gehörige Rücksicht genommen hat, also der einzige, der das soeben ausgesprochene Princip für die Berechnung der Wirkungsgrade genau präcisirt hat.

Dieses Princip, nämlich das Arbeitsäquivalent der in der stromgebenden Batterie stattfindenden chemischen Processe als disponible Arbeit anzusehen, ist es allein, was ich, jedoch in einer ganz veränderten, der neueren Wissenschaft entsprechenden Formulirung, beibehalten habe. Hingegen war mein experimentelles Verfahren von den früheren Methoden ganz verschieden.

Fürs erste sind die in den Angaben der vorgenannten Physiker vorkommenden Arbeitsleistungen durch Hebung von Gewichten an der Maschine direct in Fusspfunden gemessen worden, während ich das Bremsdynamometer bei der Untersuchung electromagnetischer Motoren zuerst angewendet habe.

Zweitens wurde die Zinkconsumtion früher durchwegs direct durch Wägung der Zinkplatten vor und nach dem Versuche ermittelt, während ich anstatt dieses schwerfälligen und umständlichen Verfahrens die Strommessung mittelst der Tangentenbussole ausgeführt habe, um aus dem Producte des Arbeitsstromes mit der bekannten electromotorischen Kraft der Batterie die Stromarbeit in Meterkilogrammen pro Secunde zu berechnen und aus der Vergleichung der so ermittelten disponiblen Arbeit mit der mittelst des Bremsdynamometers gemessenen Arbeit den Wirkunsgrad der untersuchten electromagnetischen Maschine abzuleiten.

Die theoretische Begründung dieses Verfahrens, welche ich seinerzeit gegeben habe, folgt auch aus den Formeln, welche Clausius in einer Notiz über die Beziehung zwischen der chemischen Action in einer Volta'schen Säule und den durch den Strom hervorgebrachten Wirkungen mitgetheilt hat.[1]) Ist nämlich J der Batteriestrom bei eingeschaltetem,

1) Clausius, Mechan. Wärmetheorie, 2. p. 151.

aber stillstehendem Motor („Ruhestrom") und $J - i$ der Batteriestrom während der Bewegung des Motors („Arbeitsstrom"), also i der durch die Bewegung des Motors inducirte Gegenstrom, und bedeutet λ den Gesammtwiderstand des Stromkreises, so besteht die Gleichung:

$$J\lambda (J - i) = i\lambda (J - i) + (J - i)^2 \lambda.$$

In dieser Gleichung bedeutet der erste Ausdruck die von der Batterie zum Betriebe des Motors abgegebene Stromarbeit oder disponible Arbeit D, der zweite die in der Maschine geleistete mechanische Arbeit, aus Nutzarbeit N und Reibungsarbeit R bestehend, und der dritte die im Stromkreise als Wärme auftretende Stromarbeit W. Der Wirkungsgrad ist also $N : D$. Zur Ermittelung von D dient nun bei meinem Verfahren die Messung des Arbeitsstromes $J - i$ mittelst der Tangentenbussole, während $J\lambda$ die electromotorische Kraft im Stromkreise bei stillstehendem Motor, d. h. die bekannte electromotorische Kraft der Batterie ist.

Eine sehr einfache Ableitung der vorstehenden Formeln ergibt sich, wie ich gezeigt habe, aus der Betrachtung der Rotation eines Magnetpoles um einen Stromleiter.

VI. *Ueber die Zähigkeit von Salzlösungen; von Julius Wagner.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1—13).

In neuerer Zeit hat die Frage nach der Constitution der Lösungen eine hervorragende Bedeutung gewonnen; man hat deshalb die Eigenschaften der Lösungen in ausgedehntem Maasse studirt. Ein besonderes Interesse gewährt von diesen die Zähigkeit, theils wegen des Parallelismus, welcher zwischen ihr und dem Leitungsvermögen für den electrischen Strom zu bestehen scheint, dann aber auch wegen des starken Einflusses, den die Dissociation einer Lösung auf die Grösse der erwähnten Constanten ausübt.

Die bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand

beziehen sich zumeist auf organische Körper, so besonders die Arbeiten von Rellstab, sowie von Pribram und Handl; für anorganische Flüssigkeiten sind mit Ausnahme des Schwefelkohlenstoffs Bestimmungen der Zähigkeit kaum ausgeführt worden. Wohl ist dies der Fall für Salzlösungen; die von Sprung, Hübener, Slotte und anderen untersuchten Salze sind aber — mit Ausnahme des Zinksulfates — ausschliesslich Verbindungen der leichten Metalle.

Ich habe deshalb, auf Veranlassung der Herren Prof. G. und E. Wiedemann, die Zähigkeit für die Sulfate, Chloride und Nitrate der zweiwerthigen schweren Metalle bestimmt und daran die Untersuchung der Nitrate der alkalischen Erden angeschlossen.

Zur Ermittelung der Zähigkeit kann man sich zweier Methoden bedienen; man kann ihre Grösse berechnen aus der Abnahme der Amplitude einer horizontal schwingenden Scheibe, welche durch die Torsionskraft des Drahtes, an welchem sie in ihrem Mittelpunkte befestigt ist, in Schwingungen versetzt ist, oder auch aus der Zeit, während welcher ein gegebenes Volumen ein Capillarrohr von bekannten Dimensionen durchfliesst.

Ich habe mich der letzteren Methode, der Ausflussmethode bedient.

Für die Beziehung zwischen der Zähigkeit und den Dimensionen des Apparates hat Hr. Hagenbach[1]) folgenden Ausdruck entwickelt:

$$Z = \frac{\pi}{8\,W} \cdot t \cdot \frac{P\,.\,H\,.\,R^4}{L}.$$

Hierin bedeutet Z die Zähigkeit, t die beobachtete Zeit, H die Höhe der Flüssigkeitssäule, unter deren Druck der Ausfluss vor sich geht, P das Gewicht der Volumeneinheit der Druckflüssigkeit, W das ausgeflossene Flüssigkeitsvolumen, R und L den Radius, resp. die Länge des Capillarrohres.

Diese Formel gilt aber nur unter der nicht strengen Voraussetzung, dass der Ausfluss mit unendlich kleiner Geschwindigkeit vor sich geht. Da aber ein Theil der Druckhöhe H, den man dann als Geschwindigkeitshöhe H' be-

1) Hagenbach, Pogg. Ann. **109.** p. 385. 1856.

zeichnet, verwendet wird, um der Flüssigkeit eine Geschwindigkeit zu ertheilen, so bedarf der obige Ausdruck einer Correction. Dieselbe ist ebenfalls von Hrn. Hagenbach berechnet, man erhält dann für Z den Werth:

$$Z = \frac{\pi}{8W} t \frac{P.H.R^4}{L} - \frac{W.s.P}{2\frac{10}{3}\pi g L}\frac{1}{t},$$

die Grössen Z, W, P, H, R, L haben dieselbe Bedeutung wie in dem ersten Ausdruck, s ist das specifische Gewicht der Flüssigkeit, g die Beschleunigung durch die Schwerkraft.

Ehe ich meine Versuchsergebnisse mittheile, sei es mir gestattet, einige Worte über die Versuchsanordnung der Hrn. Pribram und Handl[1]) zu sagen und zu begründen, weshalb ich mich nicht ihres Apparates bedient habe.

Der Apparat, den dieselben zu ihren Beobachtungen benutzten, besteht aus einem horizontalen Capillarrohr, an welches sich in derselben Geraden beiderseitig weitere Röhren ansetzen. Die eine derselben ist durch Einschnürungen in drei Cylinder getheilt; für den Inhalt eines jeden derselben wird bei einem einzelnen Versuche die Ausflusszeit bestimmt. Nach drei Versuchen wird die Flüssigkeit durch das Capillarrohr in umgekehrter Richtung gepresst; eine geeignete Anordnung gestattet die Umkehr der Druckrichtung.

Diese Möglichkeit der Rückführung hat nach ihren Urhebern den Vorzug, dass, wenn die Röhre einmal gefüllt ist, Unreinigkeiten nicht mehr in dieselbe gelangen können. Da aber die Einbringung von Staubtheilchen kaum ganz zu vermeiden ist, so erscheint dieser Vorzug eher als ein Nachtheil. Entweder beeinflussen die Theilchen alle Versuche, oder sie werden bei einer Zurückführung der Flüssigkeit entfernt und üben dann einen Einfluss nur bei einigen Versuchen aus, ein Umstand, der die Genauigkeit der Resultate sehr beeinflussen kann.

Ein weiterer Uebelstand des Apparates von Pribram und Handl ist in der cylindrischen Form des die Flüssigkeit aufnehmenden Theiles bedingt. Bei gleichem Inhalte ist die Oberfläche einer Kugel kleiner als die eines Cylinders, an der Wandung des cylindrischen Gefässes bleibt also eine

1) Pribram u. Handl, Wien. Ber. 78. II. 1878.

grössere Flüssigkeitsmenge haften, und dadurch vermindert sich die Ausflusszeit in höherem Grade, als wenn man eine Kugel anwendet.

Meine Versuche sind mit dem von Hrn. G. Wiedemann[1]) angegebenen und von Hrn. Sprung[2]) modificirten Apparate ausgeführt; ich verweise deshalb, sowie wegen der Details der Untersuchung auf die Abhandlungen von Sprung[2]) und Slotte[3]) und führe nur zwei kleine Modificationen an. Es wurde nämlich das Capillarrohr mit den anderen Theilen des Apparates starr verbunden und in die Ausflussöffnung ein Stopfen eingeschliffen. Letzterer gab eine weitere Gewähr gegen das Eindringen von Staubtheilchen und verhinderte ausserdem das Zurückfliessen durch das Capillarrohr in der Zeit zwischen zwei Versuchen, wodurch sonst Unreinigkeiten demselben zugeführt wurden.

Die Dimensionen meines Apparates waren die folgenden:

$$L = 31{,}955 \text{ cm}, \qquad H = 164{,}5 \text{ cm},$$
$$R = 0{,}030\,166 \text{ cm}, \qquad g = 980{,}9 \text{ cm},$$
$$W = 28{,}207 \text{ ccm}, \qquad P = 1\,000\,000 \text{ g}.$$

Sämmtliche Salze wurden, wenn sie käuflich rein zu erhalten waren, und ihre Reinheit bei einer qualitativen Analyse sich bestätigte nach einmaligem Umkrystallisiren verwendet. Im anderen Falle — und dies war die Regel — wurden reine kohlensaure Salze dargestellt und dieselben in reiner Säure unter Verhütung und Entfernung eines jeden Ueberschusses der letzteren aufgelöst. Nur die Kobaltsalze wurden etwas nickelhaltig verwendet; die geringe Menge Nickel konnte auf die Versuche nicht von grossem Einflusse sein.

Der Procentgehalt wurde durch quantitative Analysen bestimmt; es wird bei jedem Salze die eingeschlagene Methode angegeben werden.

Das spec. Gewicht der Lösungen wurde bei Zimmertemperatur — es genügte dies für die Anbringung der betreffenden Correctionen — bestimmt, und zwar mittelst

1) Wiedemann, Pogg. Ann. **99.** p. 221. 1856.
2) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.
3) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.

eines Pyknometers nach Sprengel in der ihm von Geissler gegebenen Modification; der kleine Apparat erwies sich als äusserst geeignet zur schnellen und sicheren Ermittelung der Dichte.

Meine Versuchsergebnisse sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. In der ersten Columne findet sich die Versuchstemperatur T, t bedeutet die beobachtete, t' die der Zähigkeit proportionale „corrigirte" Ausflusszeit, d. h. diejenige Zeit, in welcher der Ausfluss mit unendlich kleiner Geschwindigkeit vor sich gehen würde. Z ist die specifische Zähigkeit, also die absolute dividirt durch die Zähigkeit des Wassers bei 0°.

Die Tabellen I und II sollen einen Maassstab abgeben für die Beurtheilung der erlangten Genauigkeit. Tabelle I enthält die Beobachtungen für Wasser, Tabelle II eine Zusammenstellung der von mir für diese Flüssigkeit gefundenen Werthe mit den von anderen Beobachtern herrührenden.

Tabelle I.

T	Die einzelnen Beobachtungen t				das Mittel t	t'	z
15°	200,0	201,0	201,5	201,5	201,0	199,1	63,9
20	186,5	187,0	186,5	186,0	186,5	175,3	56,2
25	158,3	159,5	159,9	158,6	159,1	156,7	50,3
30	140,6	142,5	142,5	141,3	141,7	138,9	44,6
35	127,3	129,5	128,5	129,7	128,7	125,7	40,3
40	117,5	118,0	119,0	117,0	117,8	114,2	36,7
45	111,0	111,0	112,5	110,7	111,3	107,9	34,5
50	103,0	103,0	102,5	103,3	102,9	99,0	31,7

Tabelle II.

	Specifische Zähigkeit nach					
T	Poiseuille	Graham I	Graham II	Rellstab	Sprung	Wagner
0°	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
5	85,2	84,4	84,8	85,3	84,9	—
10	73,5	73,6	72,9	73,5	73,2	—
15	64,3	63,5	63,7	63,0	63,9	63,9
20	56,7	56,0	56,0	55,5	56,2	56,2
25	—	49,5	50,5	48,7	50,5	50,3
30	45,2	44,7	45,0	45,0	45,2	44,6
35	—	40,2	41,1	40,0	40,8	40,3
40	37,0	36,8	37,0	37,2	37,0	36,7
45	—	33,9	33,9	34,5	34,0	34,5
50	30,8	31,1	31,0	31,2	31,3	31,7

Bariumnitrat.

5,24 % $Ba(NO_3)_2$ s = 1,0507.

T	t	t'	z
15°	211,1	208,9	68,06
25	169,2	166,5	54,24
35	138,8	135,5	44,14
45	114,7	110,6	36,86

2,98 % $Ba(NO_3)_2$ s = 1,0274.

T	t	t'	z
15°	192,7	190,4	62,01
25	159,8	157,0	51,14
35	133,5	130,1	42,37
45	110,9	106,9	34,82

In der Lösung wurde das Barium als Bariumsulfat bestimmt.

Salzsäure.

23,045 % HCl s = 1,1138.

T	t	t'	z
15°	283,9	282,2	91,84
25	238,3	236,5	76,92
35	204,8	202,4	65,92
45	176,2	173,4	56,37

16,125 % HCl s = 1,0843.

T	t	t'	z
15°	247,5	245,6	79,98
25	206,7	204,4	66,54
35	176,0	173,3	56,37
45	151,0	147,9	48,09

8,14 % HCl s = 1,0370.

T	t	t'	z
15°	220,0	218,0	70,97
25	180,5	178,0	57,94
35	151,3	148,3	48,31
45	126,9	123,3	40,10

Die Bestimmung des Procentgehaltes geschah mit titrirter Natronlauge.

Salpetersäure.

28,31 % HNO_3 s = 1,1785.

T	t	t'	z
15°	248,9	246,8	80,35
25	203,7	201,2	65,47
35	171,8	168,8	54,95
45	145,5	142,0	46,25

18,20 % HNO_3 s = 1,1164.

T	t	t'	z
15°	215,7	213,5	69,55
25	178,6	175,9	57,29
35	150,4	147,2	47,95
45	128,7	124,9	40,68

8,37 % HNO_3 s = 1,0672.

T	t	t'	z
15°	209,3	206,9	66,41
25	167,3	164,5	54,83
35	142,6	139,3	45,38
45	119,3	115,4	37,59

Der Procentgehalt wurde mittelst titrirter Natronlauge festgestellt.

Cuprisulfat.

17,49 % $CuSO_4$ $s = 1{,}1635$.

T	t	t'	z
15°	383,8	382,5	124,52
25	299,3	297,6	96,85
35	235,5	233,3	75,88
45	192,3	189,7	61,80

12,57 % $CuSO_4$ $s = 1{,}1151$.

T	t	t'	z
15°	303,4	301,8	98,18
25	229,6	227,5	73,98
35	186,1	183,4	59,74
45	162,6	159,6	52,00

6,79 % $CuSO_4$ $s = 1{,}055$.

T	t	t'	z
15°	246,6	244,7	79,63
25	192,3	189,9	61,81
35	156,0	153,1	49,78
45	130,6	127,1	41,40

Das Kupfer wurde mit Natronlauge gefällt und als Oxyd gewogen.

Schwefelsäure.

23,429 % H_2SO_4 $s = 1{,}2003$.

T	t	t'	z
15°	378,5	377,1	122,71
25	295,1	293,3	95,50
35	240,4	238,2	77,47
45	200,0	197,4	64,27

15,503 % H_2SO_4 $s = 1{,}1305$.

T	t	t'	z
15°	293,8	292,1	95,07
25	232,3	230,2	74,99
35	188,4	185,8	60,53
45	156,0	152,9	49,77

7,875 % H_2SO_4 $s = 1{,}0651$.

T	t	t'	z
15°	241,0	239,1	77,81
25	189,7	187,3	60,96
35	156,7	153,7	50,01
45	131,5	128,0	41,69

Die Bestimmung der Schwefelsäure geschah mit titrirter Natronlauge.

Cadmiumnitrat.

22,36 % $Cd(NO_3)_2$ $s = 1{,}2411$.

T	t	t'	z
15°	263,6	261,6	85,11
25	214,8	212,3	69,03
35	179,1	176,1	57,29
45	149,6	146,0	47,53

15,71 % $Cd(NO_3)_2$ $s = 1{,}1593$.

T	t	t'	z
15°	222,8	220,3	71,80
25	183,2	180,5	58,75
35	153,1	149,8	48,76
45	130,9	127,0	41,31

7,81 % $Cd(NO_3)_2$ s = 1,0744.

T	t	t'	z
15°	192,8	190,4	61,95
25	157,0	154,0	50,13
35	130,0	126,4	41,12
45	108,9	104,6	34,04

Die Lösung wurde abgedampft, der Rückstand geglüht und dann als Oxyd gewogen.

Quecksilberchlorid.

3,55 % $HgCl_2$ s = 1,0328.

T	t	t'	z
10°	237,7	235,8	76,75
20	184,1	181,7	59,16
30	146,2	143,2	46,57
40	121,3	117,6	38,29

0,226 % $HgCl_2$ s = 1,0233.

T	t	t'	z
20°	182,1	179,7	58,49
30	146,9	143,9	46,78
40	121,3	117,6	38,29

Die Bestimmung des Procentgehaltes geschah durch Abdampfen und Trocknen bei 100°.

Strontiumnitrat.

32,61 % $Sr(NO_3)_2$ s = 1,3067.

T	t	t'	z
15°	360,6	359,0	116,90
25	288,5	286,5	93,33
35	232,8	230,4	76,75
45	194,1	191,2	62,33

21,19 % $Sr(NO_3)_2$ s = 1,1240.

T	t	t'	z
15°	269,9	268,1	87,30
25	214,8	212,5	69,18
35	180,3	177,6	57,82
45	151,0	147,8	48,08

10,29 % $Sr(NO_3)_2$ s = 1,0885.

T	t	t'	z
15°	215,3	213,1	69,35
25	174,6	171,9	55,98
35	144,5	141,2	45,93
45	123,9	120,1	39,08

Die Concentration wurde durch Abdunsten und Trocknen bei 100° ermittelt.

Cadmiumchlorid.

24,786 % $CdCl_2$ s = 1,3199.

T	t	t'	z
15°	321,5	319,7	104,02
25	248,9	246,6	80,37
35	201,4	198,5	64,58
45	164,4	160,9	53,58

16,30 % $CdCl_2$ s = 1,1813.

T	t	t'	z
15°	275,4	273,5	88,94
25	218,8	216,4	70,47
35	179,9	176,9	57,55
45	148,3	144,8	47,21

11,09 % $CdCl_2$ $s = 1,1093$.

T	t	t'	z
15°	239,9	237,9	77,46
25	188,4	185,9	60,53
35	153,8	150,9	49,10
45	128,8	125,1	40,73

Es wurde das Chlor als Chlorsilber bestimmt.

Cobaltchlorid.

22,270 % $CoCl_2$ $s = 1,2645$.

T	t	t'	z
15°	497,3	496,2	161,60
25	390,0	388,6	126,60
35	313,9	312,1	101,60
45	255,7	253,5	82,58

14,858 % $CoCl_2$ $s = 1,1613$.

T	t	t'	z
15°	344,1	342,6	111,60
25	263,2	261,1	85,11
35	228,4	226,2	73,69
45	183,2	180,4	58,76

7,970 % $CoCl_2$ $s = 1,0807$.

T	t	t'	z
15°	256,6	254,8	83,01
25	202,0	199,7	65,07
35	167,3	164,5	53,58
45	141,0	137,7	44,86

Das Chlor wurde als Chlorsilber bestimmt.

Bleinitrat.

32,22 % $Pb(NO_3)_2$ $s = 1,3619$.

T	t	t'	z
15°	284,1	282,0	91,85
25	225,1	222,5	72,49
35	186,1	182,9	59,60
45	158,9	155,2	50,56

17,93 % $Pb(NO_3)_2$ $s = 1,1786$.

T	t	t'	z
15°	229,4	227,2	74,04
25	184,3	181,5	59,13
35	152,3	148,9	48,52
45	127,3	123,8	40,33

Die Lösung wurde verdunstet, der Rückstand geglüht und als Oxyd gewogen.

Zinkchlorid.

33,752 % $ZnCl_2$ $s = 1,3431$.

T	t	t'	z
15°	466,7	465,4	151,70
25	363,4	361,8	117,90
35	278,3	276,2	89,97
45	225,6	223,0	72,64

23,487 % $ZnCl_2$ $s = 1,2288$.

T	t	t'	z
15°	344,1	342,5	111,50
25	267,9	265,9	86,62
35	216,6	214,2	69,77
45	179,5	176,5	57,49

15,334 % $ZnCl_2$ $s = 1,1459$.

T	t	t'	z
15°	289,0	287,3	93,61
25	225,6	223,4	72,74
35	181,3	178,5	57,82
45	151,3	148,0	48,21

Es wurde das Chlor als Chlorsilber bestimmt.

Cobaltnitrat.

24,528 % $Co(NO_3)_2$ $s = 1,2288$.

T	t	t'	z
15°	340,4	338,3	110,40
25	272,1	270,2	88,02
35	221,8	219,4	71,47
45	185,2	182,3	59,06

15,960 % $Co(NO_3)_2$ $s = 1,1436$.

T	t	t'	z
15°	268,8	266,9	86,96
23	214,8	212,5	69,21
35	173,1	170,0	55,38
45	141,5	138,0	44,95

8,280 % $Co(NO_3)_2$ $s = 1,0732$.

T	t	t'	z
15°	231,2	229,2	74,66
25	180,5	177,9	57,95
35	152,7	149,6	48,74
45	126,0	122,3	39,84

Die Lösung wurde verdampft, der Rückstand im Wasserstoffstrome geglüht und als Metall gewogen.

Cadmiumsulfat.

22,011 % $CdSO_4$ $s = 1,2681$.

T	t	t'	z
15°	372,5	371,0	120,81
25	284,4	282,5	91,85
35	228,0	225,6	73,46
45	187,9	184,9	60,13

14,660 % $CdSO_4$ $s = 1,1591$.

T	t	t'	z
15°	297,2	295,5	96,17
25	224,4	222,2	72,36
35	181,1	178,3	58,08
45	153,1	149,8	48,78

7,140 % $CdSO_4$ $s = 1,0681$.

T	t	t'	z
15°	244,3	242,4	78,90
25	192,3	189,9	61,81
35	156,3	153,3	49,90
45	130,6	127,0	41,31

Die Schwefelsäure wurde als Bariumsulfat gewogen.

Cobaltsulfat.

21,167 % $CoSO_4$ $s = 1,2398$.

T	t	t'	z
15°	595,7	594,8	193,60
25	450,8	449,6	146,20
35	348,3	346,8	113,00
45	278,0	276,1	89,95

14,156 % $CoSO_4$ $s = 1,1591$.

T	t	t'	z
15°	363,2	361,8	117,81
25	295,1	293,4	95,51
35	235,5	233,4	76,03
45	191,9	189,3	61,66

7,239 % $CoSO_4$ $s = 1,0860$.

T	t	t'	z
15°	268,5	266,7	86,72
25	213,3	211,1	68,72
35	171,8	169,0	54,96
45	141,9	138,5	45,08

Die Lösungen wurden mit Natronlauge gefällt, der Niederschlag im Wasserstoffstrome in Metall übergeführt.

Nickelnitrat.

40,953 % $Ni(NO_3)_2$ $s = 1,3879$.

T	t	t'	z
15°	684,2	683,3	222,60
25	522,6	521,4	169,70
35	395,2	393,7	128,20
45	334,6	332,6	108,30

30,006 % $Ni(NO_3)_2$ $s = 1,2776$.

T	t	t'	z
15°	417,8	416,5	135,60
25	326,9	325,2	105,90
35	264,6	262,5	85,51
45	219,5	217,0	70,69

16,493 % $Ni(NO_3)_2$ $s = 1,1363$.

T	t	t'	z
15°	273,9	272,1	90,72
25	217,6	215,3	70,13
35	179,1	176,3	57,42
45	153,2	150,0	48,87

Nach dem Verdunsten der Lösungen wurde der Rückstand im Wasserstoffstrome in Metall übergeführt.

Nickelchlorid.

30,400 % $NiCl_2$ $s = 1,3371$.

T	t	t'	z
15°	705,3	704,5	229,50
25	528,6	527,5	171,80
35	428,6	427,2	139,20
45	345,4	343,7	111,94

22,690 % $NiCl_2$ $s = 1,2264$.

T	t	t'	z
15°	431,4	430,2	140,20
25	338,4	336,8	109,70
35	271,6	269,6	87,84
45	225,6	223,2	72,71

11,449 % $NiCl_2$ $s = 1,1093$.

T	t	t'	z
15°	279,2	277,5	90,40
25	217,2	215,0	70,03
35	179,1	176,4	57,46
45	151,3	148,1	48,25

Die Bestimmung des Chlors geschah als Chlorsilber.

Zinknitrat.

44,500 % $Zn(NO_3)_2$ $s = 1,4367$.

T	t	t'	z
15°	516,5	515,3	167,90
25	402,8	401,3	130,60
35	325,8	323,9	105,40
45	272,3	270,0	87,91

30,626 % $Zn(NO_3)_2$ $s = 1,2291$.

T	t	t'	z
15°	323,7	322,1	104,72
25	265,6	263,6	85,72
35	216,3	213,8	69,52
45	180,3	177,3	57,69

15,955 % $Zn(NO_3)_2$ $s = 1,1155$.

T	t	t'	z
15°	250,0	248,1	80,73
25	200,0	197,6	64,28
35	164,4	161,5	52,60
45	138,0	134,5	43,76

Die Lösungen wurden abgedampft und dann der Rückstand durch Glühen in Oxyd übergeführt.

Calciumnitrat.

40,13 % $Ca(NO_3)_2$ $s = 1,3857$.

T	t	t'	z
15°	745,4	744,6	242,60
25	667,4	666,5	217,10
35	481,7	480,4	156,50
45	394,8	393,3	128,10

30,10 % $Ca(NO_3)_2$ $s = 1,2739$.

T	t	t'	z
15°	443,6	442,3	144,10
25	347,4	345,7	112,70
35	280,5	278,5	90,72
45	233,1	230,7	75,15

17,55 % $Ca(NO_3)_2$ $s = 1,1714$.

T	t	t'	z
15°	289,6	287,8	93,76
25	231,2	229,0	74,59
35	187,1	184,4	60,04
45	156,5	153,2	49,91

Durch Abdampfen und Glühen wurde das Calcium als Oxyd bestimmt.

Mangansulfat.

22,08 % $MnSO_4$ s = 1,3082.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	2065,0	206,0	661,80
25	1482,0	147,0	474,30
35	1089,0	108,0	347,90
45	832,2	831,4	266,80

18,80 % $MnSO_4$ s = 1,2513.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	703,3	702,5	228,63
25	529,8	528,8	172,21
35	413,0	411,7	137,11
45	332,0	330,4	107,42

11,45 % $MnSO_4$ s = 1,1469.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	399,1	397,8	129,42
25	304,8	303,0	98,64
35	242,7	240,6	78,34
45	197,2	194,7	63,39

Die Bestimmung der Schwefelsäure geschah als Bariumsulfat.

Zinksulfat.

23,09 % $ZnSO_4$ s = 1,2814.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	716,3	715,5	232,82
25	545,9	544,9	177,41
35	417,0	415,7	135,23
45	334,2	332,5	108,11

16,64 % $ZnSO_4$ s = 1,1953.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	480,9	479,8	156,03
25	365,6	364,2	118,61
35	291,1	289,3	94,20
45	228,0	225,7	73,46

7,12 % $ZnSO_4$ s = 1,1064.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	299,9	298,3	97,06
25	230,1	228,0	79,26
35	195,0	192,5	62,66
45	161,4	158,4	51,53

Das Zink wurde durch Fällen mit Natriumcarbonat und Glühen des Niederschlags als Oxyd bestimmt.

Mangannitrat.

49,309 % $Mn(NO_3)_2$ s = 1,5056.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	1219,0	1218,5	396,85
25	924,9	924,2	301,10
35	679,4	678,5	221,00
45	580,8	579,7	188,80

29,602 % $Mn(NO_3)_2$ s = 1,3227.

T	*t*	*t'*	*z*
15°	515,3	514,2	167,50
25	388,4	386,9	126,00
35	322,9	321,1	104,60
45	274,2	272,1	88,65

18,309 % $Mn(NO_3)_2$ $s = 1,1482$

T	t	t'	z
15°	296,3	294,6	95,96
25	236,6	234,5	76,38
35	200,4	197,9	64,48
45	173,0	170,1	55,60

Die Bestimmung des Mangans geschah durch Abdampfen und Glühen als Oxyduloxyd.

Nickelsulfat.

25,35 % $NiSO_4$ $s = 1,3137$

T	t	t'	z
15°	918,5	917,9	298,55
25	692,0	691,2	224,93
35	532,2	531,1	173,00
45	470,0	468,8	152,43

18,19 % $NiSO_4$ $s = 1,1977$

T	t	t'	z
15°	477,5	476,4	154,93
25	369,9	368,5	119,91
35	295,1	293,3	99,50
45	235,0	232,8	75,70

10,62 % $NiSO_4$ $s = 1,0925$.

T	t	t'	z
15°	292,5	290,9	94,63
25	228,0	225,9	73,46
35	187,1	184,6	60,12
45	156,0	153,0	49,78

Die Lösungen wurden mit Natriumcarbonat gefällt, der Niederschlag wurde durch Glühen im Wasserstoffstrome in in Metall übergeführt.

Cuprinitrat.

46,71 % $Cu(NO_3)_2$ $s = 1,5363$.

T	t	t'	z
15°	1178,1	1177,5	382,88
25	873,2	872,2	283,83
35	662,3	661,3	215,31
45	529,8	528,5	172,24

26,68 % $Cu(NO_3)_2$ $s = 1,2637$.

T	t	t'	z
15°	389,1	387,7	126,21
25	300,6	298,8	98,83
35	250,6	248,4	80,91
45	213,3	210,7	68,56

18,99 % $Cu(NO_3)_2$ $s = 1,1774$.

T	t	t'	z
15°	300,6	298,9	97,28
25	236,0	233,8	76,04
35	191,9	189,2	61,53
45	160,7	157,5	51,29

Die Lösungen wurden verdunstet, der Rückstand geglüht und als Oxyd gewogen.

Magnesiumnitrat.

39,77 % $Mg(NO_3)_2$ $s = 1,4298$.

T	t	t'	z
15°	975,1	974,5	317,05
25	734,6	733,8	250,05
35	588,8	587,7	191,40
45	487,6	486,3	158,13

34,19 % $Mg(NO_3)_2$ $s = 1,2000$.

T	t	t'	z
15°	656,2	655,4	213,32
25	505,9	504,9	164,40
35	407,5	406,2	132,42
45	338,9	337,2	109,90

18,62 % $Mg(NO_3)_2$ $s = 1,1025$.

T	t	t'	z
15°	308,4	306,8	99,79
25	251,8	249,9	81,29
35	206,5	204,2	66,53
45	175,4	172,7	56,23

Die Bestimmung des Magnesiums geschah durch Abdampfen und Glühen als Oxyd.

Manganchlorid.

40,132 % $MnCl_2$ $s = 1,4530$.

T	t	t'	z
15°	1649,0	1648,7	537,30
25	1208,0	1207,5	393,40
35	923,0	922,3	300,40
45	757,5	756,7	246,50

30,33 % $MnCl_2$ $s = 1,3372$.

T	t	t'	z
15°	787,5	786,8	256,30
25	594,0	593,0	193,20
35	476,9	475,7	155,00
45	381,3	379,8	123,70

15,650 % $MnCl_2$ $s = 1,1963$.

T	t	t'	z
15°	403,3	402,0	130,90
25	321,5	319,9	104,20
35	259,9	257,9	84,01
45	213,3	210,9	68,69

8,007 % $MnCl_2$ $s = 1,0960$.

T	t	t'	z
15°	286,6	284,9	92,81
25	220,5	218,3	71,12
35	179,1	176,4	57,46
45	150,9	147,7	48,11

Es wurde das Chlor als Chlorsilber bestimmt.

Cuprichlorid.

33,027 % $CuCl_2$ $s = 1,3312$.

T	t	t'	z	T	t	t'	z
10°	643,0	642,1	209,10	35°	332,3	330,4	107,60
15	548,9	547,8	178,40	45	269,4	267,2	87,08
20	469,0	467,8	152,40	35	331,8	330,1	107,50
25	423,0	421,6	137,40	25	422,0	420,6	137,00

21,349 % $CuCl_2$ $s = 1,2154$.

T	t	t'	z	T	t	t'	z
10°	424,8	423,8	138,00	20°	333,6	332,0	108,10
15	361,8	360,3	117,40	15	383,5	382,1	124,50
20	311,1	309,4	100,80	10	435,7	434,5	141,60
25	296,1	294,2	95,85	10	433,3	432,1	140,80
35	238,7	236,5	77,03	15	377,9	376,5	122,70
45	196,9	194,2	63,25	20	328,0	326,7	106,40
35	238,7	236,5	77,03	25	296,1	294,3	95,85
25	296,1	294,3	95,85				

12,006 % $CuCl_2$ $s = 1,1037$.

T	t	t'	z	T	t	t'	z
10°	305,5	303,9	98,99	30°	189,9	187,4	61,02
15	269,4	267,6	87,18	35	172,0	169,2	55,12
20	239,2	237,2	77,27	40	156,1	153,0	49,83
25	210,5	208,2	67,82	45	143,3	139,9	45,58

Die Lösungen wurden mit Kalilauge gefällt und das erhaltene Kupferoxyd gewogen.

Beziehungen zwischen Temperatur und Zähigkeit.

Gerstner[1]) fand zuerst eine Abnahme der inneren Flüssigkeitsreibung mit zunehmender Temperatur, ohne jedoch die Beziehungen zwischen diesen beiden Grössen näher festzustellen.

Auch den späteren Beobachtern dieses Gegenstandes ist es nicht gelungen, allgemeingültige Gesetze zu entwickeln, sie mussten sich damit begnügen, empirischen Regelmässigkeiten Ausdruck zu verleihen, und zwar haben Poiseuille[2]) und Slotte[3]) Interpolationsformeln aufgestellt, während Rellstab[4]) die Abnahme der Zähigkeit mit der Temperatur überhaupt, Sprung[5]) die Abnahme bei Lösungen im Vergleich mit der beim Wasser discutirte.

Ich habe zunächst die erhaltenen Resultate an meinen Beobachtungen geprüft und zum Theil ergänzt. Es hat sich dabei Folgendes ergeben.

1) Gerstner, Gilb. Ann. **5.** p. 160. 1798.
2) Poiseuille, Mém. prés. à l'inst. **9.** p. 433. 1846.
3) Slotte Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.
4) Rellstab, Inaug.-Dissert. Bonn 1868.
5) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.

I. **Poiseuille** hat gezeigt, dass eine Potenzreihe von der Form:

$$Z_t = Z_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 \dots)$$

mit nur drei Gliedern genügt, um die Aenderung der Zähigkeit für das Wasser zwischen 0 und 100° auszudrücken.

Für mehrere Salze habe ich die Coëfficienten α und β der obigen Formel:

$$Z_t = Z_{15} (1 + \alpha t + \beta t^2)$$

aus den Werthen Z_{15}, Z_{25} und Z_{35} bestimmt und mit Hülfe dieser Gleichung den Werth: Z_{45} berechnet. Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der berechneten und gefundenen Werthe:

Salzlösung	α	β	Beobacht. Werth	Berechnet. von Z_{45}
III Kobaltchlorid	0,02553	0,000 155 5	44,86	43,55
I Cobaltsulfat	0,02814	0,000 366 2	89,95	90,00
I Kupfernitrat	0,02993	0,000 408 5	172,24	169,52

Die Uebereinstimmung der Werthe von Z_{45}, wie sie aus der Rechnung, resp. Erfahrung sich ergeben, ist keineswegs eine vollständige. Man würde für Salzlösungen demnach wenigstens vier Glieder der Reihe anwenden und also etwa setzen müssen:

$$Z_t = Z_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3).$$

II. Eine andere Interpolationsformel hat Hr. **Slotte**[1]) aufgestellt von der Form:

$$Z = \frac{C}{a + t} - b,$$

wo a, b, c Constanten sind, Z die Zähigkeit und t die Temperatur bedeutet.

Für Wasser und auch für andere homogene Flüssigkeiten schliesst sich nach Hrn. **Slotte** obige Formel den Versuchen an.

Ich habe nach derselben, um zu untersuchen, ob sie auch noch für Salzlösungen ihre Gültigkeit behält, für einige Salze aus den Werthen der Zähigkeit bei 15, 25 und 35° den Werth derjenigen bei 45° berechnet.

1) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.

In der folgenden Tabelle finden sich die Zahlen, wie sie sich aus der Rechnung und aus der Erfahrung ergeben; um die Vergleichung möglichst allgemein zu machen, sind die Salze — Nickelsulfat, Cadmiumchlorid, Strontiumnitrat — gewählt worden, die verschiedene Säuren enthalten, deren Metalle verschiedenen Gruppen angehören, und bei denen die Zähigkeit ihrer Lösungen in ziemlich weiten Grenzen schwankt.

Salzlösung		Beob. Werth	Berech. von Z_{45}	Salzlösung		Beob. Werth	Berech. von Z_{45}
Cadmiumchlorid	I	53,58	53,31	Nickelsulfat	III	49,78	50,94
„	II	47,21	48,10	Strontiumnitrat	I	62,33	64,46
„	III	40,74	40,86	„	II	48,08	50,04
Nickelsulfat	I	152,45	139,22	„	III	39,08	38,10
„	II	75,70	86,23				

Es findet also, wie zu erwarten stand, für wenig zähe Flüssigkeiten eine leidliche Uebereinstimmung statt, bei zähen Lösungen aber zeigen sich starke Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen, bei letzteren ist die Grösse der Abweichung mehr als zwei Procent, d. h. grösser als der wahrscheinliche Versuchsfehler, welcher nach den Beobachtungsreihen auf p. 263 im Maximum 1,5 Procent beträgt.

Demnach darf die Slotte'sche Formel für Salzlösungen nicht angewendet werden.

III. Aus seinen Versuchen mit organischen Körpern hat Hr. Rellstab[1]) folgenden Satz abgeleitet.

Die Transpiration aller Körper nimmt mit der Temperatur zu. Die Zunahme ist für gleiche Intervalle um so grösser, je bedeutender die Ausflusszeit überhaupt ist und je niedriger die Temperatur.

Darauf, dass es unstatthaft ist, eine solche einfache Relation aufzustellen zwischen der Grösse der Zähigkeit und der Grösse ihrer Zunahme, haben bereits Pribram und Handl aufmerksam gemacht und ihren Einwurf begründet durch den Hinweis auf das in einzelnen Fällen ein-

1) Rellstab, Inaug.-Dissert. Bonn 1868.

tretende Schneiden der die Abhängigkeit von Zähigkeit und Temperatur ausdrückenden Curven, selbst für nahestehende Flüssigkeiten, z. B. für Ameisensäure und Buttersäure.

Da bei Salzlösungen ebenfalls ein Schneiden der Curven vorkommt, so gilt auch für diese das von Pribram und Handl Gesagte.

Ich habe, um die Abnahme der Zähigkeit, wie sie verschiedene Flüssigkeiten mit der Temperatur erleiden, ihrer Grösse nach vergleichen zu können, folgendes Verfahren eingeschlagen.

Bezeichnen Z_t und $Z_{t'}$, die Zähigkeiten einer Lösung bei den Temperaturen t und t', so besteht die Gleichung:

$$Z_{t'} = Z_t [1 - \alpha (t' - t)],$$

wenn α die procentische Abnahme der Zähigkeit während des Temperaturintervalls $t' - t$ bedeutet. Für dieses Intervall gibt α ein Maass der Abnahme, ein Maass also für den Einfluss der Temperatur.

Eine Vergleichung der Werthe von α für verschiedene Flüssigkeiten zeigt, ob eine Relation besteht zwischen jener Abnahme und anderen Eigenschaften der Lösung: der Zähigkeit derselben, ihrem spec. Gewichte etc., eine Vergleichung aber der Werthe von α für gleich grosse, indessen verschiedengelegene Temperaturintervalle zeigt, ob und in welchem Sinne die Abnahme der Zähigkeit beeinflusst ist von dem Intervalle selbst. In den folgenden Tabellen finden sich deshalb für die von mir untersuchten Lösungen die Werthe von $10\,\alpha$, also der Zunahme für je 10^0, und zwar für die Intervalle $15-25^0$, $25-35^0$ und $35-45^0$, entsprechend den drei Gleichungen:

(1) $$Z_{25} = Z_{15} (1 - 10\,\alpha_1),$$

(2) $$Z_{35} = Z_{25} (1 - 10\,\alpha_2),$$

(3) $$Z_{45} = Z_{35} (1 - 10\,\alpha_3).$$

Die Lösungen sind innerhalb der Gruppen — Sulfate, Chloride, Nitrate — nach steigendem Werthe von α_1 geordnet; s sind die spec. Gewichte, Z_{15} die spec. Zähigkeiten bei 15^0.

Nitrate.

	Z_{15}	s	α_1	α_2	α_3
Cu I	382,88	1,5363	0,7408	0,5615	0,4493
Mn II	167,50	1,3227	0,7525	0,6243	0,5290
Mg I	317,05	1,4298	0,7548	0,6027	0,4991
Mn I	396,85	1,5056	0,7588	0,5567	0,4757
Ni I	222,60	1,3879	0,7670	0,5761	0,4865
Mg II	213,32	1,2000	0,7703	0,6195	0,5146
Cu II	126,21	1,2621	0,7709	0,6406	0,5433
Co III	74,66	1,0732	0,7762	0,6527	0,5337
Zn I	167,90	1,4367	0,7787	0,6281	0,5241
Ni II	135,60	1,2776	0,7812	0,6285	0,5212
Ca II	144,10	1,2739	0,7818	0,6296	0,5217
Cu III	97,28	1,1774	0,7823	0,6232	0,5267
Pb I	91,85	1,3619	0,7893	0,6485	0,5504
Ni III	90,72	1,1363	0,7911	0,6477	0,5513
Sr II	87,30	1,1240	0,7923	0,6622	0,5517
Mn III	95,96	1,1482	0,7949	0,6719	0,5775
Ca III	93,76	1,1714	0,7956	0,6406	0,5325
Co II	86,96	1,1436	0,7962	0,6369	0,5168
Zn III	80,73	1,1155	0,7962	0,6506	0,5420
Ba I	68,06	1,0567	0,7969	0,6485	0,5293
Sr I	116,90	1,3067	0,7982	0,6415	0,5325
Co I	110,40	1,2288	0,7987	0,6485	0,5388
Pb II	74,04	1,1786	0,7995	0,6558	0,5449
Sr III	69,35	1,0885	0,8065	0,6622	0,5636
Mg III	99,79	1,1025	0,8151	0,6655	0,5630
H I	80,35	1,1785	0,8151	0,6639	0,5754
Zn II	104,72	1,2291	0,8183	0,6636	0,5571
H II	69,50	1,1164	0,8237	0,6892	0,5883
Ba II	62,01	1,0274	0,8245	0,6829	0,5615

Chloride.

	Z_{15}	s	α_1	α_2	α_3
Mn I	537,30	1,4530	0,7326	0,5593	0,4586
Ni I	229,50	1,3371	0,7491	0,6064	0,5189
Mn II	256,30	1,3372	0,7541	0,6045	0,4826
Co II	111,60	1,1160	0,7623	0,6597	0,5374
Mn IV	92,81	1,0960	0,7665	0,6195	0,5184
Cd I	104,02	1,3199	0,7727	0,6212	0,5152
Ni III	90,40	1,1093	0,7764	0,6357	0,5333
Zn III	93,61	1,1459	0,7769	0,6177	0,5150

Chloride.

	Z_{15}	s	α_1	α_2	α_3
Zn II	111,50	1,2288	0,7775	0,6258	0,5157
Zn I	151,70	1,3431	0,7775	0,5930	0,4788
Cd III	77,46	1,1093	0,7818	0,6340	0,5260
Ni II	140,20	1,2264	0,7829	0,6265	0,5187
Co III	83,01	1,0807	0,7836	0,6452	0,5113
Co I	161,60	1,2645	0,7836	0,6285	0,5405
Cd II	88,94	1,1813	0,7923	0,6485	0,5308
Mn III	130,90	1,1963	0,8147	0,6422	0,5249
H III	70,97	1,0370	0,8164	0,6806	0,5649
H II	79,98	1,0843	0,8328	0,7049	0,5967
H I	91,84	1,1138	0,8375	0,7178	0,6139

Sulfate.

	Z_{15}	s	α_1	α_2	α_3
Cd II	96,17	1,1591	0,7508	0,6039	0,5071
Mn II	228,63	1,2513	0,7530	0,5995	0,4700
Ni I	298,55	1,3137	0,7536	0,5795	0,5105
Cu II	98,18	1,1151	0,7536	0,6082	0,5295
Co I	193,16	1,2398	0,7553	0,5838	0,4647
Cd I	120,81	1,2681	0,7605	0,6082	0,4984
Zn II	156,03	1,1953	0,7605	0,6039	0,4711
Mn III	129,42	1,1469	0,7623	0,6053	0,4898
Zn I	232,82	1,2814	0,7623	0,5808	0,4643
Ni II	154,93	1,1977	0,7688	0,6422	0,4888
Cu III	79,63	1,0555	0,7762	0,6250	0,5200
Ni III	94,63	1,0925	0,7762	0,6357	0,5260
H_2 I	122,71	1,2003	0,7787	0,6313	0,5154
Cu I	125,42	1,1635	0,7812	0,6119	0,4984
Cd III	78,90	1,1681	0,7836	0,6324	0,5236
H_2 III	77,81	1,0651	0,7836	0,6427	0,5359
H_2 II	95,07	1,1305	0,7884	0,6369	0,5236
Co III	86,72	1,0860	0,7923	0,6333	0,5199
Co II	117,81	1,1591	0,8098	0,6452	0,5234
Zn III	97,06	1,1064	0,8164	0,6457	0,5304

Aus den in den Tabellen gegebenen Zahlen folgt:

1) Eine Proportionalität zwischen der Grösse der Zähigkeit und der Grösse ihrer Abnahme mit der Temperatur besteht nicht.

Für eine 25 Proc. haltige Lösung von Nickelsulfat (Ni I)

ist z. B. die spec. Zähigkeit 298,55 bei 15°, bei 25° aber 224,93, es beträgt also für das Intervall 15—25° die mittlere Abnahme 0,7536; ebensogross ist in demselben Intervalle die Abnahme für die 12,5 procentige Lösung von Kupfersulfat (Cu II), obwohl die respectiven Zahigkeiten nur 98,18, resp. 73,98, also nur $^1/_3$ so gross als die des Nickelsulfates sind.

2) Die Abnahme ist für ein gleiches Temperaturintervall um so grösser, je niedriger die Temperatur; die durch die Temperaturen als Abscissen und durch die Zähigkeiten als Ordinaten bestimmten Curven nähern sich asymptotisch der Abscissenaxe.

3) Es besteht keine einfache Beziehung zwischen der Abnahme der Zähigkeit und dem specifischen Gewichte und der Concentration einer Lösung, denn meistens zeigt sich mit Zunahme der Concentration — und also auch des spec. Gewichts — erst eine Abnahme, dann eine Zunahme von α z. B. beim Kupfernitrat; es findet sich aber auch das gegentheilige Verhältniss, z. B. bei der Schwefelsäure. Eine dauernde Zunahme von α findet man beim Nickelsulfat, eine ebensolche Abnahme beim Cobaltnitrat.

IV. Aus dem Quotienten Z_s/Z_w, d. h. aus dem Verhältnisse zwischen der Zähigkeit einer Salzlösung und der des Wassers bei derselben Temperatur lässt sich nach Hrn. Sprung entnehmen, ob der Einfluss der Temperatur ein grösserer ist auf das Wasser oder auf die Salzlösung. Im ersteren Falle findet mit steigender Temperatur ein Wachsen des Quotienten Z_s/Z_w statt, während derselbe im anderen Falle kleiner wird.

Auch der oben eingeführte Werth von α lässt erkennen, ob für ein gegebenes Intervall das Wasser oder eine Salzlösung eine grössere Abnahme der Zähigkeit erleidet, ob also die durch Temperatur und Zähigkeit bestimmten Curven convergiren, divergiren oder etwa parallel laufen. Es ist dementsprechend das α der Salzlösung kleiner, grösser oder ebensogross als das α des Wassers in demselben Temperaturintervall.

In der folgenden Tabelle ist der erste Fall durch „—“, der zweite durch „+“, endlich der dritte durch „=“ wieder-

gegeben, und zwar sind zu dem letzteren alle unter ein Procent betragenden Abweichungen gestellt worden.

Salzlösung		15—25°	25—35°	35—45°
Chloride.				
Salzsäure	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	—	—	—
Zinkchlorid	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	—	—	—
Cadmiumchlorid	I	—	—	—
"	II	=	—	=
"	III	=	=	—
Nickelchlorid	I	—	—	—
"	II	=	—	—
"	III	—	=	=
Cobaltchlorid	I	=	—	—
"	II	—	—	—
"	III	=	=	—
Manganchlorid	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	=	=	—
"	IV	—	—	—
Sulfate.				
Schwefelsäure	I	—	—	—
"	II	=	=	—
"	III	=	=	=
Zinksulfat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	+	+	=
Cadmiumsulfat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	=	=	—
Nickelsulfat	I	—	—	—
"	II	—	=	—
"	III	—	=	—
Cobaltsulfat	I	—	—	—
"	II	+	=	—
"	III	=	=	—
Mangansulfat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	—	—	—
Kupfersulfat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	—	—	—
Nitrate.				
Bariumnitrat	I	=	+	=
"	II	+	+	+
Strontiumnitrat	I	=	=	=
"	II	=	+	+
"	III	+	+	+
Calciumnitrat	I	+	=	—
"	II	=	—	—
"	III	=	=	=
Zinknitrat	I	—	—	—
"	II	+	+	+
"	III	+	+	+
Cadmiumnitrat	I	=	+	+
"	II	+	+	+
"	III	—	+	=
Nickelnitrat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	=	+	+
Cobaltnitrat	I	+	+	+
"	II	=	=	—
"	III	—	+	=
Mangannitrat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	=	+	+
Kupfernitrat	I	—	—	—
"	II	—	=	+
"	III	=	—	—
Magnesiumnitrat	I	—	—	—
"	II	—	—	—
"	III	+	+	+
Salpetersäure	I	+	+	+
"	II	+	+	+
"	III	+	+	+

Eine Beziehung nach irgend welcher Richtung kann der Tabelle wohl nicht entnommen werden.

Beziehungen zwischen Zusammensetzung und Zähigkeit einer Lösung.

Da sowohl die procentische Menge des gelösten Salzes, als auch dessen Natur von Einfluss auf die Zähigkeit einer Lösung ist, müssen beide Factoren gesondert auf den Grad ihrer Einwirkung geprüft werden.

Bei der Vergleichung bedient man sich zweckmässig, wie bei der Untersuchung des Einflusses der Temperatur, einer graphischen Darstellung, und zwar nimmt man als Abscisse den Procentgehalt, als Ordinate die Zähigkeit.

I. Ich bespreche zunächst den Einfluss des Procentgehaltes.

Poiseuille[1]) und Girard[2]) geben an, dass die Zähigkeit mit dem Procentgehalt wächst. Für das Kaliumnitrat constatirte Girard eine Ausnahme; dieses Salz zeigte ein Minimum der Zähigkeit. Ein solches fand dann Hr. Sprung bei einer grossen Anzahl von Salzen, bei welchen die Zähigkeit bei niederen Temperaturen geringer, bei höheren aber grösser ist als die des Wassers, und zwar beides um so mehr, je grösser der Procentgehalt der Lösungen ist.

Es entspricht dieses Minimum bei Salzlösungen dem von Graham[3]) gefundenen Maximum bei Gemischen von Säuren und Wasser.

Aus meinen Beobachtungen ergibt sich hierzu Folgendes:

a) Nur eine der von mir untersuchten Lösungen zeigt das erwähnte Minimum. Eine Lösung mit 2,98 % Bariumnitrat hat bei 24° dieselbe Zähigkeit wie das Wasser, nämlich 49,5, unterhalb dieser Temperatur eine geringere, oberhalb derselben eine grössere. Für eine Lösung mit 5,224 % Bariumnitrat ist dagegen noch bei 15° die Ausflusszeit nicht unbeträchtlich grösser als für Wasser. Hiernach ist also eine 2,98procentige Lösung bei 15° weniger zähe, eine 5,224-

---

1) Poiseuille, Mém. prés à l'inst. 9. p. 433. 1846.

2) Girard, Mém. de l'inst. Années. 1813—1815. p. 249. 1816. p. 187. 260.

3) Graham, Chem. phys. researches. p. 600. 1861.

procentige bei derselben Temperatur zäher als das Wasser. Die die Aenderung der Zähigkeit mit dem Procentgehalt angebende Curve sinkt von dem Gehalte 0 (Wasser) bis zum Gehalte 2,98 % und steigt dann wieder. Es ist also ein Minimum der Zähigkeit vorhanden. (Vgl. Fig. 2.)

b) Allen anderen Lösungen, deren Zähigkeit ich bestimmte, entsprechen Curven, welche asymptotisch sich der Ordinatenaxe nähern, es nimmt also die Zähigkeit mit dem Procentgehalt in immer stärkerem Maasse zu.

In derselben Weise, wie es zur Ermittelung und Vergleichung des Einflusses der Temperatur auf die Zähigkeit geschehen ist, lässt sich ein Coëfficient bestimmen, welcher die Zunahme der Zähigkeit durch die Erhöhung des Procentgehaltes ausdrückt.

Bedeutet β die Zunahme für ein bestimmtes Intervall, sind ferner Zp und Zp_1 die Zähigkeiten bei dem Gehalte p, resp. p_1, so hat man:

$$Zp_1 = Zp\left(1 + \beta(p_1 - p)\right).$$

Um nun zu zeigen, wie sehr die Werthe von β differiren, sind für einige Salzlösungen in der folgenden Tabelle die Werthe von β aufgeführt.

Es bedeutet β_1, β_2, β_3, β_4 die Zunahme zwischen 0 und 5, 5 und 10, 10 und 15, 15 und 20 %.

Salzlösung	β_1	β_2	β_3	β_4
Kupfernitrat	1,093	1,086	1,158	1,125
Nickelsulfat	1,203	1,247	1,260	1,570
Cadmiumchlorid	1,093	1,114	1,103	1,106
Bleinitrat	1,031	1,046	1,043	1,054

II. Will man, statt wie bisher, den Einfluss des Procentgehaltes, nunmehr den Einfluss der Natur des Salzes auf die Zähigkeit der Lösung untersuchen, so bieten sich zwei Wege; man kann

1) Lösungen vergleichen, welche eine procentisch gleiche Salzmenge enthalten und

2) solche, in denen die Anzahl der vorhandenen Salzmolecüle eine gleiche ist.

1) Für gleichconcentrirte Lösungen, d. h. Lösungen mit gleichem Procentgehalt an wasserfreiem Salze, haben Hr. Hübener[1]), und in ausgedehntem Maasse Hr. Sprung[2]), dann auch Hr. Slotte[3]) folgende Beziehung aufgefunden. Gleichconcentrirte Lösungen sind um so zäher, je kleiner bei gleicher Säure das Atomgewicht des Metalls, je kleiner bei gleichem Metalle das Moleculargewicht der Säure ist. Diese Beziehung gilt aber nur für durchaus gleichconstituirte Salze, sie gilt z. B. nicht mehr beim Uebergange aus der Gruppe der Alkalimetalle zu der der Alkalierdmetalle, sie verschwindet gleichfalls beim Uebergange von einbasischen zu mehrbasischen Säuren.

Meine Beobachtungen ergeben für eine Reihe von Fällen die Bestätigung des Sprung'schen Satzes.

a) Bei den Salzen des

Ba, Sr, Ca, Co, Ni, Zn, Cd, Cu, Mn

fliessen die Lösungen der Nitrate rascher aus, als die der respectiven Chloride, entsprechend dem grösseren Moleculargewicht der Salpetersäure. Die Sulfate der angführten Metalle zeigen in ihren Lösungen grössere Zähigkeit als die Nitrate und Chloride. Sprung fand das Gleiche für die Salze des

K, Na, NH_4. (Vgl. Fig. 1—10.)

b) Für die gleichconcentrirten Lösungen der Nitrate und Chloride folgender Metalle:

Mn, (Co, Ni), Zn, Cd

ist die Zähigkeit um so grösser, je kleiner das Atomgewicht des Metalls ist.

Das Kupfer lässt sich nicht in diese Reihe einordnen; die Curve des Kupferchlorids schneidet die anderen Curven zum Theil, die des Kupfernitrats liegt zwischen den Curven des Mangan- und Nickelnitrats. (Vgl. Fig. 11 u. 12.) Das Verhalten des Kupferchlorids wird durch die weiter unten zu besprechende Dissociation seiner Lösungen erklärt; in wieweit analoge Verhältnisse beim Kupfernitrat mitwirken, bedarf einer weiteren Untersuchung.

1) Hübener, Pogg. Ann. **150.** p. 248. 1873.
2) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.
3) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.

c) Aus der Zähigkeit der Sulfatlösungen ergibt sich für die Metalle eine andere Reihenfolge, als aus den entsprechenden Zahlen für die Zähigkeit der Chloride und Nitrate.

Man hat für die Sulfate die Reihe:

Mn, Zn, (Co, Ni), Cu. Cd;

es fliessen also die Lösungen des Zinksulfates langsamer, als man aus dem Verhalten der Chloride und Nitrate folgern könnte. (Vgl. Fig. 13.)

Demnach hat der Satz Sprung's auch für die Nitrate und Chloride der zweiwerthigen schweren Metalle Gültigkeit, er ist aber für die Sulfate hier ebensowenig wie bei den Salzen der Alkalimetalle richtig.

2) Um zu prüfen, ob die Zähigkeit solcher Lösungen, in welchen nicht gleiche Procente an Salz, wohl aber gleichviel Salzmolecüle enthalten sind, eine Gesetzmässigkeit erkennen lässt, bin ich in folgender Weise verfahren. Es lässt sich annehmen, dass isomorphe Salze gleichconstituirte Lösungen geben. Für diese ist nach Hrn. Sprung die Zahl der in gleichen Volumina enthaltenen Wassermolecüle nahezu constant; die relative Zahl der Salzmolecüle ergibt sich nach der Formel:

$$n = \frac{p \, . \, s}{m},$$

wo n die Zahl der Molecüle, p der Procentgehalt, s das specifische Gewicht und m das Moleculargewicht bedeutet.

Nimmt man (Fig. 4) die relative Zahl der Salzmolecüle als Abscisse, die Zähigkeit als Ordinate, so findet man für die isomorphe Gruppe.

$CoSO_4$, $NiSO_4$, $MgSO_4$, $ZnSO_4$

a) Lösungen von Nickel- und Cobaltsulfat, welche gleichviel Salzmolecüle enthalten, haben gleiche Zähigkeit.

b) Lösungen von Magnesium- und Zinksulfat haben nahezu gleiche Zähigkeit, wenn sie gleichviel Molecüle enthalten.

c) Die Lösungen des Cobalt- und Nickelsulfates haben kleinere Zähigkeit, als die gleichviel Salzmolecüle enthaltenden Lösungen des Zink- und Magnesiumsulfates.

Eine einfache Beziehung zwischen Moleculargewicht und Zähigkeit scheint nach dem Gesagten auch für Lösungen

mit gleichem Gehalte an Salzmolecülen nicht vorhanden zu sein, selbst dann nicht, wenn für diese Molecüle eine gleiche Gestalt angenommen werden kann.

Man hat in neuerer Zeit vielfach die physikalischen Eigenschaften der Elemente und ihrer Verbindungen als periodische Function des Atomgewichtes auszudrücken gesucht.

Ich habe bei meinen Versuchen diese Beziehung stets geprüft; es ist aber bis jetzt nicht möglich, die Zähigkeit der Salzlösungen in ihrer Abhängigkeit vom Atomgewicht darzustellen.

Die Existenz einer solchen Abhängigkeit ist allerdings wahrscheinlich und besteht, wie aus dem obigen von Sprung aufgestellten Satze hervorgeht, innerhalb einzelner Gruppen; für sie spricht insbesondere auch der Umstand, dass Nickel- und Cobaltsulfat gleiche Zähigkeit besitzen, wenn sie gleichviele Salzmolecüle in ihren Lösungen enthalten.

Ueber den Einfluss der Dissociation auf die Zähigkeit einer Lösung.

In der geringen Gleichmässigkeit, welche in dem Einflusse der Temperatur und auch des Procentgehaltes etc. auf die Zähigkeit bemerkbar ist, liegt Veranlassung nach einer Ursache zu suchen, welche die vorhandenen Abweichungen von gewissen Regelmässigkeiten bewirken kann.

Ein Umstand, der hierzu wohl in Betracht gezogen werden muss, ist die Dissociation der Lösungen.

Hr. Sprung[1]) zeigte, dass die grünen Lösungen des schwefelsauren Chromoxydes erheblich grössere Zähigkeit besitzen als die violetten. Der Uebergang aus der einen in die andere Modification erfolgt durch den Einfluss der Wärme bei 70° und beruht auf einer Dissociation.

Geht nun eine solche Dissociation innerhalb der Versuchsgrenzen vor sich, so correspondiren die für Temperaturen unterhalb der Dissociationstemperatur gefundenen Zähigkeiten nicht mit denen für höhere Temperaturen und müssen deshalb in der graphischen Darstellung und der Discussion überhaupt Unregelmässigkeiten veranlassen.

1) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.

Ich habe deshalb das Kupferchlorid näher untersucht. Von diesem Salze ist bekannt, dass es in zwei wesentlich verschiedenen Modificationen in der Lösung existirt, concentrirte Lösungen sind grün, verdünnte blau, diese werden beim Erhitzen grün, gehen aber nach kurzer Zeit wieder in den alten Zustand zurück. Aus der Beobachtung der Gefrierpunkte hat Rüdorf[1]) darauf geschlossen, dass in den grünen Lösungen ein Salz von der Zusammensetzung $CuCl_2 + 4H_2O$ enthalten, dass aber in den blauen Lösungen das Salz $CuCl_2 + 12H_2O$ anzunehmen sei.

Da der Farbenübergang, wie De Coppet[2]) zeigte, kein plötzlicher ist, so muss man annehmen, dass es Lösungen gibt, welche beide Salze enthalten.

Bei meinen Versuchen habe ich Kupferchloridlösung von 10° an aufwärts bis 45° untersucht, und zwar bis 25° in Intervallen von 5°, alsdann von 10°. Nach Beendigung des Versuchs bei 45° wurde die ganze Versuchsreihe rückläufig wiederholt, dann nochmals in ursprünglicher Folge. Die erhaltenen Resultate finden sich in der folgenden Tabelle wiedergegeben, *T* bedeutet die Temperatur, *t* die Ausflusszeit.

33,027 % $CuCl_2$.

T	*t*	*t*
10	642,1	—
15	547,8	—
20	467,8	—
25	421,6	420,6
35	330,4	330,1
45	267,2	—
	→	

21,349 % $CuCl_2$.

T	*t* →		
10	423,8	434,5	432,1
15	360,3	382,1	376,5
20	309,4	332,0	326,7
25	294,3	294,3	294,3
35	236,5	236,5	—
45	194,2	194,2	—
	→		

12,006 % $CuCl_2$.

T	*t*	*t*
10°	303,9	303,7
15	267,6	267,3
20	237,2	237,4
25	208,2	208,3
30	187,4	187,5
35	169,2	169,0
40	153,0	152,8
45	139,9	139,8
	→	

1) Rüdorf, Pogg. Ann. **116.** p. 64. 1862.

2) De Coppet, Ann. d. chim. et de phys. (4) **23.** p. 386. 1871.

Die Pfeile bezeichnen die Aufeinanderfolge der abwechselnden Erwärmungen und Erkältungen.

Vergleicht man die Werthe der Zähigkeit für eine 21 procentige Lösung bei auf- und absteigender Temperatur, so sieht man, dass bei Temperaturen über 25° die Zähigkeit in beiden Fällen die gleiche ist, dass sie aber bei Temperaturen unterhalb 25° beträchtlich grösser ist bei absteigender Temperatur.

Der Zähigkeit bei 25° und darüber entspricht z. B. ein Werth von 382″ (absteigende Reihe) anstatt von 360″ (aufsteigende Reihe), also ein etwa um 6 Proc. höherer Werth.

Offenbar also dissociirt sich die Lösung bei etwa 25°, die dissociirte Lösung hat höhere Zähigkeit und behält ihren Zustand noch einige Zeit bei. Es lag z. B. zwischen dem ersten und zweiten Versuche bei aufsteigender Temperatur ein Zeitraum von $2^1/_2$ Stunden; dennoch war bei 15° im zweiten Versuche die Zähigkeit $4^1/_2$ Proc. höher als bei dem ersten.

Berücksichtigt man diese Dissociation, so ergibt sich Folgendes.

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von α_1, α_2, α_3, welche die Abnahme der Zähigkeit in den Temperaturintervallen 15—25°, 25—35°, 35—45° darstellen, für Wasser und die Lösungen des Kupferchlorids enthalten, und zwar sind dieselben berechnet aus den Ausflusszeiten bei aufsteigender Temperatur.

	α_1	α_2	α_3
Wasser	0,7870	0,8021	0,8588
Kupferchlorid I	0,7696	0,7836	0,8087
„ II	0,8158	0,8044	0,8212
„ III	0,7780	0,8127	0,8269

Während also α_2 und α_3 mit steigendem Procentgehalt abnehmen, ist dies für α_1 nicht der Fall. Berechnet man aber α_1 unter Zugrundelegung des höheren Werthes von Z_{15}, wie man ihn bei absteigender Temperatur findet, so erhält

man für α_1 die Zahlen *0,7696*, *0,7695*, *0,7780*, sodass auch für das Intervall 15—25° die Abnahme der Zähigkeit der partiell dissociirten Flüssigkeit mit der Temperatur um so grösser ist, je höher der Procentgehalt.

Ob die vielen Abweichungen, welche die für andere Salze gefundenen Quotienten zeigen, auch auf Dissociationen oder vielleicht auch auf Hydratbildung — beim Verdünnen und bei niederer Temperatur — zurückzuführen sind, dafür sichere Anhaltepunkte zu gewinnen, ist mir nicht gelungen; mancherlei Umstände deuten darauf hin.

Es wird die Aufgabe weiterer Untersuchungen sein müssen, festzustellen, in wie weit sich die Dissociation der Lösungen durch die Bestimmung der Reibungscoëfficienten für letztere erkennen lässt.

Man wird ferner, gestützt auf Unregelmässigkeiten der Gefrierpunkte, auf Sprünge in den Dampfspannungen der Salzlösungen und auf andere Umstände, welche eine Dissociation andeuten, versuchen müssen, die letztere zur Erklärung der Anomalien in der Aenderung der Zähigkeit mit der Temperatur und Concentration zu verwenden.

Es sei mir erlaubt an dieser Stelle meinen hochverehrten Lehrern den Hrn. Professoren G. und E. Wiedemann meinen herzlichsten Dank auszusprechen, sowohl für den reichen Beistand den sie mir für die vorliegende Arbeit zu Theil werden liessen, als auch für die stets bereite Förderung, welche ich während meiner Studienzeit überhaupt durch dieselben gefunden habe.

Leipzig, Physik.-Chem. Inst.

VII. *Untersuchungen über die Absorption der Gase durch die Flüssigkeiten unter hohen Drucken; von Sigmund v. Wroblewski.*

Erster Theil.

Das Verhalten der Kohlensäure in Wasser.

Zweite Abhandlung.
Ueber die Gesetze der Löslichkeit der Kohlensäure in Wasser.

(Hierzu Taf. III Fig. 17.)

§ 10.[1]) Die Methode, den Sättigungscoëfficienten unter hohen Drucken zu bestimmen.

Die Hauptschwierigkeit, mit welcher die Ausführung jeder absorptiometrischen Bestimmung verbunden ist, besteht darin, dass die Flüssigkeit, nachdem sie in Berührung mit dem zu absorbirenden Gase gebracht worden ist, nur sehr langsam — sei es blos durch Diffusion, sei es durch Diffusion und Strömungen — sich mit dem Gase sättigt. Diese Schwierigkeit wird in allen bis jetzt in Gebrauch gewesenen absorptiometrischen Methoden dadurch beseitigt, dass man die Sättigung durch das wiederholentliche Zusammenschütteln der Flüssigkeit mit dem Gase beschleunigt. Dem entsprechend sind auch alle Apparate construirt mit dem Unterschied allein, dass während in dem Bunsen'schen Absorptiometer[2]) gleichzeitig mit der zu untersuchenden Flüssigkeit auch das in dem Eudiometerrohr befindliche Quecksilber zum Schütteln kommt, dieser Uebelstand sowohl in dem Apparate von G. Wiedemann, mit welchem Mackenzie[3]) seine Untersuchungen ausgeführt hat, wie in meinem Absorptiometer[4]) beseitigt worden ist. Die Vorzüge aller dieser Apparate

1) Man sehe die erste Abhandlung Wied. Ann. **17.** p. 103—128. 1882.

2) Bunsen, Gas. Methoden. (2) p. 203. 1877.

3) Mackenzie, Wied. Ann. **1.** p. 438. 1877.

4) v. Wroblewski, Wied. Ann. **8.** p. 35. 1879. Ich habe dort nur das Absorptiometer beschrieben, in welchem ich die Absorptionscoëfficienten des Kautschuks für Gase gemessen habe. Die Beschreibung des Absorptiometers für Flüssigkeiten, mit welchem ich Jahre lang gearbeitet habe, behalte ich mir für spätere Zeit vor.

bestehen darin, dass man ihnen beliebig grosse Dimensionen geben kann, wodurch, da die zum Versuch genommene Menge Flüssigkeit verhältnissmässig gross sein kann, die Fehler der Bestimmung beliebig klein gemacht werden. Der entschiedene Mangel der Apparate besteht darin, dass sie die Bestimmungen nur bei einem Drucke, welcher kleiner als der atmosphärische ist, gestatten.

Die Construction eines Apparates, welcher das Zusammenschütteln der Flüssigkeit mit dem Gase auch bei hohen Drucken gestatten würde, ist mit solchen Schwierigkeiten verbunden, dass ich an die Aufgabe — die Absorption bis zu den Drucken, unter welchen die Gase flüssig werden, zu studiren — gehend, mich zuerst nach einem neuen Princip umsehen musste.

Der im § 2 der ersten Abhandlung beschriebene Apparat für hohe Drucke sucht dieses neue Princip zu verwirklichen. Es besteht in Folgendem.

In die eine bestimmte Gasmenge enthaltende Eudiometerröhre wird die zu untersuchende Flüssigkeit auf eine gleich näher auseinanderzusetzende Weise eingeführt und gemessen. Man bestimmt zur Controle dieser Messung auf eine ebenfalls gleich zu beschreibende Weise den Bunsen'schen Absorptionscoëfficienten. Ist dies geschehen, so wird die Eudiometerröhre mit Gas, Flüssigkeit und etwas Quecksilber in den Apparat für hohe Drucke eingesetzt und alles so weit comprimirt, dass das Quecksilber in dem Eudiometerrohr bis zu einem vorhergewählten Striche hinaufgestiegen ist. Indem man den Druck, welchem in diesem Augenblicke Flüssigkeit und Gas ausgesetzt sind, auf einem in der Verbindung mit der Cailletet'schen Pumpe sich befindenden Hülfsmanometer abliest, beginnt man, sich stets dieses Manometers bedienend, in den gleich näher zu bezeichnenden Grenzen den Druck im Apparate leise so zu ändern, dass die Druckschwankungen im einen und anderen Sinne gleich bleiben. Durch diese Druckänderungen werden die Strömungen in der Flüssigkeit hervorgerufen und die Sättigung dadurch beschleunigt. Infolge der vorsichgehenden Absorption sinkt allmählich der Druck, welcher nothwendig ist, um

Gas und Flüssigkeit in dem vorhergewählten Volumen zu halten, und dem entsprechend müssen auch von Zeit zu Zeit die Grenzen der Druckschwankungen verlegt werden. Sinkt der Druck im Apparate nicht weiter, so ist die Flüssigkeit gesättigt.

Ist der Versuch mit der dazu gehörigen Vorsicht angestellt worden, so wird genau derselbe stationäre Zustand auch dann eintreten, wenn man die Flüssigkeit zuerst bei einem beträchtlich höheren Drucke sättigt und nachher durch Druckschwankungen die Gasmenge, mit welcher sie übersättigt ist, heraustreten lässt.

§ 11. Ausführung und Berechnung der Versuche.

Die Fig. 17 soll die Ausführung der Versuche verdeutlichen. *A* ist die mit dem Thermometer verbundene Eudiometerröhre. Nachdem sie bis zu vier Fünftel mit der Kohlensäure gefüllt worden ist, wird sie in ein weites sehr dünnwandiges cylindrisches Gefäss aus Glas *B* eingesetzt, welches Quecksilber enthält. Um die Gasmessung auszuführen, schiebt man über das Eudiometer eine weite Glasröhre *C* und füllt sie mit Wasser, durch welches ein durch das hydraulische Gebläse getriebener Luftstrom beständig geht. Die Röhre *A*, welche auf dem Boden des Gefässes *B* ruht, wird in der verticalen Lage durch einen starken über die Rolle *E* geschlungenen Zwirnfaden *D* gehalten. *F* ist ein dünner Eisendraht, welcher im Quecksilber taucht. Sein reflectirtes Bild erleichtert die Bestimmung des Quecksilberniveaus im Gefäss *B*.

Es sei die im Eudiometer enthaltene Gasmenge gleich:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{V(1+\beta\Theta)}{1+\gamma\Theta} PK,$$

wo bedeuten:

V das abgelesene bei 0^0 calibrirte von der Kohlensäure eingenommene Volumen in Cubikcentimetern,

Θ die Temperatur,

β den Ausdehnungscoëfficienten des Glases,

γ den Ausdehnungscoëfficienten der Kohlensäure (= 0,00371);

P den Druck in Atmosphären, unter welchem das Gas sich befindet,

K den in § 3 der ersten Abhandlung definirten Coëfficienten.

Man entfernt nach dieser Messung das Wasser aus der Röhre C, nimmt sie weg, trocknet die Quecksilberoberfläche von den Spuren der Feuchtigkeit mit Fliesspapier, und indem man die Röhre A etwas neigt, führt man in sie mit Hülfe einer passenden an einem Ende mit einer Kautschukmembran verschlossenen Glasröhre vorsichtig etwas Wasser ein. Ist dies geschehen, so wird das Eudiometer A wieder in die ursprüngliche Lage gestellt, ebenfalls die Röhre C aufgeschoben und mit Wasser gefüllt. Bei der Wahl der einzuführenden Menge Flüssigkeit ist aus gleich näher zu besprechenden Gründen der Durchmesser des oberen Theils der Eudiometerröhre massgebend. Ich wählte z. B. für die Eudiometerröhre, mit welcher die in § 6 der ersten Abhandlung beschriebenen Versuche ausgeführt waren, Wassermengen, welche zwischen 0,07 und 0,14 ccm schwankten. Die Distanz zwischen beiden diese Wassermengen umschliessenden Meniscusflächen gemessen in der Richtung der Axe der Eudiometerröhre schwankte dann zwischen 1,35 und 3,2 mm. Wie die Flüssigkeitsmengen zwischen den Meniscusflächen und den an die Kuppen horizontal gelegten Tangentialebenen bestimmt wurden, ist bereits in § 6 gesagt worden. Zu allen diesen Messungen diente ein vorzügliches Kathetometer mit einem Fernrohr auf sehr kurze Distanz. Man mass die Wassermenge erst nachdem sie mehrere Stunden im Eudiometerrohr sich befand.

Zu den Versuchen wurde nicht — wie man es bis jetzt immer gethan hat — luftfreies Wasser genommen, sondern umgekehrt Wasser, welches vorher bei einer bekannten Temperatur und bekanntem Barometerstande durch Schütteln mit Luft gesättigt war. Die auf diese Weise in die Eudiometerröhre gleichzeitig mit dem Wasser eingeführte Luftmenge konnte aus den Bunsen'schen Bestimmungen berechnet werden. Sie betrug z. B. bei der Versuchsreihe I, zu welcher 31,5242 ccm Kohlensäure genommen wurden, nur

0,0025 ccm, bei der Versuchsreihe V, bei welcher 33,0409 ccm Kohlensäure war, nur 0,0012 ccm. Diese Luftmenge wurde zu der gemessenen Kohlensäuremenge ganz einfach zugezählt.[1])

Es versteht sich von selbst, dass es in Anbetracht der Kleinheit der benutzten Wassermenge von der grössten Wichtigkeit zu wissen war, in wie weit die Bestimmung dieser Menge exact gewesen ist. Die Gewissheit darüber suchte ich mir auf folgende Weise zu verschaffen.

Nachdem die Messung des Wassers zu Ende war, suchte ich, am Faden *D* leise ziehend, die Flüssigkeit im Eudiometerrohr in ganz geringe Schwingungen zu versetzen. Wenn man mit der nöthigen Vorsicht verfährt, so kann man dies so bewirken, dass sich dabei das Wasser weder an der Glaswand ausbreitet, noch zwischen das Quecksilber und die Glasröhre in merklicher Menge eindringt. Es müssen allerdings sowohl die Röhre wie das Quecksilber sehr rein sein. Die Anzahl der Schwingungen, welche nothwendig ist, um das Wasser mit der Kohlensäure zu sättigen, hängt von dem Durchmesser des unteren Theils der Eudiometerröhre und von der Menge des Wassers ab. Bei der so eben erwähnten Eudiometerröhre genügten etwa 500 Schwingungen, wenn die Wassermenge die schon angegebene Grenze nicht überstieg. War der stationäre Zustand erreicht, so wurde das gemeinsame Volumen des Gases und Wassers gemessen und daraus der Bunsen'sche Absorptionscoëfficient berechnet. Ich erhielt auf diese Weise Werthe, welche oft von den Bunsen'schen nur um 1 bis 2 Proc. abwichen, woraus sich schliessen liess, dass das Verfahren für die Zwecke meiner Untersuchungen hinreichend exact war. Fiel diese Bestimmung des Absorptionscoëfficienten ungenau aus, so wurde der Versuch aufgegeben.

Wie man nachher die Eudiometerröhre in den Apparat

1) Dieses Verfahren, welches von grosser Wichtigkeit in den Fällen sein wird, wo man es mit einer Flüssigkeit, die wie z. B. eine Salzlösung nicht ausgekocht werden darf, zu thun hat, wird immer seine Berechtigung haben, sobald das zu untersuchende Gas so löslich wie die Kohlensäure und die zu dem Versuch genommene Flüssigkeitsmenge sehr klein im Vergleich zu der Gasmenge ist.

für hohe Drucke einsetzte und die Sättigung unter hohem Drucke erreichte, ist bereits in vorigem Paragraph gesagt worden. Ich muss hier nur ausdrücklich betonen, dass diese Bestimmungen mit äusserster Vorsicht gemacht werden müssen, und dass man nur dann den Resultaten trauen kann, wenn die Versuche mit einer und derselben Flüssigkeitsmenge bei den niedrigsten Drucken angefangen und bis zu den höchsten fortgeführt, nachher in umgekehrter Ordnung wiederholt werden und dieselben Zahlen liefern. Ich begann die Versuche gewöhnlich bei dem Drucke von etwa 5 Atmosphären, ging nachher auf etwa 6, 8, 10 u. s. w. bis — wenn die Temperatur nicht 0^0 war — 40 Atmosph., dann kehrte ich die Reihenfolge um und schloss mit einem Versuch bei 5 Atmosphären. Ergaben sich aus den heruntergehenden Versuchen Sättigungscoëfficienten, die um mehr als ein paar Procente von den aus den hinaufgehenden Versuchen berechneten Coëfficienten verschieden waren, so wurde die Reihe verworfen. Die ganze Reihe wurde an demselben Tage ausgeführt.

Die Methode ist — wie man sieht — keine leichte, sondern sehr zeitraubend und mühselig. Dringt das Wasser bei einer ungeschickten Druckänderung zwischen Glas und Quecksilber, so ist die Versuchsreihe verdorben. Die Curve, welche die Löslichkeit darstellt, wird bei den höchsten Drucken ihre Neigung ändern. Ist die genommene Wassermenge zu gross, so dauert der Versuch ausserordentlich lange, man hat ein paar Tausend Druckänderungen nöthig, um den stationären Zustand zu erreichen, und die Gefahr, dass die Flüssigkeit übersättigt wird, ist sehr gross. Ist die Flüssigkeitsmenge zu klein, so werden die Fehler der Bestimmung dieser Menge merkbar.

Von den zahlreichen Controlversuchen will ich nur den folgenden beschreiben. Man nimmt eine möglichst kleine Menge Flüssigkeit, und hält, indem man sie mit dem Gas immer weiter comprimirt, auf den vorhergewählten Strichen der Eudiometerröhre längere Zeit an und bestimmt jedesmal den zugehörigen Druck. Dann, nachdem man die Flüssigkeit bei einem Drucke von 40—50 Atmosphären gesättigt hat,

vermindert man ganz langsam den Druck, hält wieder auf denselben Strichen an und bestimmt den zugehörigen Druck. Aus den Ablesungen, die man bei dem aufsteigenden Drucke gemacht hat, bekommt man Zahlen, die geringer sind als die Sättigungscoëfficienten, da die Flüssigkeit bei keinem Drucke gesättigt war. Aus den Ablesungen, welché bei niedersteigendem Drucke erhalten worden sind, ergeben sich aus dem entgegengesetzten Grunde stets zu grosse Werthe. Der zu bestimmende Zustand liegt zwischen diesen Grenzwerthen. Auf diese Weise konnte die Richtigkeit der Gesetze der Löslichkeit ausser jedem Zweifel gestellt werden.

Was die Grenzen der Druckänderungen anbetrifft, so richten sie sich nach der Flüssigkeitsmenge, mit welcher man experimentirt, und nach dem Drucke, unter welchem man arbeitet. Bei den niedrigen Drucken genügt ein Bruchtheil einer Atmosphäre, bei den Drucken von 30—40 Atmosph. ist eine Druckänderung von etwa 5 Atmosph. nothwendig.

Die Berechnung der Versuche geschah auf folgende Weise. Ist die dem Drucke P' entsprechende Sättigung erreicht, so ist die im Eudiometerrohr übrig gebliebene Gasmenge durch den Ausdruck:

$$\text{(VII)} \qquad \frac{V'(1+\beta\Theta')(1-\varepsilon P')}{1+\gamma\Theta'} P' K'.$$

gegeben, wo ε der Compressibilitätscoëfficient des Glases ist, und die anderen Buchstaben dieselbe, resp. analoge Bedeutung wie im Ausdruck (VI) haben. Für die Versuche ist es vortheilhafter, nicht das vom Gase allein eingenommene Volumen V', sondern das gemeinsame Volumen B des Gases und des Wassers zu messen und anstatt V' in den Ausdruck (VII) $B-H$ einzuführen, wo H das Volumen des Wassers ist. Die Differenz der Ausdrücke (VI) und (VII) dividirt durch H gibt den Sättigungscoëfficienten S, d. h.:

$$\text{(VIII)} \quad S = \frac{1}{H}\left[\frac{V(1+\beta\Theta)}{1+\gamma\Theta} PK - \frac{V'(1+\beta\Theta')(1-\varepsilon P')}{1+\gamma\Theta'} P'K'\right]$$

oder:

$$\text{(VIII}_a\text{)} \quad S = \frac{1}{H}\left[\frac{V(1+\beta\Theta)}{1+\gamma\Theta} PK - \frac{(B-H)(1+\beta\Theta')(1-\varepsilon P')}{1+\gamma\Theta'} P'K'\right].$$

Der dem Drucke von P' Atmosphären entsprechende Sättigungscoëfficient ist also die in Cubikcentimetern bei 0° und einer Atmosphäre gemessene Gasmenge, welche zur Sättigung eines Cubikcentimeters Flüssigkeit unter dem Drucke P' nothwendig ist.

Der Begriff des Sättigungscoëfficienten ist von fundamentaler Bedeutung nicht nur für die Darstellung der Absorptionserscheinungen, sondern auch für das Verständniss und die Berechnung der Diffusion der Gase durch absorbirende Substanzen. Um seine Verwechselung, die leider zu oft geschieht, mit dem Bunsen'schen Absorptionscoëfficienten ein für alle mal unmöglich zu machen, sei es mir gestattet, daran zu erinnern, dass die Beziehung zwischen diesen beiden Grössen folgende ist. Bei den Drucken, die nur sehr wenig von einer Atmosphäre verschieden sind, und bei welchen die absorbirte Gasmenge dem Drucke, unter dem die Absorption stattfindet, näherungsweise proportional ist, gilt die von Bunsen[1]) aufgestellte und den in § 3 der ersten Abhandlung entwickelten Principien entsprechend jetzt corrigirte Gleichung:

$$\text{(IX)} \qquad A = \frac{1}{H}\left[\frac{V(1+\beta\Theta)}{1+\gamma\Theta}\frac{P}{P'}K - \frac{V'(1+\beta\Theta')}{1+\gamma\Theta'}K'\right],$$

wo A der Bunsen'sche Absorptionscoëfficient ist, und P und P' die Drucke, unter welchen die Gasmenge vor und nach der Absorption gemessen worden ist, bedeuten. Will man den Sättigungscoëfficienten für den Druck P' wissen, so hat man die Gl. (IX) mit P' zu multipliciren, wodurch man erhält:

$$\text{(X)} \qquad AP' = \frac{1}{H}\left[\frac{V(1+\beta\Theta)}{1+\gamma\Theta}PK - \frac{V'(1+\beta\Theta')}{1+\gamma\Theta}P'K'\right] = S,$$

und wenn $P' = 1$:

$$\text{(XI)} \qquad A = S.$$

Diese Beziehung, die ich zuerst in meiner Abhandlung „über die Gesetze, nach welchen die Gase sich in flüssigen, festflüssigen und festen Körpern verbreiten“[2]) entwickelt habe, erweist sich jetzt als nur für Drucke gültig, die sehr

1) Bunsen, l. c. p. 193.

2) v. Wroblewski, Wied. Ann. **2.** p. 483. 1877 u. **4.** p, 268. 1878.

wenig von einer Atmosphäre verschieden sind, da das Henry-Dalton'sche Absorptionsgesetz, welches die Grundlage sowohl der Bunsen'schen Gleichung wie der Beziehung zwischen diesen beiden Grössen bildet, mit dem Wachsen des Druckes — wie dies gleich gezeigt werden soll — seine Gültigkeit verliert.

§ 12. Vernachlässigungen.

Bei der Berechnung der Versuche habe ich die Compressibilität des Glases vernachlässigt, d. h. das Product $\varepsilon P'$ in der Gl. (VIII_a) gleich 0 gesetzt, da man erstens ε nicht genau kennt und da zweitens diese Vernachlässigung — wie die Rechnung zeigte — ohne Einfluss auf das Endresultat ist. Eine viel weniger erlaubte Vernachlässigung wurde dadurch begangen, dass die Grösse H, d. h. das Volumen des Wassers als constant angenommen wurde, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist, da dieses Volumen einerseits durch den Druck vermindert, andererseits durch die Sättigung mit der Kohlensäure vergrössert wird. Die Compressibilität des mit der Kohlensäure gesättigten Wassers ist nie gemessen worden und lässt sich vor der Hand gar nicht übersehen. Die Ausdehnung des Wassers durch Sättigung mit der Kohlensäure ist von Mackenzie und Nichols nur bis zu dem Drucke von einer Atmosphäre gemessen worden.[1]) Sie fanden, dass sie der absorbirten Gasmenge direct proportional ist. Dieser Ausdehnungscoëfficient bei der Temperatur von 12° — bei welcher der Absorptionscoëfficient gleich 1,1018 ist — betrug nach der einen Methode 0,001 450, nach der anderen 0,001 406 also im Mittel 0,001 428.

Um uns eine angenäherte Vorstellung von dem Einfluss der gemachten Vernachlässigung zu verschaffen, wollen wir annehmen, dass die Resultate von Mackenzie und Nichols auch für die höchsten Drucke gültig bleiben, und dass die Compressibilität des gesättigten Wassers dieselbe ist wie die des gasfreien. Es soll also bei der Temperatur von 12° C.:

$$H = h\left(1 - \varepsilon' P'\right)\left(1 + 0{,}001\,428 \cdot \frac{S}{1{,}1018}\right)$$

1) Mackenzie u. Nichols, Wied. Ann. 3. p. 134—142. 1878.

sein, wo ε' nach Versuchen von Jamin, Amaury und Descamp gleich 0,000 045 7 ist.[1]) Aus dem § 13 werden wir erfahren, dass bei der Temperatur von 12,4° C. der Werth von S bei $P' = 20$ Atmosph. 17,11 und bei $P' = 30$ Atmosph. 23,25 ist. Setzt man $h = 1$, so findet man:

H bei 20 Atmosph. = 1,021,
" " 30 " = 1,029.

Die Versuchsreihe IV lieferte für den Druck von 29,3 Atmosph. $S = 23{,}191$. Berechnet man diesen Versuch mit Berücksichtigung, dass H im Verhältniss von 1 zu 1,029 vergrössert werden muss, so bekommt man $S = 23{,}512$, d. h. eine Zahl, die um etwa 1,5 Proc. grösser ist. Daraus ergibt sich, dass die von mir begangene Vernachlässigung bei den Drucken, bis zu welchen ich meine Versuche berechnet habe, noch zulässig war. Ich muss aber ausdrücklich bemerken, dass dies bei einer Flüssigkeit, die die Kohlensäure stärker absorbirt als Wasser, nicht gehen würde.

§ 13. Die Gesetze der Löslichkeit der Kohlensäure im Wasser. Die Ungültigkeit des Henry-Dalton'schen Gesetzes.

Die Resultate meiner Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt, die bereits der pariser Academie der Wissenschaften am 15. Mai d. J. mitgetheilt war[2]):

P Druck in Atmosph.	S Sättigungscoëfficient		$\frac{S}{P}$	
	bei 0°	bei 12,43°	bei 0°	bei 12,43°
1	1,797	1,086	1,797	1,086
5	8,65	5,15	1,730	1,030
10	16,03	9,65	1,603	0,965
15	21,95	13,63	1,463	0,909
20	26,65	17,11	1,332	0,855
25	30,55	20,31	1,222	0,812
30	33,74	23,25	1,124	0,775

Diese Zahlen sind aus sehr vielen Versuchsreihen auf folgende Weise abgeleitet worden. Nachdem jede Reihe auf dem in Quadratmillimeter getheilten Papier gezeichnet

1) Jamin u. Bouty, Cours de physique (3) 1. p. 166. 1878.
2) v. Wroblewski, Compt. rend. 94. p. 1355. 1882.

worden ist, sind aus der zugehörigen Curve die Sättigungscoëfficienten für Drucke von 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Atmosphären genommen worden. Die in der Tabelle angegebenen Werthe von *S* sind die Mittel von allen auf diese Weise erhaltenen Werthen. Für den Druck von einer Atmosphäre sind die von Bunsen angegebenen Werthe genommen.

Mit den Bestimmungen bei 0° konnte ich nicht weiter als bis 30 Atmosph. gehen, da bei diesem Drucke die geringste Unvorsichtigkeit bei der Druckänderung genügt, um das Hydrat zu erzeugen und dadurch die Versuchsreihe zu verderben. Hat sich nämlich das Hydrat gebildet, so kann man sich von ihm nicht anders befreien als durch Aufheben des Druckes im Apparate, und da dabei das Wasser auf der ganze Röhre sich ausbreitet, so ist es unmöglich, die Versuchsreihe fortzusetzen. Die Versuche bei 12,43° habe ich bis etwa 40 Atmosph. ausgedehnt. Ich begnüge mich hier mit der Mittheilung der Zahlen blos bis zu dem Drucke von 30 Atmosph., da ich die Dimensionen des Apparates abzuändern und die Versuche bis zu dem Liquefactionsdruck der Kohlensäure bei dieser Temperatur in nicht zu ferner Zeit auszudehnen denke.

Aus der Tabelle ergeben sich folgende zwei Gesetze der Löslichkeit der Kohlensäure im Wasser:

1) Bleibt die Temperatur constant und wächst der Druck, so wächst der Sättigungscoëfficient bei weitem langsamer als der Druck und nähert sich einem Grenzwerth.

2) Bleibt der Druck constant, so wächst der Sättigungscoëfficient, wenn die Temperatur sinkt.

Das Vorhandensein eines Grenzwerthes der Löslichkeit lässt sich sowohl aus dem Verlauf der Sättigungscurve schliessen, als auch aus der Thatsache, dass die flüssige Kohlensäure sich mit dem Wasser nicht mischt. Ob dieser Grenzwerth für jede Temperatur derselbe ist oder nicht, dies kann nur durch weitere Untersuchungen entschieden werden. Und gerade aus diesem Grunde wird es wichtig sein, die Versuche bei höheren Temperaturen bis zu dem

Liquefactionsdrucke, soweit dies durch die Bildung des Hydrats nicht gestört wird, zu treiben.[1])

Aus diesen Gesetzen ergibt sich, dass das von Henry und Dalton aufgestellte Absorptionsgesetz, nach welchem die Menge des absorbirten Gases dem Drucke proportional sein soll, für Kohlensäure und Wasser ungültig ist.

§ 14. Kritik der Versuche von Khanikof und Louguinine.

Ehe wir zur Besprechung weiterer Consequenzen der Gesetze der Löslichkeit übergehen, müssen wir eine ältere Arbeit, die sich auf die Absorption der Kohlensäure durch Wasser bezieht, der Kritik unterwerfen. Die Resultate dieser Arbeit, welche von Khanikof und Louguinine vor 15 Jahren im Laboratorium und unter der persönlichen Leitung von Regnault ausgeführt wurde[2]), sind fast in alle Lehrbücher der Physik und Chemie übergegangen und haben wesentlich zur Verbreitung falscher Vorstellungen über die Absorption der Gase durch Flüssigkeiten beigetragen. Der Fall wird um so interessanter, als die Resultate nicht etwa die Folge der falsch angestellten Versuche sind, sondern auf der Anwendung falscher Principien zur Berechnung der Gasmengen unter hohem Drucke beruhen. Diese Resultate verschwinden, sobald man die Versuche von Khanikof und Louguinine mit Hülfe der im § 3 der ersten Abhandlung aufgestellten Gleichungen für das Messen der Gase unter hohen Drucken berechnet.

Die genannten Forscher suchten die Löslichkeit der Kohlensäure im Wasser bei Drucken bis zu vier Atmosph. und bei der Temperatur von 15° C. zu bestimmen. Die Resultate ihrer Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

1) Das Vorhandensein dieses Grenzwerthes ergibt sich ebenfalls aus dem Zusammenhange zwischen der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit und der in dieser Flüssigkeit gelösten Gasmenge. Man sehe meine Noten über diesen Zusammenhang in Compt. rend. **95.** p. 284—287 u. p. 342 bis 343. 1882.

2) Khanikof und Louguinine, Ann. d. chim. et d. phys. (4) **11.** p. 412—433. 1867.

P Druck in Atmosphär.	S Sättigungs-coëff. bei 15°	$\frac{S}{P}$	P Druck in Atmosphär.	S Sättigungs-coëff. bei 15°	$\frac{S}{P}$
0,9180	0,9441	1,0283	2,8798	3,1764	1,1029
1,0645	1,1619	1,0915	3,1171	3,4857	1,1182
1,6966	1,8647	1,0991	3,3605	3,7152	1,1055
1,934	2,1623	1,1180	3,603	4,0031	1,1110
2,6343	2,9076	1,1037	4,0914	4,5006	1,1000

Sie haben aus diesen Zahlen geschlossen, dass der Sättigungscoëfficient etwas schneller als der Druck wächst.

Die experimentelle Seite der Untersuchung bedarf keiner Kritik, da die genannten Forscher selbst die Mängel ihrer Methode angegeben haben. Sie konnten keine Controlversuche machen, da ihre Methode ihnen nicht gestattete, die Versuche in umgekehrter Ordnung auszuführen. Sie machten die Bestimmungen nur bei wachsendem Drucke, nie aber bei abnehmendem. Andererseits waren sie nie sicher, ob die Wassermenge, die zu einer und derselben Versuchsreihe diente, nicht mit dem zunehmenden Drucke wuchs, und ob das zu schnelle Wachsen des Sättigungscoëfficienten nicht theilweise diesem sehr möglichen Fehler zuzuschreiben war.[1]) Ich erlaube mir nur eins hervorzuheben, was die Verfasser nicht erwähnt haben. Während aus ihren Versuchen der Absorptionscoëfficient (durch Interpolation zwischen den Werthen von S für $P = 0{,}91804$ und $P = 1{,}0645$) sich zu 1,11 ergibt, liefern die Bunsen'schen Bestimmungen 1,002, d. h. einen Werth, welcher um etwa 11 Proc. kleiner ist. Diese so grosse Differenz scheint mir nicht zu Gunsten der Methode zu sprechen.

Der Irrthum aber, auf welchem die Resultate von Khanikof und Louguinine beruhen, ist, wie gesagt, anderswo zu suchen. Um die Versuche zu berechnen, benutzten sie die Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad S = \frac{1}{H}\left(\frac{VP}{1+\gamma\Theta} - \frac{V'P'}{1+\gamma'\Theta}\right),$$

wo S, H, V, V', P, P', Θ und γ dieselbe Bedeutung wie in der Gl. (VIII) haben. $VP/(1+\gamma\Theta)$ stellt also die bei

1) Um die Möglichkeit dieses Fehlers zu verstehen, sehe man die Originalabhandlung.

gewöhnlichem Druck gemessene und mit Hülfe des Ausdehnungscoëfficienten γ, welchen die Kohlensäure unter dem Drucke von einer Atmosphäre hat, auf 0° reducirte Gasmenge dar. Obgleich dieser Ausdruck mit dem Coëfficienten K nicht multiplicirt ist, so ist doch der dadurch begangene Fehler verschwindend klein, da K bei dem Drucke von einer Atmosphäre sich sehr wenig von Eins unterscheidet. Ganz anders steht es mit dem Ausdruck $V'P'/(1+\gamma'\Theta)$, welcher die Gasmenge unter dem Drucke P' (welcher grösser ist als der atmosphärische) darstellen soll. Dieser Ausdruck liefert nicht nur einen zu kleinen Werth wegen der Vernachlässigung von K, sondern auch dadurch, dass Khanikof und Louguinine infolge einer falschen Ueberlegung zur Reduction auf 0° den Ausdehnungscoëfficienten nehmen, welchen die Kohlensäure bei dem Drucke P' besitzt. Um diesen doppelten Irrthum deutlicher zu machen, sei es mir gestattet, hier ein kleines Zahlenbeispiel anzuführen. Es sei das von dem Gase, welches sich unter dem Drucke von 4,7225 Atmosphären befindet und die Temperatur von 13° hat, eingenommene Volumen gleich Eins. Dann ist die Gasmenge — den in § 3 der ersten Abhandlung entwickelten Gleichungen zufolge — gleich $\big(V/(1+\gamma\Theta)\big)PK = 4{,}601$, da $\gamma = 0{,}00371$ und $K = 1{,}021$ ist. Nach Khanikof und Louguinine soll aber diese Menge gleich $\big(V/(1+\gamma'\Theta)\big)P = 4{,}498$ sein; da $\gamma' = 0{,}0038598$ ist und an den Factor K gar nicht gedacht wird. Die genannten Forscher waren von der Richtigkeit ihres Verfahrens so überzeugt, dass sie Bunsen einen Vorwurf daraus machten, die Tabelle für $1 + 0{,}00366 \,.\, \Theta$ seinem Werthe beigefügt zu haben.

Nun ist klar, dass bei dieser Art der Berechnung der Sättigungscoëfficient zu gross ausfällt, und dass der Fehler procentisch um so grösser wird, je grösser der Druck ist, da sowohl der nicht beachtete Multiplicator K wie der falsch benutzte Divisor $1+\gamma'\Theta$ mit dem Drucke wachsen. Berechnet man das zweite Glied auf der rechten Seite der Gl. (A) auf richtige Weise, so bekommt man anstatt der vorhergehenden Tabelle die folgende:

P	S	$\frac{S}{P}$	P	S	$\frac{S}{P}$
1,6966	1,8278	1,0773	3,1171	3,3647	1,0794
1,934	2,1162	1,0941	3,3605	3,601	1,0716
2,6343	2,8071	1,0655	3,603	3,8519	1,0691
2,8798	3,0804	1,0696	4,0914	4,3584	1,0652

§ 15. Die Uebersättigung.

Die Grösse der für einen gegebenen Druck möglichen Uebersättigung zu bestimmen, war nicht der Zweck meiner Untersuchungen. Ich habe mich mit dieser Frage nur gelegentlich beschäftigt. Der Begriff der Uebersättigung ist übrigens keiner präcisen Definition fähig, da die Sache immer davon abhängt, wieviel man Flüssigkeit zu dem Versuche genommen hat, und unter welchen Bedingungen sie sich befindet. Je grösser nämlich die Flüssigkeitsmenge ist, desto leichter lässt sie sich übersättigen, und desto schwieriger ist es, durch blosse Druckabnahme das absorbirte Gas aus ihr zu entfernen. Dass der Zustand der Ruhe die Uebersättigung begünstigt und derjenige der Bewegung der Flüssigkeit sie aufhebt, versteht sich von selbst.

Ich will hier nur eine Bemerkung machen, die sich übrigens aus den Gesetzen der Löslichkeit ergibt: die Uebersättigung (gemessen in Procenten der dem Drucke P entsprechenden Sättigung S) kann bei niedrigen Drucken bedeutend grösser sein als bei höheren; sie erreicht ebenfalls einen grösseren Werth bei niedrigeren Temperaturen als bei höheren.

§ 16. Der Satz von der Bildung der Hydrate der Gase.

Obgleich man seit langer Zeit weiss, dass manche Gase — wie z. B. Chlor, Brom, schweflige Säure, Schwefelwasserstoff — unter hinreichendem Drucke und bei einer hinreichend niedrigen Temperatur eine Verbindung mit Wasser eingehen[1]), so ist doch bis jetzt nie die Frage nach den Bedingungen gestellt worden, die erfüllt werden müssen, damit

1) Vgl. Wöhler, Lieb. Ann. 85. p. 374—376. 1853.

die Bildung des Hydrates zu Stande kommt. Ich habe deshalb folgenden Satz aufgestellt:

Das Wasser kann nur dann in das Hydrat eines Gases verwandelt werden, wenn es in der Lösung diejenige Gasmenge enthält, welche der Zusammensetzung des Hydrates entspricht.[1])

Dieser Satz kann selbstverständlich nur für Verbindungen gültig sein, welche, um zu Stande zu kommen, eines Druckes bedürfen.

§ 17. Der Zusammenhang zwischen den Gesetzen der Löslichkeit der Kohlensäure im Wasser und der Bildung des Hydrates der Kohlensäure.

Die Anwendung des im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Satzes auf das Hydrat der Kohlensäure zeigt einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen den Gesetzen der Löslichkeit des Gases und der Bildung des Hydrates und erklärt alle Eigenthümlichkeiten, welche die Bildung dieses Hydrates begleiten, und welche in § 7 der ersten Abhandlung kurz zusammengefasst worden sind.

Der Zusammensetzung des Hydrates $CO_2 + 8H_2O$ entspricht die Löslichkeit $S = 155$ oder mit anderen Worten: Das Wasser kann sich nur dann in dieses Hydrat verwandeln, wenn ein Volumen Wasser 155 Volumina CO_2 (gemessen bei 0^0 und einer Atmosphäre) enthält.

Ein Blick auf die Tabelle des § 13 zeigt, dass diese Löslichkeit durch den Druck allein nicht erreicht werden kann. Bei 0^0 erreicht die Löslichkeit unter dem Drucke von 30 Atmosphären nur den Werth von 33,74. Aus dem Verlaufe der Löslichkeitscurve kann geschlossen werden, dass die Erreichung des Liquefactionsdruckes die Löslichkeit nicht sehr merklich vergrössert. Andererseits mischt sich die flüssige Kohlensäure mit dem Wasser nicht. Daraus folgt, dass das Hydrat $CO_2 + 8\,H_2O$ bei 0^0 durch den Druck allein nicht erzeugt werden kann, was die Erfahrung auch bestätigt. Noch weniger kann dieses Hydrat bei einer höheren Tem-

1) v. Wroblewski, Compt. rend. **94.** p. 1356. 1882.

peratur durch Druck allein erzeugt werden, da dann die nothwendige Löslichkeit noch weniger zu erreichen ist.

Aus den Gesetzen der Löslichkeit folgt aber, dass die Löslichkeit des Gases wächst, wenn die Temperatur sinkt. Wäre es deshalb möglich, das Wasser, ohne es gefrieren zu lassen, bedeutend unter 0^0 abzukühlen, so würde die zur Bildung des Hydrates nothwendige Löslichkeit erreicht werden. Diese Bedingung wird an der Berührungsstelle der Kohlensäure mit dem Wasser durch plötzliche Expansion des Gases erfüllt. Ehe die durch diese Expansion abgekühlte äusserst dünne Schicht des Wassers Zeit hat, zu gefrieren, verwandelt sie sich in das Hydrat.

Dies erklärt uns, warum das Hydrat der Kohlensäure nur an der Wand der Eudiometerröhre, wo die Wasserschicht äusserst dünn ist, oder noch höchstens an der freien Oberfläche des Wassers sich bildet, und warum es nicht möglich ist, eine etwas grössere Menge Wasser in Hydrat zu verwandeln.[1])

Wenn wir jetzt die Frage nach den Bedingungen stellen, bei welchen die Bildung des hypothetischen Hydrates $CO_2 + H_2O$ — vorausgesetzt, dass seine Existenz möglich ist — zu erwarten wäre, so sehen wir, dass dazu die Erreichung der Löslichkeit $S = 1236$ nothwendig ist. Nun ist aber wenig Hoffnung vorhanden, dass es gelingen wird, das Wasser bis zur Erreichung dieser Löslichkeit abzukühlen, ohne es dabei vorher gefrieren zu machen.

§ 18. Die wahrscheinliche Allgemeinheit der Gesetze der Löslichkeit.

Zum Schluss sei es mir gestattet, ein paar Bemerkungen über die wahrscheinliche Allgemeinheit der Gesetze der Löslichkeit der Kohlensäure im Wasser zu machen. Es hat bereits Berthelot[2]) ganz richtig bemerkt, dass die Gesetze

1) Macht man den Versuch mit einer grösseren Menge Wasser und sucht es durch eine Reihe von Expansionen in seiner ganzen Masse abzukühlen, so gefriert das Wasser, ehe die nothwendige Sättigung erreicht ist.

2) Berthelot, Mécan. chim. 2. Livre IV. Chap. VII.

der Löslichkeit sowohl für jedes Gas und eine und dieselbe Flüssigkeit wie für ein und dasselbe Gas und verschiedene Flüssigkeiten ganz andere sein können. Andererseits haben die Untersuchungen von Bunsen gezeigt, dass für jedes Gas und jede andere Flüssigkeit eine andere Interpolationsformel zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen der Löslichkeit des Gases und der Temperatur aufgestellt werden muss. Wenn man aber nur den allgemeinen Charakter der Curven, der diesen Formeln entspricht, berücksichtigt, so erscheint das zweite Gesetz der Löslichkeit der Kohlensäure in Wasser als ein Gesetz von ganz allgemeiner Natur. Soweit meine Orientirungsversuche reichen, gibt es keinen einzigen Fall, wo die Löslichkeit des Gases mit dem Sinken der Temperatur abnehmen würde. Nach Bunsen's Versuchen wäre der Absorptionscoëfficient des Wassers für den Wasserstoff zwischen 0° und 20° C. von der Temperatur unabhängig.[1]) Diesem Resultate ist aber kein Vertrauen zu schenken, da aus dem Verhalten des Wasserstoffs im Alkohol geschlossen werden darf, dass die Abhängigkeit von der Temperatur in diesem Falle nur sehr gering sein kann und in den Versuchen von Bunsen durch Beobachtungsfehler verdeckt ist.

Ganz anders aber kann es mit dem ersten Gesetze sein, welches den Zusammenhang zwischen der Löslichkeit des Gases und dem Drucke, unter welchem das Gas sich befindet, angibt. Hier kann die Form der Zunahme der Löslichkeit des Gases mit dem wachsenden Drucke wesentlich davon abhängen, ob ein Grenzwerth für die Löslichkeit des Gases in der betreffenden Flüssigkeit vorhanden ist oder nicht. Bei den Flüssigkeiten, welche mit der flüssigen Kohlensäure nicht mischbar sind, wird das erste Absorptionsgesetz für die Kohlensäure dieselbe allgemeine Form behalten wie für dasselbe Gas beim Wasser. Ganz anders kann es sich aber gestalten bei den Flüssigkeiten, die, wie z. B. Alkohol, Terpentinöl, Chloroform, Aether, in jedem Verhältniss mit der flüssigen Kohlensäure mischbar sind.

Die Feststellung der Gesetze der Löslichkeit der Kohlen-

1) Bunsen, l. c. p. 210.

säure in der zweiten Classe von Flüssigkeiten wird der Gegenstand des nächsten Theiles dieser Untersuchungen sein.

Paris, August 1882.

Nachschrift. Seit der Zeit, als die Resultate der in diesen Abhandlungen beschriebenen Untersuchungen durch die Comptes rendus publicirt worden sind, hat sich die Anzahl der bis jetzt bekannten Hydrate der Gase durch neue Entdeckungen vermehrt. Zuerst hat de Forcrand das bereits im Jahre 1840 durch Wöhler[1]) beschriebene Hydrat des Schwefelwasserstoffes untersucht.[2]) Er hat versucht, die Zusammensetzung des Hydrates direct zu ermitteln und gibt Zahlen an, welche zwischen $H_2S + 12{,}4H_2O$ und $H_2S + 16{,}6H_2O$ schwanken. Die Curve des kritischen Druckes für dieses Hydrat ist sowohl von de Forcrand wie von Cailletet und Bordet[3]) bestimmt worden. Die Zahlen differiren aber stark voneinander. Während de Forcrand für die Temperatur von 25° C. den Druck von elf Atmosphären angibt, finden ihn Cailletet und Bordet zu 16 Atmosphären.

Dann haben Cailletet und Bordet[4]) eine Anzahl von Verbindungen beschrieben, die durch Druck und Expansion erzeugt werden. Zwischen diesen Verbindungen ist das Hydrat des Phosphorwasserstoffes besonders beachtenswerth. Es wird genau auf dieselbe Weise erhalten wie das Hydrat der Kohlensäure, nur braucht die Temperatur nicht so niedrig und der Druck nicht so hoch wie beim letztgenannten Hydrat zu sein. Alle diese Verbindungen sind leider direct nicht analysirbar, und von der Ausführung der Analyse nach meiner Methode und in meinem Apparate kann keine Rede sein, solange alle dazu nothwendigen Hilfszahlen fehlen.

Universität Krakau, October 1882.

1) Wöhler, Lieb. Ann. **33.** p. 125. 1840.

2) de Forcrand, Compt. rend. **94.** p. 967. 1882. Ausführlich in Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris. 1882.

3) Cailletet et Bordet, Compt. rend. **95.** p. 58—61. 1882.

4) Cailletet et Bordet, l. c.

VIII. *Zu K. Strecker's Abhandlungen: Die specifische Wärme der gasförmigen zweiatomigen Verbindungen von Chlor, Brom, Jod u. s. w.; von Ludwig Boltzmann in Graz.*

Schon die erste Experimentaluntersuchung des Hrn. Strecker[1]) habe ich mit meinen Rechnungen[2]) verglichen, nach denen sich das Verhältniss der specifischen Wärmen eines Gases gleich 1,67, 1,4 oder 1,33 ergibt, wenn dessen Molecüle starre Kugeln, resp. Rotationskörper oder andere starre Körper sind. Seitdem hat Hr. Strecker eine Reihe neuer Beobachtungen über das Verhältniss der specifischen Wärmen zweiatomiger Gase veröffentlicht.[3]) Bei der grossen Uebereinstimmung der von ihm für dieses Verhältniss gefundenen Zahlen (vgl. dessen Tabelle IV) mit den von mir theoretisch berechneten (in einigen Fällen 1,4 in anderen Fällen 1,33) kann wohl kaum mehr ein Zweifel sein, dass sich die Molecüle derjenigen Gase, bei denen die specifische Wärme überhaupt constant ist (und dies scheinen wieder alle Gase mit ein- und zweiatomigen Molecülen zu sein), bezüglich ihrer inneren Bewegung nahezu wie starre Körper verhalten. Die Beobachtung Strecker's am Chlorgas wird durch Versuche Martini's[4]) bestätigt, welcher für dieses Gas das Verhältniss der specifischen Wärmen gleich 1,336 und 1,319 findet. Hiernach würden sich die Molecüle des Quecksilbers wie Kugeln, die des Sauerstoffs, Wasserstoffs, Stickstoffs, Kohlenstoffs und deren zweiatomige Verbindungen, sowie auch des Chlor-, Jod- und Bromwasserstoffs wie Rotationskörper, die des Chlors, Jods, Broms und deren Verbindungen untereinander wie feste Körper verhalten, die nicht Rotations-

1) Strecker, Wied. Ann. **13.** p. 20. 1881.

2) Boltzmann, Wien. Ber. **74.** p. 553. 1876. Pogg. Ann. **160.** p. 175. 1877. Wied. Ann. **13.** p. 544. 1881.

3) Strecker, Wied. Ann. **17.** p. 85. 1882.

4) Martini, Atti d. R. Ist. Ven. **5.** p. 7, 15. u. Riv. Scient. Industr. **13.** p. 146 u. 181. 1881. Beibl. **5.** p. 564. 1881.

körper sind. Dass damit der Linienreichthum der Spectra dieser Substanzen ganz wohl vereinbar ist, habe ich a. a. O. bereits besprochen. Dagegen verhalten sich nach den Versuchen von A. Wüllner[1]) die drei- und mehratomigen Molecüle entschieden anders, denselben schliesst sich nach de Lucchi[2]) auch der Phosphordampf an. Gleichwohl scheint es fast, als ob auch bei diesen für niedere Temperaturen sich das Verhältniss der Wärmecapacitäten der Grenze 1,33 nähern würde; dann müssten sich ihre Molecüle bei niederen Temperaturen ebenfalls wie starre Körper verhalten, die nicht Rotationskörper sind, dagegen müsste bei höheren Temperaturen entweder der Zusammenhang der Atome mehr gelockert werden oder sonst eine mehr Energie consumirende Veränderung eintreten, welche die intramoleculare Wärme vergrössert. Näherer Aufschluss hierüber ist wohl wieder nur vom Experimente zu erwarten. Besonders wäre die Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärmen für Schwefel-, Natrium-, Kalium-, Chlorkalium-, Chlorcäsiumdampf, dann für N_2O, CO_2, CH_4, C_2H_4 etc. bei sehr tiefen und sehr hohen Temperaturen, endlich die Untersuchung, ob das Verhältniss der specifischen Wärmen des Phosphordampfes ebenfalls mit der Temperatur veränderlich ist, wünschenswerth. Nach den schönen Versuchen von Kundt und Warburg über den Quecksilberdampf wären derartige Leistungen am ersten von der Kundt'schen Staubfigurenmethode zu hoffen, welcher die mechanische Wärmetheorie schon so viele wichtige Aufschlüsse verdankt.

---

1) A. Wüllner, Wied. Ann. **4.** p. 231. 1878.

2) de Lucchi, Atti d. R. Ist. Ven. **5.** p. 21. 1881. Beibl. **6.** p. 221. 1882.

IX. *Ueber das Leuchten der Flamme; von W. Siemens.*

(Vorgelegt d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin am 9. Nov. 1882.)

Das Licht, welches von verbrennenden Gasen ausgeht, die mit heller Flamme leuchten, ist bekanntlich eine secundäre Erscheinung. Es sind die durch die hohe Temperatur der Verbrennung ausgeschiedenen und zum Glühen gebrachten festen oder auch flüssigen, in der Flamme suspendirten Bestandtheile, von denen die hellen Lichtstrahlen ausgehen. Gase, welche keine festen oder flüssigen Bestandtheile beim Glühen ausscheiden oder durch den Verbrennungsvorgang erzeugen, verbrennen durchgehends mit einer relativ schwach leuchtenden Flamme von bläulicher, aber je nach der verbrennenden Gasart verschiedener Farbe. Man pflegt die Ursache dieses Leuchtens einfach damit zu erklären, dass das durch die Verbrennung hoch erhitzte Gas selbst glühe. Versuche darüber, ob hoch erhitzte, reine Gase wirklich Licht ausstrahlen, sind meines Wissens bisher nicht mitgetheilt. Betrachtungen über die Lichtemission der Sonne, die sich an die Sonnentheorie meines Bruders C. Wilhelm Siemens anknüpfen, und über welche ich der Academie binnen Kurzem eine Mittheilung zu machen gedenke, und gelegentliche Beobachtungen liessen es mir unwahrscheinlich erscheinen, dass erhitzte Gase selbst leuchten, und ich beschloss, darüber einige Versuche anzustellen. Sollten die Versuche einen entscheidenden Charakter erhalten, so mussten sie bei Temperaturen angestellt werden, welche höher waren, als diejenige, welche durch die leuchtende Verbrennung erzeugt wird. Ich überzeugte mich bald, dass aus diesem, sowie aus anderen Gründen im Laboratorium anzustellende Versuche kaum ein befriedigendes Ergebniss erwarten liessen. Dagegen schienen mir die grossen, mit Schwelgas geheizten Regenerativöfen der Glasfabrik meines Bruders Friedrich Siemens in Dresden vorzüglich zur Anstellung solcher Versuche geeignet. Mein Bruder ging bereitwillig auf meinen Wunsch, mit einem solchen Ofen einen Versuch anzustellen, ein und fand meine

Erwartung in vollem Maasse bestätigt. Es wurde ein zur Hartglasfabrikation nach der Methode meines Bruders dienender Regenerativofen verwendet, der in einem abgesonderten Raume stand, welcher in der Nacht vollkommen dunkel zu machen war. Der Ofen hatte eine rechteckige Herdsohle von circa $2^1/_2$ m Länge und $1^1/_2$ m Breite und eine grösste Höhe des Ofenraumes von circa 160 cm. In der Mitte jeder der langen Seiten des Ofens befanden sich gegenüberstehende Oeffnungen, welche einen freien Durchblick durch den Ofenraum gestatteten. Der Ofen konnte mit Leichtigkeit so hoch erhitzt werden, als die aus besonders feuerfesten Steinen gebildeten Ofenwände gestatteten. Es ist dies die Stahlschmelzhitze, welche zwischen 1500 und 2000^0 C. beträgt. War diese Temperatur erreicht, und wurde darauf der weitere Zutritt von Gas und Luft zum Ofen abgestellt, so erhielten die heissen Wände des Ofens die Temperatur des Inneren längere Zeit auf einer ziemlich gleichen Höhe, wenn jeder Luftwechsel verhindert wurde. Vor die Ofenöffnungen wurde nun eine Reihe von gut berussten Schirmen aufgestellt, mit einer centralen Oeffnung, welche einen Durchblick durch den heissen Ofen gestattete, ohne dass von den Ofenwänden ausgehende Strahlen das Auge treffen konnten. Nachdem der Ofen überall vollständig abgedichtet und alles Licht aus dem Raume entfernt war, so dass vollständige Finsterniss in demselben herrschte, ergab sich, dass von der hoch erhitzten Luft im Ofen nicht der geringste, dem Auge bemerkliche Lichtschein ausging. Wurde eine leuchtende Flamme in den Raum gebracht, so genügten schon die durch dieselbe erzeugten Reflexe, das Gesichtsfeld schwach zu erleuchten. Zum Gelingen des Versuches war es nothwendig, im Ofen jede Verbrennung zu beseitigen und solange zu warten, bis die Ofenluft möglichst staubfrei war. Jede Flamme im Ofen, auch wenn sie scheinbar nicht bis in die Gesichtslinie reichte, und die geringste Staubmenge in demselben erhellten das Gesichtsfeld.

Als Resultat dieser Versuche meines Bruders musste angenommen werden, dass die bisherige Anschauung, dass hoch erhitzte Gase selbst leuchten, nicht richtig ist. In dem

Ofen befanden sich die Producte der früheren Verbrennung, gemischt mit atmosphärischer Luft, also Sauerstoff, Stickstoff, Kohlensäure und Wasserdampf. Wenn auch nur eines dieser Gase selbstleuchtend wäre, so müsste das Gesichtsfeld stets erhellt gewesen sein. Sind die Gase aber nicht selbstleuchtend bei der Verbrennungstemperatur, so kann das schwache Licht, welches die Flamme verbrennender Gase zeigt, die keine festen oder flüssigen Bestandtheile ausscheiden, nicht als Glüherscheinung der erhitzten Verbrennungsproducte erklärt werden. Es erschien mir dann auch wahrscheinlich, dass erhitzte Gase ebenso wenig Wärme als Lichtstrahlen aussenden würden. Um auch hierüber einen Versuch anzustellen, und um mich durch eigene Beobachtung von der Richtigkeit der von meinem Bruder constatirten Thatsache zu überzeugen, begab ich mich mit Hrn. Dr. Frölich nach Dresden. Hinsichtlich des Leuchtens der heissen Ofengase erhielten wir im allgemeinen dieselben Resultate, die mein Bruder und dessen Ingenieur Hr. Herrmann, welcher sich den Versuchen mit grossem Eifer und Verständniss gewidmet hatte, erhalten hatten. Allerdings blieb das Gesichtsfeld nicht immer ganz dunkel, und es gelang oft nur für kurze Zeit, dies zu beobachten. Bei der grossen Empfindlichkeit des durch die herrschende Dunkelheit geschärften Auges und bei der Unmöglichkeit, jede mit Staubbewegung verbundene Luftbewegung im Ofen zu verhindern, sowie jeden weiteren Gaszutritt abzusperren, ist dies auch leicht erklärlich. Wir haben aber wiederholt völlige Dunkelheit des Gesichtsfeldes constatirt. Leider misslangen die Versuche, durch empfindliche Thermosäulen die Frage der Emission von Wärmestrahlen durch hoch erhitzte Gase zur Entscheidung zu bringen. Die geringe Grösse der Oeffnungen, sowie die erhebliche Entfernung vom Ofen, in welcher die Thermosäule aufgestellt werden musste, verringerten die Empfindlichkeit der Messung derart, dass zwischen der leuchtenden Flamme und der erhitzten Luft kein Unterschied nachgewiesen werden konnte.

Ich überzeugte mich aber später durch einen anderweitigen, ganz einfachen Versuch, dass meine Vermuthung

eine irrige war. Es wurde eine gewöhnliche Gaslampe mit ringförmigem Brenner und kurzem Glascylinder durch ein vor derselben aufgestelltes dickes Brett derartig abgeblendet, dass das Brett die ganze Lampe nebst Glascylinder verdeckte. Eine empfindliche Thermosäule wurde nun derart aufgestellt, dass die Axe des Rohres, in welchem die Thermosäule angebracht war, etwas höher lag als die obere Kante des Brettes. Das Rohr war mit einer Blende versehen und um eine verticale Axe drehbar. Da die Zimmerwände ziemlich gleiche Temperatur hatten, so war die Ablenkung des eingeschalteten empfindlichen Spiegelgalvanometers nur unbedeutend, wenn die Rohraxe so eingestellt war, dass der von der Flamme emporsteigende heisse Luftstrom nicht in dem durch die Blende beschränkten Gesichtsfelde der Thermosäule lag. Wurde aber die letztere so gedreht, dass die Visirlinie in den heissen Luftstrom fiel, so trat sofort eine Ablenkung ein, die erst wieder zurückging, wenn durch weitere Drehung der Thermosäule oder durch Zurückdrehung derselben der heisse Luftstrom wieder aus dem Gesichtsfelde entfernt wurde. Dasselbe Resultat wurde erzielt, wenn die Lampe selbst hinter dem dieselbe verdeckenden Brette verschoben, und abwechselnd in das Gesichtsfeld gebracht oder aus demselben entfernt wurde. Dass die von heissen Gasen ausgehende Wärmestrahlung im Vergleich mit der von gleich heissen festen Körpern ausgehenden nur sehr klein ist, zeigt die grosse Ablenkung der Scala des Galvanometers, welche eintritt, wenn ein Stück feinen Drahtes oder ein anderer fester Körper in den heissen Luftstrom gehalten wird. Andererseits ist sie aber doch viel zu bedeutend, um annehmen zu können, dass nur im Luftstrome suspendirte Staubtheile die Wärmestrahlung veranlassten.

Es liegt nahe, zu fragen, ob nicht die Lichtausstrahlung heisser Gase in ähnlicher Weise wie die Wärmestrahlung nur ausserordentlich schwach und dadurch leicht zu übersehen wäre, wenn die Temperatur nicht sehr hoch ist. Diese Möglichkeit muss allerdings zugegeben werden, und es ist sehr wünschenswerth, dass die Versuche bei noch weit höheren Temperaturen und mit schärferen Hülfsmitteln wiederholt

werden, um die Temperaturgrenze festzustellen, bei welcher erhitzte Gase unzweifelhaft selbstglühend werden. Die Thatsache, dass Gase bei einer Temperatur von mehr als 1500° C. noch nicht leuchten, beweist jedoch, dass das Glühen der Flamme nicht als Selbstglühen der Verbrennungsproducte zu erklären ist. Dafür spricht auch schon die Betrachtung der Flamme selbst. Wenn man für schnellere Mischung der zur Verbrennung gelangenden Gase sorgt, so wird die Flamme kürzer, weil der Verbrennungsprocess schneller verläuft, und gleichzeitig heisser, weil weniger kalte Luft mit den verbrennenden Gasen gemischt wird. In gleicher Weise wird die Flamme verkürzt und heisser, wenn die Gase vor der Verbrennung stark vorgewärmt werden. Da die aufsteigenden Verbrennungsproducte noch einige Zeit die Temperatur der Flamme nahezu beibehalten, so müsste ein umgekehrtes Verhalten stattfinden, wenn die Gase selbstleuchtend wären. Das Leuchten der Flamme hört aber in einer scharfen Begrenzungslinie über derselben auf und fällt offenbar mit der Vollendung der chemischen Action zusammen. Es muss mithin diese selbst und nicht die durch dieselbe erzeugte Erhitzung der Verbrennungsproducte die Ursache des Leuchtens sein. Nimmt man an, dass die Gasmolecüle mit einer Aetherhülle umgeben sind, so muss bei der chemischen Verbindung zweier oder mehrerer solcher Molecüle auch eine veränderte Lagerung der Aetherhüllen derselben eintreten. Die hierdurch bedingte Bewegung der Aethertheilchen muss sich durch Schwingungen ausgleichen, welche die Ausgangspunkte der Licht- und Wärmewellenzüge bilden können. In ganz ähnlicher Weise kann man sich die Lichterscheinung vorstellen, welche stets auftritt, wenn ein electrischer Strom durch Gase fortgeleitet wird. Wie ich schon vor längerer Zeit bei der Beschreibung des Ozonapparates auseinandergesetzt habe[1]), werden alle Gase Leiter der Electricität, wenn das ihnen zustehende, von mir so bezeichnete Polarisationsmaximum überschritten wird. Es besagt dies, dass das Dielectricum nur eine von seiner Natur, d. i. bei Gasen von

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **102.** p. 66. 1857.

ihrer Dichtigkeit abhängige Menge Electricität zu übertragen vermag, und dass bei grösserer Steigerung der Potentialdifferenz der Vorgang der Fortleitung der Electricität durch das Dielectricum eintritt. Verhindert man beim Luftcondensator die Funkenbildung wie beim Ozonapparat durch eine zwischen die Collectorplatten eingeschobene Glas- oder Glimmerplatte, so tritt in der Luftschicht bei Ueberschreitung einer bestimmten, vom Abstande der Platten und der Dichtigkeit des Gases abhängigen Spannungsdifferenz eine Glüherscheinung in der ganzen Gasmenge ein, welche sich bei der Entladung des Condensators wiederholt. Es ist dann für diese Potentialdifferenz das Gas ein Leiter der Electricität geworden, und das Dielectricum des Condensators besteht jetzt nur noch aus der Glas- oder Glimmerplatte, welche ein weit höheres Polarisationsmaximum hat, also erst viel später leitend wird, wie das Gas. Da der durch Gas geleitete Strom stets mit chemischer Action verbunden zu sein scheint, so könnte man sich die Glüherscheinung in ähnlicher Weise wie bei der Flamme durch oscillirende Umlagerung der Aetherhüllen der Gasmolecüle, durch welche der Uebergang der Electricität vermittelt wird, erklären. Es wäre dann das Flammenlicht mit demselben Rechte electrisches Licht zu nennen, wie das Licht der Ozonröhre oder der Geissler'schen Röhre, welche sich von ersterer principiell nur dadurch unterscheidet, dass sie ein Dielectricum von äusserst geringem Polarisationsmaximum enthält. Für diese Uebereinstimmung der Ursache des Leuchtens der Flamme und der von electrischen Strömen durchflossenen Gase spricht auch die Gleichartigkeit der Flammenerscheinung in Stärke und Lichtfarbe.

X. *Destillation im Vacuum; von* A. *Schuller.*

(Vorgetragen in der Sitzung der ungar. Acad. d. Wiss. am 13. Nov. 1882.

(Hierzu Taf. III Fig. 14—16.)

Die vor zwei Jahren veröffentlichte selbstthätige Quecksilberluftpumpe[1]) ermöglicht, solche Arbeiten ohne unverhältnissmässigem Zeitverlust auszuführen, die nicht nur ein sehr vollkommenes Vacuum, sondern auch lange anhaltendes Evacuiren voraussetzen. Dieser Art sind besonders manche Destillationen, resp. Sublimationen, bei denen aus dem verdampfenden Körper entweder occludirte Gase frei werden, oder durch dessen theilweise Zersetzung gasförmige Producte entstehen. Es scheint, dass Destillationen im luftleeren Raume mehr Mühe verdienen, als bisher darauf verwendet wurde, schon deshalb, weil dadurch manche Bestandtheile von Mischungen, die mit den gebräuchlichen Mitteln nur schwer oder gar nicht abgesondert werden können, in vielen Fällen leicht trennbar sein müssen. Denn steigert man die Temperatur einer Mischung, so wird im allgemeinen ein Bestandtheil früher eine bemerkbare Spannung erreichen als die übrigen, in welchem Falle jener Theil im Vacuum allein destilliren muss. Dieser Vortheil mangelt in vielen Fällen der gewöhnlichen Destillation, da bei der erforderlichen hohen Temperatur gewöhnlich schon mehreren Theilen eine merkliche Dampfspannung zukommt, sodass sie zusammen verdampfen und durch Destillation nicht getrennt werden können. Ueberdies vollziehen sich Destillationen im Vacuum bei so niedriger Temperatur, welcher selbst leicht zersetzbare Körper in vielen Fällen widerstehen.

Seit mehr als einem Jahre beschäftige ich mich mit derlei Versuchen. Meine Absicht war, die Veröffentlichung derselben zu verschieben, bis sie einen gewissen Abschluss erreichten. Inzwischen hat Hr. Demarçay eine vorläufige Mittheilung über die Verdampfung der Metalle im Vacuum[2]) veröffentlicht, was mich bestimmt, über meine bisher erlangten

---

1) Schuller, Wied. Ann. **13.** p. 528. 1881.

2) Demarçay, Compt. rend. **95.** p. 183. 1882.

Resultate zu berichten, um so mehr als dieselben zum Theil von denen des Hrn. Demarçay abweichen.

In Bezug auf die befolgte Methode ist das Folgende zu erwähnen. Der zu verdampfende Körper wurde in ein wagrechtes Glasrohr, und zwar in die Nähe des zugeschmolzenen Endes gebracht; für feste nicht schmelzende Körper wurden glatte Röhren, für flüssige oder schmelzende Körper die in Fig. 14 dargestellten, stellenweise eingedrückten Röhren verwendet. Das offene Ende des Rohres stand mittelst eines Schliffstückes mit der Pumpe in Verbindung. Zum Erhitzen verwende ich eine Eisenröhre, die auf einem Verbrennungsofen für organische Analysen liegt. Um den Verlauf der Destillation bequem verfolgen zu können, ist der Ofen auf einem Schlitten verschiebbar, ohne dass dabei das Destillationsrohr berührt wird. Bei genügender Dicke der eisernen Röhre, die gewöhnlich nur an der Stelle erwärmt wird, wo sich die verdampfende Substanz befindet, sind die verschiedenen Theile des Destillationsrohres langsam abnehmenden Temperaturen ausgesetzt, wodurch die Trennung verschieden flüchtiger Theile ermöglicht wird. Ohne diese Vorsicht würden sich die verschiedenen Bestandtheile nur sehr unvollständig trennen, namentlich bei Sublimationen, wo wegen des festen Aggregatzustandes gewöhnlich auch der flüchtigere Theil nur in dem Maasse verdampfen kann, wie es der weniger flüchtige thut. Der der Schliffstelle nahe Theil des Rohres wird immer freigelassen, damit auch leicht flüchtige Antheile sich im Rohre condensiren. Bei sehr leicht flüchtigen Körpern wird vor dem Destillationsrohr noch ein von Kältemischung umgebenes Sammelgefäss Fig. 15 eingeschaltet. Damit das Rohr Fig. 14 nicht nach jeder Destillation zerschnitten werden müsse, bedient man sich zum Aufsaugen der Producte des in Fig. 14 punktirten Rohres.

Da es bei solchen sich oft wiederholenden Arbeiten von Wichtigkeit ist, die Verbindung mit der Pumpe leicht und schnell bewerkstelligen zu können, so will ich erwähnen, dass ich an Stelle das a. a. O. angegebenen trichterförmigen Quecksilberverschlusses gewöhnliche ebenfalls ungefettete ineinander geschliffene Röhren *A* und *B* Fig. 15 in lothrechter

Stellung verwende, wovon die untere positive mit einem durchbohrten Korkstöpsel und darauf geschobenen 2—3 cm langen weiteren Glasrohre versehen wird. Letzteres dient zur Aufnahme des den Verschluss bildenden Quecksilbers. Dieser Verschluss ist sehr leicht herzustellen und hält ebenso luftdicht wie der frühere, ohne Zuhülfenahme irgend einer anderen Sperrflüssigkeit.[1]) Zwei solcher Verbindungen, die eine an der Pumpe, die andere in der Nähe des Destillationsrohres können leicht miteinander verbunden werden, wenn die negativen Schliffe, zu einem ┌──┐-förmigen Rohre vereinigt, auf die positiven Schliffe aufgesetzt werden, wobei die lothrechten Rohrtheile bis zum Erweichen erwärmt und dabei sanft aufgedrückt werden. Noch will ich hinzufügen, dass zum Nachfüllen des Quecksilbers in die erwähnten Näpfchen das durch Aufsaugen gefüllte Gefäss Fig. 16 sehr bequem ist, und dass dasselbe auch zum Aufsaugen des Quecksilbers in vielen Fällen vortheilhaft ist.

Die wichtigeren bisher gemachten Erfahrungen sind die Folgenden.

Na. Natrium destillirt leicht im Vacuum, ohne das Glas anzugreifen, doch ist erforderlich, die in feuchter Luft sich bildende Kruste zu vermeiden, denn diese entwickelt in Berührung mit Natrium beim Erhitzen so lange Wasserstoff, bis die Kruste schweeweiss wird Dabei geht wahrscheinlich NaHO in Na_2O über.

Se. Selen kann im Vacuum sublimirt und destillirt werden. Es sublimirt nahe bei seinem Schmelzpunkte und liefert erst eine sehr dünne, ziegelrothe Schicht, die im durchfallenden Lichte Farben dünner Blättchen zeigt, dann eine dichte krystallinische Schicht von dunkelgrauer Farbe mit einem violetten Stich. Bei höherer Temperatur schmilzt es und destillirt in glasigen, roth durchscheinenden Tropfen. Käufliches Selen in Stangen liess einen selenhaltigen Rück-

1) Hr. Neesen verwendet ähnliche etwas schwieriger herzustellende Verbindungsstücke, die aber nach seiner Angabe ausser des Quecksilbers noch einer Sperrflüssigkeit bedürfen. Zeitschr. f. Instrumentenkunde. **2.** p. 287. 1882.

stand zurück, in dem Kupfer und Blei nachgewiesen werden konnten.

Te. Tellur sublimirt ziemlich weit unter seinem Schmelzpunkte und bildet dabei mitunter prachtvoll ausgebildete säulenförmige Krystalle. Der geringe Rückstand enthielt ausser Tellur noch Silber, Kupfer und etwas Gold. Schon einmal sublimirtes Tellur in einem verschlossenen Rohre bei höherer Temperatur sublimirt, lieferte kleine, mit Tröpfchen vergleichbare einzelne Krystalle.

Cd. Cadmium sublimirt leicht im Vacuum, kann aber auch geschmolzen werden und destillirt dann rasch. Im ersteren Falle bildet es hauptsächlich eine krystallinische biegsame Kruste. Die im Rest des käuflichen Materials enthaltenen Verunreinungen waren Blei, Zinn, Zink und wenig Eisen.

Zn. Zink sublimirt ebenfalls, schmilzt aber bei stärkerem Erhitzen und destillirt ziemlich lebhaft. Es bildet eine krystallinische biegsame Kruste. Im zugeschmolzenen Rohre erhitzt, lagerten sich Tropfen bis zu 4 mm im Durchmesser an die Glaswände und bildeten nach langsamem Erkalten schön ausgebildete Krystalle. Unreines Zink lieferte im kalten Theile des Rohres theerartige bräunliche Tropfen, was auf einen Gehalt an organischen Körpern schliessen lässt, und Cadmium; das Zink lagerte sich in dem wärmeren Theile der Röhre. Im Rückstand wurde bei oberflächlicher Prüfung ausser Zink noch Blei und Eisen gefunden.

Mg. Magnesium lässt sich nur langsam sublimiren, sonst greift es das Glas unter Gasentwickelung an. Es bildet eine am Glase stark haftende krystallinische Kruste und frei stehende Krystalle von wunderbarem Glanz, den es auch an der Luft lange behält. Will man auch die letzten Antheile sublimiren, so wird das Glas braun. Magnesiumband scheint ziemlich viel fremde Bestandtheile zu enthalten.

As. Sogenannter Fliegenstein sublimirt und liefert zuerst schön glänzende Krystalle von arseniger Säure, die sich am kältesten Theile des Rohres ablagern, dann bei stärkerem Erhitzen eine schwarze abbröckelnde Kruste, die sich nach Art der sehr leicht flüchtigen Körper ebenfalls im kältesten

Theile des Rohres ablagert, und die bei gelindem Erwärmen einen gelben sublimirenden Körper liefert. Der letztere bräunt und schwärzt sich in kurzer Zeit von selbst. Nur bei höherer Temperatur und bei unvollkommenem Vacuum setzt sich weisses metallisches Arsen ab. Jener gelbe Körper bildet sich auch aus reinem, schwefelfreiem Arsen, und ist eine leicht flüchtige allotrope Modification des Arsens.

Sb. Käufliches Antimon sublimirt fast vollständig und liefert eine schön glitzernde krystallinische Kruste. Ein im kalten Theile sich ablagernder Anflug rührt von einer Verunreinigung her.

Bi. In leicht schmelzbarem Glase destillirt das Wismuth nur sehr langsam, in schwer schmelzbarem Glase bis zur beginnenden Rothgluth erhitzt, gibt es beim Erstarren krystallinisch werdende Metalltröpfchen. Ein im kalten Theile des Rohres sich zeigender Anflug rührt von einer verhältnissmässig leicht flüchtigen Beimischung her.

Pb. Gewöhnliches Blei liefert im schwer schmelzbaren Glase bei beginnender Rothgluth einen Metallspiegel und zahlreiche Metalltröpfchen, die beim langsamen Erstarren einzelne Krystallflächen annehmen. Das zurückgebliebene Blei hat eine krystallinische, zum Theil kohlschwarze Oberfläche.

Sn. Zinn konnte selbst in schwer schmelzbarem Glase bei deutlich sichtbarer Rothgluth nicht sublimirt werden. Käufliches Zinn gab nur bei der ersten Destillation einen braunen durchsichtigen Beschlag, der bei der zweiten nicht mehr erhalten werden konnte, also einem fremden Körper zugeschrieben werden muss.

C. Carré'sche 1 mm dicke Kohlenstäbchen wurden in einer zerlegbaren Glühlichtlampe mittelst des electrischen Stromes geglüht. Anfangs entwickelte sich viel Gas, und die Glaswände belegten sich mit einer weisslichen Schicht. Diese musste von organischen Körpern herrühren, denn sie trat bei wiederholtem Glühen nicht mehr auf. Dabei konnte der Strom soweit verstärkt werden, dass ein Licht von 120 Kerzenstärke entwickelt wurde. Spuren einer Verdampfung der Kohle selbst konnten auch bei dem vollkommensten Va-

cuum nicht beobachtet werden; nur als das Kohlenstäbchen durch Verbrennung an der Luft dünner gemacht war und während des Glühens im Vacuum zersprang, zeigte sich auf der vorher reinen Glasfläche ein durchsichtiger brauner Anflug, der wahrscheinlich von verflüchtigter Kohle herrührt. An der Bruchstelle konnten keine Spuren einer Schmelzung entdeckt werden. — Erwähnungswerth ist, dass Schreibgraphit zwar anfangs viel Gas liefert, aber sonst für Incandescenslampen gut verwendbar zu sein scheint.

P_2O_5. Sogenannte wasserfreie Phosphorsäure, die in Luftpumpen gewöhnlich als Trockensubstanz verwendet wird, enthält Phosphorpentoxyd, welches schon bei 50° entschieden sublimirt, falls ein Theil der Röhre von einer Kältemischung umgeben ist und das leicht in schönen wasserhellen Krystallen erhalten werden kann.

Von organischen Körpern habe ich bisher die folgenden zu destilliren versucht.

Glycerin. Sarg'sches Glycerin wirft schon bei gewöhnlicher Temperatur Blasen, verliert dabei Wasser und destillirt bei gelinder Wärme ruhig. Das Destillat ist sehr dickflüssig, fliesst kaum bei — 17°, ohne jedoch zu krystallisiren.

Talg. Rindertalg destillirt ohne Gasentwickelung. Der flüchtigere Theil hat den unangenehmen Talggeruch in erhöhtem Maasse, während das übrige davon befreit ist. An der Luft erhält auch dieser den Geruch wieder.

Vaselin. Das Vaselin, ein geruchloses Schmiermittel, destillirt ohne Zersetzung und trennt sich in sehr verschieden flüchtige Theile. Ein Theil ist dünnflüssig und leicht flüchtig, aber geruchlos.

Wachs. Aus Waben hergestelltes unter 100° filtrirtes Bienenwachs destillirt, mit Ausnahme des Farbstoffes, ohne Zersetzung vollkommen über. Bei vorsichtiger oder wiederholter Destillation erhält man ein wenig eines sehr flüchtigen Oels von moschusähnlichem, angenehmem Geruch. Der zuletzt überdestillirende Theil ist, nach dem Schmelzpunkte zu urtheilen, Cerotinsäure.

Ozokerit. Der auch in manchem Handelswachs enthaltene Ozokerit destillirt ohne Zersetzung und liefert bei der Destillation ebenfalls verschieden flüchtige Theile, namentlich auch einen krystallinischen sehr flüchtigen.

Colophonium. Französisches lichtgelbes Colophonium destillirt ohne Zersetzung, trennt sich aber in ein in geringer Menge enthaltenes Oel von Fichtengeruch und in ein lichtgelbes sprödes Harz.

Bernstein. Aus Bernstein sublimiren erst wasserhelle Krystalle, offenbar Bernsteinsäureanydrid, dann kommen ölige Tropfen, schliesslich beginnt das zurückbleibende Harz sich zu zersetzen.

Kautschuk. Aus schwarzem Kautschuk destilliren bei gelindem Erwärmen zweierlei verschieden flüchtige Tropfen, von denen die flüchtigeren den Kautschukgeruch in erhöhtem Maasse zeigen, während der Rest wenig Geruch hat und so klebrig wie frisch geschnittener Kautschuk ist, aber nicht zersetzt zu sein scheint.

Kautschuk-Colophonium. Stark erhitztes Colophonium und erhärteter Kautschuk geben ein hartes Klebmittel, das im Vacuum schon während des Schmelzens schäumt, also einen flüchtigen Theil enthält.

Rohrzucker, wasserfreier Traubenzucker und schwefelsaures Chinin zersetzen sich während oder noch vor der Destillation.

Aus den erwähnten Erfahrungen ergeben sich die folgenden Schlüsse.

1) Den mit der Luftpumpe erreichbaren Grad der Evacuirung, resp. die Reinheit sehr verdünnter Gase betreffend, ist zu erwähnen, dass darauf ausser dem Quecksilberdampfe noch das bei Hähnen und Schliffstellen etwa verwendete Schmiermittel und die zum Trocknen benutzte sogenannte wasserfreie Phosphorsäure von Einfluss sind; denn diese Körper enthalten im Vacuum leicht flüchtige Bestandtheile, deren Dämpfe sich wie auch wahrscheinlich sehr verdünnte Gase voraussichtlich an den Wänden der Pumpe condensiren, um sich bei erneuertem Evacuiren immer wieder zu entwickeln. Als Schmiermittel für Hähne empfiehlt sich eine

Mischung der schwer flüchtigen Theile von Wachs und Vaselin, die sich an der Luft nicht verharzt. Zur Vermeidung des Phosphorpentoxyds lässt man die Phosphorsäure etwa an der Luft Wasserdampf aufnehmen; die so entstehende feste Metaphosphorsäure trocknet noch immer sehr gut.[1])

2) Bei der befolgten Methode erscheinen sublimirende Körper in vielen Fällen vollkommen getrennt, ebenso lagern sich bei Destillationen verschieden flüchtige Theile mehr oder weniger getrennt in den durch die Brücken gebildeten Kammern.

3) Unter den untersuchten Elementen sind auffallend viele, namentlich Se, Te, Cd, Zn, Mg, As, Sb sublimirbar, während merkwürdiger Weise die leicht schmelzbaren: Bi, Pb, Sn schwer destilliren, das letztere bei Rothgluth noch nicht merkbar. Hier widersprechen meine Erfahrungen den Angaben Demarçay's, nach denen Bi bei 292°, Pb und Sn bei 360° flüchtig sein sollen. Die Abweichung, die besonders entschieden beim Sn zu Tage tritt, erklärt sich vielleicht aus leicht flüchtigen Verunreinigungen, die im Falle der ersten Destillation auch bei meinen Versuchen Beschläge verursachten, welche aber bei wiederholter Destillation ausblieben.

4) In Uebereinstimmung mit Hrn. Demarçay finde ich, dass meist während der ganzen Dauer der Metalldestillation Gasentwickelung stattfindet, kann aber dazu setzen, dass dieselbe bei wiederholter Verdampfung gewöhnlich unmerklich oder wenigstens unbedeutend wird.

5) Aus meinen Versuchen ergibt sich, dass Na, Se, Te, Cd, Zn, As und Sb im Vacuum so leicht verdampfen, dass man diesen Umstand bei der Reindarstellung zweckmässig verwenden wird.

6) Eine bemerkenswerthe Thatsache ist ferner, dass die meisten der genannten sublimirbaren Körper scheinbar in demselben Vacuum auch geschmolzen und noch weiter erhitzt werden können, wobei selbstverständlich die Destilla-

1) Manche unreine Phosphorsäure entwickelt mit Wasserdampf Phosphorwasserstoff, worauf ganz besonders Rücksicht genommen werden muss.

tion rascher von statten geht. Man kann sich wohl denken, dass sie dann trotz des Vacuums in überhitztem Zustande sind, es scheint mir aber wahrscheinlicher, dass bei dem in der Pumpe herrschenden geringen Drucke namhafte Temperaturdifferenzen nur geringe Druckdifferenzen bewirken, und dass demnach derjenige Druck von wesentlichem Einflusse auf den Aggregatzustand ist, der zur raschen Fortführung des Dampfes erforderlich ist. Dass dieser Druck nicht ganz unbedeutend sein kann, zeigen mechanische Wirkungen des Dampfstromes, denn man sieht hier und da, wie der Dampfstrom dünne abgebröckelte Metalllamellen vor sich hertreibt.

7) Die organischen Körper betreffend, zeigt sich, dass manche leicht zersetzbare Gemische, wie Talg, Wachs, Colophonium u. s. w., im Vacuum ohne Zersetzung destillirt und von Verunreinigungen befreit werden können, und dass sich dabei verschiedene Theile voneinander trennen. — Es scheint, dass diese Methode der Chemie noch so manchen Nutzen zu bringen berufen ist.

XI. *Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle des regulären Systems; von K. R. Koch.*

(Aus den Ber. der naturforsch. Ges. zu Freiburg i. Br. 8. Bd. 2, mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

(Hierzu Taf. II Fig. 4—8.)

I. Steinsalz, Sylvin, chlorsaures Natron.

Durch die von mir[1]) beschriebene und an Steinsalzstäbchen geprüfte Methode, die elastische Biegung kurzer Stäbe vermittelst der Verschiebung von Interferenzstreifen zu messen, ist es möglich geworden, die Elasticitätscoëfficienten einer grösseren Zahl von Krystallen als bisher exact zu be-

1) Koch, Wied. Ann. 5. p. 521. 1878.

stimmen. Ich wählte nach Untersuchung des Steinsalzes zunächst Chlorkalium (Sylvin) und chlorsaures Natron. Leider ist es mir bis jetzt nicht gelungen, die Bestimmung bei letzterer Substanz zu Ende zu führen, da das angewandte Material vielfach im polarisirten Lichte doppelbrechende Einschlüsse zeigte, also unbrauchbar war, oder beim Schleifen Sprünge und Risse erhielt, die nicht gestatteten, Stäbchen von der nöthigen Länge herzustellen.

Bekanntlich ist der Elasticitätscoëfficient bei amorphen Körpern keine Constante, sondern bei verschiedenen Stäben derselben Substanz, bedingt durch die Verschiedenheit in der Herstellung und Bearbeitung derselben, innerhalb ziemlich weiter Grenzen schwankend. Es entsteht nun die Frage, ob dieser Coëfficient bei krystallinischen Körpern bei gleicher Richtung im Krystall für verschiedene Krystallindividuen eine Constante ist. Für Steinsalz ist die Constanz desselben durch die Uebereinstimmung der von Hrn. Voigt gefundenen Werthe[1]) mit den meinigen bewiesen. Für Sylvinkrystalle ergeben die mitzutheilenden Versuche dasselbe; für das chlorsaure Natron sind die Versuche noch nicht abgeschlossen.

Vor der detaillirteren Angabe der Resultate selbst mag jedoch hier die Beschreibung des von Hrn. Breithaupt und Sohn in Cassel gelieferten Präcisionsapparates und eine Auseinandersetzung der Methoden, nach welchen die Dimensionsbestimmungen der Stäbchen vorgenommen wurden, seine Stelle finden.

Der Messapparat hatte im wesentlichen seine frühere Gestalt behalten.

In der Mauer waren die zwei Lager *A* und *B* (Fig. 4) für den Eisenstab *C* fest eingegypst. An den Stab *C*, der durch Q_1 festgeschraubt war, wurde vermittelst der eisernen Muffe Q_2 die stählerne Schiene *D*, auf der sich der ganze Messapparat befand, festgeklemmt. *D* trug das feste Lager *M* und das bewegliche dachförmige Lager *LK*. *K* konnte durch die Schraube *o* an jeder beliebigen Stelle festgestellt werden und *L* war durch die Mikrometerschraube G ver-

1) Voigt, Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 1. 1877.

schiebbar. Das Prisma J war durch die sehr genau gearbeitete Stopfbüchse H in verticaler Richtung verstellbar und konnte zusammen mit derselben in jeder Richtung durch die Schrauben $N_1 N_2 N_3$ verschoben und geneigt werden. Die Schrauben $N_4 N_5 N_6$ dienten nach definitiver Einstellung zum Festklemmen desselben. Die Schiene D trug dann noch das auf ihr verschiebbare um P_1 und P_4 drehbare Beobachtungsmikroskop E. Da dasselbe jedoch beim Auflegen der Stäbchen wie bei der Einstellung derselben hinderlich war, so wurde meistens mit einem anderen Mikroskope beobachtet, das auf einem fest mit der Mauer verbundenen Tischchen aufgestellt war.

Die Belastung griff nicht mit einer Schneide an, sondern mit der Spitze des Belastungsbügels B (Fig. 5), die auf einem Kautschukplättchen A ruhte; das kleine Gewicht b diente zur Aequilibrirung des Bügels B. An B hing vermittelst des Bügels C das constante Gewicht D und an diesem vermittelst des durch d_1 verstellbaren Fadens c der Bügel E, welcher das eigentliche Belastungsgewicht F trug und mit seiner horizontalen Endplatte in ein Oelgefäss G tauchte. um etwaige Erschütterungen beim Lösen der Arretirung HH zu verhindern.

Der Arretirung (Fig. 6) war folgende Einrichtung gegeben. Der Bügel E (Fig. 5) ruhte bei der Entlastung mit seiner Spitze auf dem horizontalen Tischchen HH (Fig. 5) oder A (Fig. 6). A war durch die Federcharniere $a_1 a_2$ mit der in der Mauer festgemachten eisernen Platte A_1 verbunden. An A war rechtwinklig der Stab B angeschraubt, dessen unteres Ende b mit dem gegenüber liegenden Punkte c der Feder C durch einen festgespannten Faden verbunden war. Die Feder C konnte durch eine auf der fest in der Wand befindlichen Stütze D sitzende Mikrometerschraube E oder behufs schnellerer Belastung durch die Hebelvorrichtung F der Wand genähert werden. War die Belastung arretirt, so wurde vermittelt der Feder C das Tischchen A (oder in Fig. 5 HH) erhoben gehalten; durch Anziehen der Schraube E oder des Hebels F senkte sich A durch die auf ihm liegenden Gewichte, und die Belastung griff an.

Die Senkung wurde in derselben Weise wie früher[1]) an dem Wandern der Interferenzstreifen beobachtet, die zwischen der oberen Kathetenfläche des Prismas und dem zu untersuchenden Stäbchen bei Anwendung von Natriumlicht entstehen. Jedesmal, wenn an dem beobachteten Punkte ein Wechsel von hell durch dunkel zu hell eingetreten ist, also das Fadenkreuz wieder die gleiche Stellung zwischen den dunklen Streifen einnimmt, ist der Abstand zwischen Prisma und Stäbchen (bei senkrechter Incidenz) um eine Grösse gleich der halben Wellenlänge des Natriumlichtes vermehrt oder vermindert. Die Beobachtung fand nun so statt, dass die Arretirung vermittelst der Schraube langsam gelöst und dabei die Zahl der das Fadenkreuz passirenden Interferenzfranzen gezählt wurde; dasselbe geschah bei der Entlastung. Nachdem dies einige mal wiederholt und constant dieselbe Zahl gefunden war, konnte man bei der Fortsetzung der Beobachtungsreihe von der jedesmaligen Zählung aller das Fadenkreuz passirenden Interferenzfranzen absehen; es genügte, nur den Anfangs- und Endpunkt genau zu beobachten, um die Bruchtheile gehörig zu schätzen. Hierbei bediente ich mich der Hebelvorrichtung, wodurch die Belastung schneller, aber mit derselben Sicherheit ausgeführt werden konnte, wie bei der Lösung der Arretirung durch die Schraube.

Die Messung des Abstandes der Lagerkanten *L* und *M* (Fig. 4) geschah mit Hülfe der Mikrometerschraube *G*. Dem beweglichen Lager *L*, das sich unmittelbar an die Schraubenspitze lehnte, sollten solche Dimensionen gegeben sein, dass bei einer Stellung der Mikrometerschraube auf 10,000 der Abstand der Lager genau 10,000 mm betrüge. Es war demnach nothwendig, zu prüfen, wie genau es gelungen war, diese Bedingung zu erfüllen. Es geschah dies mit einem sogenannten „gravity piece"[2]), d. h. vermittelst eines Glasstückes, das durch Anziehen der Mikrometerschraube *G* zwischen den Lagern mit schwacher Klemmung

1) l. c. p. 258.

2) Vergl. Ber. üb. die wissensch. Apparate auf d. Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876. Hsg. v. A. W. Hofmann. Braunschweig 1878. p. 208.

gehalten wurde. *G* wurde darauf langsam gelöst und an der Trommel der Punkt abgelesen, bei dem das Glasstück zwischen den Lagern durchfiel. Misst man dann vermittelst des Sphärometers die Dicke des Glasstückes an der Stelle, die sich zwischen den Lagerkanten befand, so müsste, wenn die beiden Mikrometerschrauben und die Länge des beweglichen Lagers richtig wären, das Resultat dasselbe sein. Gefunden wurde:

Gravity piece	Dicke mit Sphärometer gemessen	Dicke mit Mikrometerschraube gemessen	Differenz
Nr. 1	10,491 mm	10,467 mm	0,024 mm
„ 2	8,990 „	8,962 „	0,028 „

Der Abstand der Lagerkanten ist also, mit der Mikrometerschraube *G* gemessen, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Sphärometerschraube um 0,03 mm zu klein. Offenbar ist die Messung mit der Mikrometerschraube des Apparates etwas fehlerhaft; es liegt jedoch auf der Hand, dass die Abweichungen in anderem Sinne erfolgen müssten, als sie erfolgt sind.

Die Messung der Dicke des Stäbchens wurde mit dem Sphärometer in der von mir[1]) angegebenen Weise ausgeführt. Das Stäbchen *C* (Fig. 7) wurde zwischen die Spitze der Sphärometerschraube *A* und eine ihr gegenüberstehende Spitze *B* gebracht, die auf einem federnden Glasplättchen *D* sass; der Moment der Berührung von *A* mit *C* beim Herabdrehen der Schraube, wurde durch das beginnende Wandern der Interferenzfranzen zwischen den Glasplatten *D* und *E* bestimmt. Die Genauigkeit der Bestimmung des Contactes der Schraube lässt sich, wie ich gezeigt habe, auf 0,1 μ[2]) bestimmen. Offenbar wird jedoch durch eine schiefe Lage des Stäbchens *C* zwischen den zwei Spitzen *AB* die Richtigkeit der Messung bedeutend beeinflusst. Ist nämlich *d* der beobachtete Werth der Dicke, *r* der Radius der

1) Koch, Wied. Ann. **3.** p. 611. 1878.
2) μ = 1 Mikromillimeter = 0,001 mm.



Kugel A, in welche die Spindel der Sphärometerschraube ausläuft, l der Radius der kleinen kreisförmigen Ebene, in der die untere Spitze B endigt, so ist die wahre Dicke h, wenn φ der Winkel ist, den d und h miteinander bilden:

$$h = d\cos\varphi - r(1 - \cos\varphi) - l\sin\varphi.$$

Dies ergibt für $\varphi = 1^0$ und $d = 1$ mm, $d - h = 0{,}013$ mm.[1])

Es kommt nun darauf an, den Winkel φ möglichst klein zu machen. Man kann dies dadurch bewirken, dass man die Orientirung des Stäbchens, das auf einem mit drei Stellschrauben versehenen Tischchen festgeklemmt ist, so lange ändert, bis man für einen Punkt das Minimum der Dicke gefunden hat. Es ist also bei mehrfachen Einstellungen auf denselben Punkt nicht das Mittel, sondern der kleinste erhaltene Werth der richtigste. Da diese Methode der Messung jedoch zu umständlich ist, so wurde folgendermassen verfahren. Unter der Annahme, dass die Fläche des Stäbchens eine Ebene ist oder nur wenig von einer solchen abweicht, wurde die Richtung des Stäbchens durch die drei Stellschrauben des Tischchens so lange verändert, bis alle Punkte der unteren Fläche die untere Spitze bei horizontaler Verschiebung gerade berührten, was sich dadurch kenntlich machte, dass bei jedem Punkte der unteren Fläche bei der geringsten Drehung an den Stellschrauben eine Bewegung der Interferenzstreifen eintrat. Auf diese Weise gelang es allerdings, die Messungen mit einer ausserordentlichen Präcision auszuführen. Die Resultate einer mehrfach wiederholten Messung mögen deshalb hier als Beispiel eine Stelle finden.

Die mittlere Dicke eines Stäbchens wurde durch Messung an zwölf verschiedenen Punkten gefunden.

---

1) Liesse man die untere Spitze ebenfalls in einer Kugel (deren Radius r_1 sei) endigen, so würde:

$$h = d\cos\varphi - (r + r_1)(1 - \cos\varphi).$$

Diese Formel ist scheinbar günstiger, da man durch Verkleinern von r_1 (Auslaufenlassen in eine Spitze) den Fehler, der durch die Verlegung des Contactpunktes entsteht, möglichst gering machen kann. Hierbei treten jedoch andere Fehler auf, hervorgerufen durch ungenaue Centrirung der das Ende der Schraube bildenden Kugel A und durch ein Sicheindrücken der Spitze B in das zu messende Stäbchen.

Messung I 1,0510 mm II 1,0519 mm III 1,0514 mm.

Der dritte Werth war vermittelst der oben erwähnten umständlicheren Methode erhalten. Mass man die Dicke, indem man das Stäbchen nur nach dem Augenmaasse zwischen den Spitzen möglichst senkrecht zur Schraubenaxe stellte, so ergab sich:

1,0560 mm,

also eine um ca. 0,5 % grössere Dicke. Es wurde grundsätzlich immer dieselbe Stelle der Schraube benutzt, um später bei der Ermittelung des Fehlers die Arbeit möglichst abzukürzen. Eine Bestimmung der Fehler der Schraube nach einer neuen Methode, die erlaubt, direct den Fehler jedes Schraubenganges zu messen, ergab als Correction $- 3{,}5\ \mu$. Es liessen sich jedoch nicht alle Messungen mit derselben Präcision ausführen, weil die Stäbchen theilweise während der Beobachtung zerbrachen, und deshalb die Messung nicht an hinreichend vielen Punkten ausgeführt werden konnte.

Die Messung der Breite erfordert nicht eine so grosse absolute Genauigkeit, wie die der Dicke; es genügt, wenn dieselbe auf ungefähr 0,01 mm genau ist. Es wurde zuerst versucht, dieselbe vermittelst der am Hauptapparate befindlichen Mikrometerschraube zu bestimmen. Hierzu wurde das Stäbchen auf das bewegliche Lager gelegt und die eine Kante desselben in das Fadenkreuz eines senkrecht darüber stehenden Mikroskopes gebracht (eine einfache Vorrichtung erlaubte, das Stäbchen parallel der Drehungsaxe der Mikrometerschraube zu stellen). Darauf wurde das bewegliche Lager durch die Mikrometerschraube so lange verschoben, bis die andere Kante des Stäbchens ins Fadenkreuz fiel. Die Differenz der Ablesungen an der Schraube gibt dann die gesuchte Breite. Mit dieser Methode ist jedoch die erforderliche Genauigkeit nicht zu erreichen, da sich die Einstellungen auf die Kanten nicht genau machen lassen. Mehrfach wiederholte Messungen an demselben Querschnitte des Stäbchens, jedoch bei verschiedener Beleuchtung) ergaben Abweichungen von über 8 %.

Es wurde deshalb die Breite in derselben Weise wie die Dicke gemessen. Die hierdurch erhaltenen Werthe stimmten ausserordentlich gut überein. Zwei unabhängige Messungen an je acht verschiedenen Querschnitten ergaben z. B. als mittlere Breite:

I. Reihe 3,2074 mm   II. 3,2003 mm.

Die Werthe weichen also nur um ca. 0,2% voneinander ab. Es hat die Ausführung auch dieser Messung mit dem Sphärometer ausserdem den Vortheil, dass alle Dimensionsbestimmungen auf diese Weise mit derselben Mikrometerschraube gemacht sind.

Das Gewicht der angewandten Gewichtsstücke war hinreichend genau bestimmt.

Die Messung der Senkung war nicht in demselben Grade genau; die Unsicherheit derselben betrug vielmehr je nach der Anzahl der beobachteten Interferenzstreifen 1—2 Procent.

Wie schon oben erwähnt, griff die Belastung nicht mit einer Schneide, sondern mit einer Spitze an, es war diese Anordnung aus mehreren Gründen getroffen. Es lässt sich bei der Belastung vermittelst einer Schneide nie genau angeben, ob dieselbe wirklich mit ihrer ganzen Breite auf dem Stäbchen ruht, vielfach konnte man direct beobachten, dass sie nur mit einem Punkte angriff, da sie sich leicht um eine verticale Axe drehen liess. Da nun die Oberfläche der Stäbchen, wie die Dickenmessungen ergaben, nicht vollkommene Ebenen sind, so wird meistentheils nur ein nicht einmal genau zu ermittelnder Punkt der Schneide angreifen. Um diesem Uebelstande zu begegnen, wandte ich früher[1]) entweder zwei Spitzen oder eine durchbrochene Schneide an; immer muss hierbei der Angriffspunkt der Belastung in die Richtung der Axe des prismatischen Lagers fallen, denn nur in diesem Falle kann die Drehungsaxe, um die sich das Stäbchen bei der Belastung dreht (an welcher auch die Beobachtung der Senkung stattfinden muss) ermittelt werden, anderenfalls fällt sie in der Regel ausserhalb des Gesichts-

1) l. c. p. 260.

feldes. Eine Spitze als angreifender Theil des Belastungsapparates lässt sich aber mit grosser Präcision in die Mitte des Stäbchens und in die Richtung der oberen Kante des prismatischen Lagers bringen, um welche die Drehung der Construction der Lager zufolge hauptsächlich stattfindet. Die Versuche ergaben die Drehung bei Belastung mit einer Spitze bedeutend geringer als bei Anwendung der Schneide. Es fragt sich jedoch, ob beide Methoden unter sonst gleichen Umständen dieselbe elastische Senkung geben. Zur Untersuchung wurde ein Glasstab benutzt.

Länge: 20,000 mm. Breite: 4,82 mm.
Dicke: 1,274 „ Belastung: 0,3754 kg.

Gefunden wurde:

Beobachtungsreihe	Belastung griff an mit Schneide	mit Spitze	Beobachtungsreihe
Nr. I.	36,9	37,5	Nr. I.
„ II.	37,3	36,9	„ II.
„ III.	36,8	36,9	„ III.
„ IV.	36,9	36,4	„ IV.
	Mittel 36,98	Mittel 36,92	

Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes. Nach jeder der acht Beobachtungsreihen wurde der Apparat auseinander genommen, gereinigt und die Einstellung neu gemacht. Die Uebereinstimmung ist also eine vollständige. Da die Belastung durch eine Spitze ungleich bequemer war, so wurde fortan nur die Spitze zur Belastung benutzt, die zum Schutze für das Stäbchen auf einem Kautschukplättchen ruhte.

Schon in der ersten Abhandlung[1]) habe ich darauf hingewiesen, dass es nothwendig ist, eine Hülfsvorrichtung für solche Substanzen anzubringen, welche die Lichtstrahlen von ihrer polirten Oberfläche in einem solchen Intensitätsverhältnisse zu denen schon vom Prisma reflectirten zurückwerfen, dass zwischen beiden Strahlengattungen keine sichtbaren Interferenzfranzen entstehen. Ich hatte damals, weil

1) l. c. p. 257.

es sich um einen metallischen Körper (Messing) handelte. eine Klammer angewandt, an deren unteren Fläche ein dünnes, auf einer Seite geätztes Glasplättchen angekittet war. Bei den jetzt von mir untersuchten Krystallen war eine solche anschraubbare Klammer nicht anwendbar, weil in den Stäbchen hierbei durch den angewandten Druck sofort Gleitflächen entstanden. Ich verfuhr deshalb folgendermassen. Auf das Glasplättchen *B* (Fig. 8) wurde ein Klebwachströpfchen *c* von der Form, wie die Figur es zeigt, gebracht, sodass es oben eine scharfe Kante ($\alpha\beta$) bildete. Mit dieser wurde es an das Stäbchen gekittet. Beim Auflegen des Stäbchens auf die Lager wurde dann diese Kante in die Mitte zwischen die Lager und die Beobachtungsspitze gerade darüber gebracht. Es könnte nun scheinen, als wäre hierdurch eine Fehlerquelle geschaffen; mehrfache Versuche an einem Glasstäbchen haben jedoch gezeigt, dass die Senkungen, erhalten mit angekittetem Plättchen, dieselben Werthe haben wie ohne dasselbe.

Beobachtungsreihe	Das Stäbchen war ohne Plättchen	Das Stäbchen war mit angekittetem Plättchen	Beobachtungsreihe
Nr. I.	13,71	13,76	Nr. I.
„ II.	13,79	13,92	„ II.
„ III.	13,55	13,47	„ III.
„ IV.	13,50	13,68	„ IV.
Mittel	13,64	13,71	Mittel

Jede Zahl (in denselben Einheiten wie p. 333) ist auch hier das Mittel aus den bei mehrfachen Belastungen und Entlastungen gefundenen Senkungen. Nach einer jeden Reihe wurde das Stäbchen abgenommen, geputzt und der ganze Apparat neu eingestellt. Die mittleren Werthe, die aus den beiden Versuchsreihen erhalten werden, stimmen auf circa 1 Proc. miteinander überein; dies ist, mit Rücksicht auf die weiter unten zu ermittelnden Fehlergrössen, ein befriedigendes Resultat. Besonders vortheilhaft ist die Anwendung eines so angebrachten Plättchens noch deshalb, weil sich dasselbe bei der Berührung mit der oberen Fläche des Reflexions-

prismas von selbst derselben parallel stellt, wodurch sehr viel Zeit an der sonst sehr mühsamen Einstellungsarbeit erspart wird. Nur ein Umstand ist hiermit verknüpft, der störend wirkt, der sich aber bei einiger Aufmerksamkeit vermeiden lässt. Bei höheren Temperaturen nämlich senkt sich namentlich beim Anfange der Versuche das Plättchen continuirlich; hierdurch werden die elastischen Biegungen beim Belasten scheinbar zu gross, beim Entlasten scheinbar zu klein. Da diese Senkung nahezu gleichmässig vor sich geht, so hebt sich dieselbe im Resultat auf, vorausgesetzt. dass man zur Belastung und Entlastung die gleiche Zeit gebraucht. Wendet man einen spröderen Kitt an, so wird die Senkung natürlich geringer, dafür muss das Plättchen aber auch wegen mangelnden Klebens mit einer grösseren Fläche am Stäbchen haften und wird sich schwerer der oberen Prismenfläche, wenn man beide bis zur Berührung nähert, parallel stellen, bezüglich seine Parallelität bewahren. Die durch dieses Nachgeben des Klebwachses hervorgerufenen Unterschiede bei der Belastung und Entlastung betragen allerdings nur Bruchtheile des Abstandes zweier benachbarter Interferenzfranzen, jedenfalls ist es aber praktisch, die Belastung möglichst schnell, natürlich ohne Erschütterungen, wirken zu lassen. Hierzu wurde die Hebelvorrichtung F (Fig. 6) benutzt. Bei warmer feuchter Luft wird ausserdem noch das Stäbchen sowohl an seiner ganzen Oberfläche angegriffen (Bildung von Aetzfiguren), als auch an den Stellen, die auf den Lagern liegen, mit Eindrücken versehen, welche die Dicke an diesen Stellen vermindern; man erhält daher mit jeder neuen Versuchsreihe wachsende Werthe für die Senkung. Man wird also gut thun, bei zu warmem, feuchtem Wetter die Beobachtungen vollständig zu unterlassen. Ausserdem ist es rathsam, die Stäbchen in einem luftdicht schliessenden Gefässe oder unter einer dieselben nicht angreifenden Flüssigkeit aufzubewahren, resp. dieselben sogleich, nachdem sie ihre definitive Politur empfangen haben, zu benutzen, weil durch die oben erwähnten Aetzfiguren Unebenheiten entstehen, welche die Richtigkeit des Resultates beeinflussen. So wurden z. B. für ein senkrecht zur Dode-

kaëderfläche geschnittenes Sylvinstäbchen, bei welchem die Beobachtungsreihen um drei bis vier Monate auseinanderlagen, weil die Untersuchung durch andere Arbeiten unterbrochen wurde, folgende Werthe für die Biegung auf dieselbe Länge und Belastung reducirt gefunden:

I.	II.	III.
17,7	18,8	19,3.

(Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes.)

Bei diesem Stäbchen war nicht nur die Oberfläche angegriffen, sondern dasselbe zeigte auch deutlich an den Stellen des Querschnittes, mit welchen dasselbe bei Beobachtung I und II (die im Sommer stattfanden), auf den Lagern aufgelegen hatte, Verminderungen der Dicke; hierdurch sind die grossen Abweichungen erklärlich.

Ich habe[1]) erwähnt, dass die Belastung in der Mitte zwischen den Lagern angreifen muss. Es wurde dies durch Einstellung vermittelst der Schrauben $F_1 F_2$ der dioptrischen Vorrichtung R_2 erreicht (Fig. 4). Ausserdem diente der vordere Faden derselben nebst einem anderen horizontal gespannten R_4 dazu, das Mikroskop senkrecht zur vorderen Prismenfläche zu stellen, also bei senkrechter Incidenz der interferirenden Strahlen zu beobachten. Der Ort nämlich, auf den man das Mikroskop einzustellen hat, um die Interferenzfranzen möglichst scharf zu sehen, liegt bei den Dimensionen des benutzten Reflexionsprismas einige Millimeter hinter der vorderen Fläche des Prismas. Es ist nun leicht, den vorderen horizontalen und verticalen Faden in eine solche Entfernung von der vorderen Prismenfläche zu bringen, dass ihre Bilder (entstanden durch Reflexion an der vorderen Prismenfläche) mit den Interferenzstreifen in dieselbe Ebene fallen. Man sieht dann durch das Mikroskop die Interferenzfranzen und das Bild der Fäden scharf, die Fäden selbst aber verbreitert und verwaschen; stellt man dann das Mikroskop so ein, dass das scharfe Bild des Fadens das verbreiterte halbirt, so wird man sicher sein, die Absehlinie

1) l. c. p. 259.

mit hinreichender Genauigkeit senkrecht zur vorderen Fläche des Reflexionsprismas gestellt zu haben, d. h. also bei nahezu senkrechter Incidenz zu beobachten; der Fehler übersteigt hierbei 0,5° nicht; er würde jedoch erst bei 3° das Resultat um 0,2 Proc. beeinflussen.

Die Beobachtung der Senkung selbst hat an dem Punkte der Querlinie des Stäbchens zu geschehen, welcher durch die Drehung desselben um eine Längsaxe bei angreifender Belastung keine Senkung erfährt (wie l. c. p. 260 gezeigt wurde). Das dort angegebene Verfahren, die Axe durch leichtes Drehen des Lagers *L* (Fig. 4) zu suchen, wurde auch jetzt angewandt. Da sich diese Axe während der Belastung verlegte, so konnte man entweder die mittlere Drehungsaxe ermitteln und an dieser beobachten, oder man machte je einen Satz Beobachtungen an der Drehungsaxe, wie sie ohne Belastung, und wie sie mit Belastung gefunden wurde, und nahm das Mittel aus den beiden erhaltenen Zahlen. Gewöhnlich wurde die letztere Methode gewählt, weil dieselbe genauer war.

Als letzte Correction ist noch die Grösse der Ein-, resp. Durchdrückung der Lager zu erwähnen.[1]) Sowohl die Lager, welche in eine ziemlich scharfe Kante auslaufen, wie diejenigen Stellen, mit denen das Stäbchen auf denselben ruht, erleiden bei der Belastung eine Compression, die nach Aufhebung der Belastung wieder verschwindet. Hierdurch wird die Senkung um 1—2 Proc. vergrössert. Es wird dieselbe offenbar für verschiedene Substanzen verschieden sein; es ist also nothwendig, diesen Werth für eine jede besonders bei verschiedenen Belastungen zu bestimmen. Es ergab sich:

	0,5585 kg	0,3754 kg	0,1566 kg	0,0793 kg
Sylvin (senkrecht zu der Würfelfläche) .	1,41	0,70	0,35	0,22
Sylvin (senkrecht zu der Dodekaëderfläche	1,49	0,86	0,34	0,21
Glas	2,75	1,37	0,71	0,46

1) l. c. p. 261.

Diese Zahlen (Einheit: halbe Wellenlänge des Natriumlichtes) sind die Mittel aus je ca. sieben voneinander unabhängigen Beobachtungsreihen. Dieselben wurden erhalten mit besonders zu diesem Zwecke angefertigten Klötzen der betreffenden Substanz von ca. 9 mm Breite und Dicke. Die Werthe sind für die Sylvinstäbchen nach den verschiedenen Richtungen nahezu dieselben, ihre Abweichungen liegen wenigstens innerhalb der Fehlergrenzen. Für Glas ist die Durchdrückung nahezu doppelt so gross. Diese Senkung wird offenbar in irgend einem Verhältniss zur Abnahme der Breite wachsen; es wurde angenommen, dass dieselbe der Breite umgekehrt proportional sei. Zur Prüfung dieser Annahme wurde ein Stäbchen von 3,1 mm Breite auf ein 5,1 mm dickes Glasstück gekittet und bei einer Länge von 10 mm mit 0,3754 kg belastet; gefunden wurde als Senkung 2,35; die elastische Biegung unter der Annahme $E = 7000$ für Glas ist $= 0{,}11$; mithin ist die durch die Compression der Lager und des Stäbchens hervorgerufene Senkung $= 2.24$. Berechnet man aus diesem Werthe den entsprechenden für 9 mm Breite, so erhält man 0,77. Gefunden wurde 0,70. Der für die Berechnung des Elasticitätscoëfficienten benutzte Werth der Senkung für eine bestimmte Belastung ist also gleich dem Gesammtwerthe der Senkung s, weniger dem Werthe s_b, welcher von der Belastung herrührt, die der Bügel E (Fig. 5) selbst ausübt, und dem Werthe s_d, der aus der Durchdrückung der Lager resultirt. Die wahre Biegung wird also sein:

$$S = s - (s_b \pm s_d).$$

Da die mittleren Fehler einer Beobachtungsreihe durchschnittlich folgende Grössen haben:

Mittlerer Fehler von s $m_1 = 0{,}05$, s_b $m_2 = 0{,}05$, s_d $m_3 = 0{,}02$,

so wäre in bekannter Weise der Fehler des Resultates:

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = 0{,}07.$$

(Die Einheit der Zahlen ist die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes.) In Wirklichkeit ist die Unsicherheit, mit welcher die Werthe S behaftet sind, bedeutend grösser. Es

kommt dies daher, dass durch die Belastung der ganze Apparat nicht nur eine Senkung erfährt, sondern auch deformirt wird. Bringt man nämlich das Gewicht ganz am Ende der Schiene D (Fig. 4) an, so tritt nicht nur eine Senkung des ganzen Apparates ein, sondern es erfolgt auch eine Verschiebung der Interferenzfranzen gegen eine feste Marke des Prismas; dasselbe geschieht in geringerem Maasse, wenn man das Gewicht zwischen M und P_3 anbringt. Die Senkung des ganzen Apparates lässt sich eliminiren durch Anbringung des Mikroskopes am Apparat selbst, oder da es bequemer war, das Mikroskop von einem besonderen in der Wand befestigten Halter tragen zu lassen, dadurch, dass man die Interferenzstreifen vertical stellt. Das aus der Deformation der Schiene resultirende Wandern der Streifen bestand entweder in einer blossen Drehung derselben, oder es erfolgte im Sinne einer Senkung oder Hebung. Die Unsicherheit, welche hierdurch in der Bestimmung von S entsteht, wächst damit auf 0,2 (Halbwellen des Natriumlichtes).

Resultate.

1) Steinsalz.

In Bezug auf die Untersuchung am Steinsalz verweise ich auf die von mir[1]) publicirte Arbeit, in der ich die Brauchbarkeit der Methode speciell durch die Untersuchung am Steinsalz nachwies.

Gefunden wurde als Mittel:

E_1 senkrecht zur Würfelfläche . . 4030,
E_2 senkrecht zur Dodekaëderfläche 3395,
$E_1 / E_2 = 1,188$.

2) Sylvin.

Untersucht wurden vom Sylvin drei Krystalle, aus denen eine grosse Anzahl (36) von Stäbchen geschnitten wurden, doch nur mit wenigen gelang es, die Beobachtungen ganz zu Ende zu führen, weil die meisten die nöthigen Belastungen

1) Koch, Wied. Ann. 5. p. 521. 1878.

nicht ertrugen. Die Stäbchen waren von Hrn. Strübin, Optiker in Basel, in sehr vollkommener Weise hergestellt.

Ich theile der Probe wegen zuerst ein vollständiges Beobachtungsbeispiel mit.

Nachdem der Apparat und namentlich die Lagerkanten sorgfältig gereinigt waren, wurde das zu untersuchende Stäbchen, an dessen unterer Seite das Glasplättchen in der angegebenen Weise befestigt war, auf die Lager aufgelegt und der Belastungsbügel B (Fig. 5) mit seinem constanten Gewichte D aufgesetzt; durch die Diopter $R_1 R_3$ (Fig. 4) $R_2 R_2$ wurden das Stäbchen und die Spitze des Belastungsapparates in die richtige Lage gebracht. Darauf wurde das Reflexionsprisma dem angekitteten Glasplättchen bis zur Berührung genähert und der Apparat dann nach Entfernung aller Gasflammen während einer Viertelstunde sich selbst überlassen. Das während der Einstellungsarbeiten durch die strahlende Wärme der Beleuchtungsflamme etwas weich geworde Klebwachs war in dieser Zeit wieder hart geworden und bewahrte infolge dessen auch nach Herunterschieben des Reflexionsprismas seine mit der oberen Fläche des letzteren parallele Lage. Nachdem die Entfernung zwischen Prisma und Stäbchen genügend und das Mikroskop senkrecht zur vorderen Prismenfläche gestellt war, konnte die Messung der elastischen Biegung erfolgen.

Ich wähle aus dem zweiten der untersuchten Sylvinkrystalle den Stab Nr. 9, dessen Längsrichtung senkrecht zur Dodekaëderfläche lag. Nachdem vermittelst der Lösung der Arretirung durch die Schraube die Anzahl der durch das Fadenkreuz gewanderten Interferenzstreifen gleich ca. 40 gefunden war, wurde jetzt die genauere Bestimmung durch Beobachtung der Anfangs- und Schlussstellung des Fadenkreuzes vermittelst Lösung der Arretirung durch die Hebelvorrichtung gemacht.

I. Reihe.

A. Die Beobachtung geschah an der Drehungsaxe, wie sie ohne Belastung gefunden war.[1])

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
40,4	12,9	0,49	—
40,3	12,9	—	—
40,5	12,9	—	—
40,3	12,9	—	—
40,3	—	—	—
40,4	—	—	—
Mittel 40,37	12,90	0,49	13,39

$S_A = 26{,}98$.

B. Die Beobachtung geschah an der Drehungsaxe, wie sie mit Belastung gefunden war.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
40,5	13,0	0,49	—
40,6	13,0	—	—
40,5	12,9	—	—
40,6	13,0	—	—
40,7	—	—	—
40,6	—	—	—
Mittel 40,58	12,98	0,49	13,47

$S_B = 27{,}11$.

Hierauf wurde das Stäbchen herunter genommen, das Plättchen frisch angekittet, der Apparat gereinigt; dann das Stäbchen neu aufgelegt (jedoch um 180° gedreht) und von neuem in der angegebenen Weise beobachtet.

II. Reihe. A.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39,5	12,6	0,49	—
39,7	12,7	—	—
39,7	12,6	—	—
39,8	12,7	—	—
39,7	—	—	—
39,7	—	—	—
Mittel 39,68	12,65	0,49	13,14

$S_A = 26{,}55$.

B. Die Axe hatte sich nicht verlegt:

$S_B = 26{,}55$.

Es wurde jetzt das Stäbchen wiederum abgenommen und in derselben Weise verfahren; das Stäbchen wiederum um 180° gedreht.

1) Vgl. oben p. 337. Der Kürze wegen soll durch A und B bezeichten werden die Beobachtung an der Drehungsaxe, wie sie ohne und wie sie mit Belastung gefunden wurde.

III. Reihe. A.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39,7	12,7	0,49	—
39,9	12,8	—	—
39,8	12,7	—	—
39,8	12,8	—	—
39,8	—	—	—
39,9	—	—	—
Mittel 39,82	12,75	0,49	13,24

$S_A = 26{,}58$.

III. Reihe. B.

s	s_b	s_d	$s_b + s_d$
39,6	12,8	0,49	—
39,8	12,8	—	—
39,8	12,8	—	—
39,9	12,8	—	—
39,9	—	—	—
39,9	—	—	—
39,9	—	—	—
39,9	—	—	—
Mittel 39,84	12,80	0,49	13,29

$S_B = 26{,}55$.

Generalmittel $S = 26{,}72 \pm 0{,}10$ für eine Belastung von 0,0625 kg. Die Einheit für die Grössen S ist immer die halbe Wellenlänge des Natriumlichtes. Es folgen nun die Dimensionsbestimmungen.

Der Abstand der Lager (l) war an der Mikrometerschraube gemessen = 15,000 mm. Corrigirt = 15,030 mm.

Messung der Breite:

Die Sphärometerschraube bis auf die Spitze herabgeschraubt, ergab die Nullstellung:

13,8025 13,8029 Mittel 13,8027.

Wurde jetzt das Stäbchen dazwischen gebracht, so ergaben sich an zehn verschiedenen Punkten des Querschnittes folgende Ablesungen an der Schraube. (Jede Zahl ist das Mittel aus zwei Einstellungen.)

16,917 16,916 16,902 16,900 16,900 16,898 16,909 16,914
16,910 16,907 Mittel 16,907.

Also die Breite (b) = 16,907 − 13,803 = 3,104 mm.

Die Messung der Dicke geschah bei jedem Stäbchen an je drei Punkten auf acht Querlinien, also im ganzen an 24 Punkten.

Nullstellung der Schraube:

13,8018 13,8020 Mittel 13,8019.

Einstellungen auf das Stäbchen:

Vom Ende ohne Signatur[1]) — bis zur Mitte:

1) Die Stäbchen waren zur Unterscheidung signirt.

14,8200	14,8200	14,8245	14,8225
14,8175	14,8200	14,8260	14,8235
14,8200	14,8192	14,8230	14,8238.

Vom Ende mit Signatur — bis zur Mitte:

14,8255	14,8260	14,8280	14,8252
14,8293	14,8290	14,8296	14,8278
14,8295	14,8298	14,8295	14,8270

Mittel 14,8248.

Also die Dicke $d = 14{,}8248 - 13{,}8019 = 1{,}0229$, davon 0,0035 (vgl. p. 331); bleibt $d = 1{,}019$.

Hiermit sind alle Daten zur Berechnung des Elasticitätscoëfficienten gegeben.

Die Berechnung geschah nach der Formel:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot l^3}{s \cdot \lambda_D \cdot b h^3} \left\{1 + 3 \frac{h^2}{l^2}\right\} \text{kg mm},$$

(wo P die Belastung, l der Abstand der Lager, b die Breite, h die Dicke, s die Anzahl der durch das Fadenkreuz gewanderten Interferenzstreifen, λ_D die Wellenlänge des Natriumlichtes bedeutet.)

In derselben Weise wurden die Beobachtungen an den anderen Stäben ausgeführt. Die Beobachtungen ergaben folgende Werthe E für die Elasticitätscoëfficienten:

Stab senkrecht zur Würfelfläche.

Nr. I	E	Nr. II	E		Nr. III	E
4.	3890	14.	3890		17.	4037
6.	3991	15.	4096		18.	4009
12.	4155	—	—		—	—
Mittel	4012	Mittel	3993	Gesammtm. 4009	Mittel	4023

Stab senkrecht zur Dodekaederfläche.

Nr. I	E	Nr. II	E		Nr. III	E
3.	[1959]	14.	2092		17.	2063
7.	[1983]	16.	2080		19.	2106
9.	2063	—	—		—	—
10.	2126	—	—		—	—
Mittel	2094	Mittel	2086	Gesammtm. 2088	Mittel	2084

Hierzu ist zu bemerken, dass den Beobachtungen an Stab Nr. 3 und 7 senkrecht zur Dodekaëderfläche wegen der grossen Breite derselben kein Gewicht beizulegen ist; dieselben sind nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt; bei der Berechnung des Mittels und des mittleren Fehlers sind dieselben nicht berücksichtigt.

3) Chlorsaures Natron.

Für die Krystalle dieses Körpers liegen nur Beobachtungen an drei Stäbchen aus demselben Krystalle geschnitten vor, an denen die Messung gelang. Dieselben ergaben als provisorische Werthe:

E_1 senkrecht zur Würfelfläche . . 4047
E_2 „ „ Dodekaëderfläche 3190.

Berechnet man sich aus der oben p. 343 gegebenen Tabelle die mittleren Fehler, so erhält man:

	E	Mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtungen	Mittlerer Fehler des Resultates
Sylvin senkrecht zur Würfelfläche	4009	±91	±34
Sylvin senkrecht zur Dodekaëderfläche	2088	±56	±21

Die Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe ist befriedigend, da der mittlere Fehler des Gesammtresultates (Mittel aus den Elasticitätscoëfficienten aller Stäbchen, die die gleiche Richtung im Krystall haben) entsprechend der Ungenauigkeit in der Messung der Senkung (1—2°/$_0$) nur ca. 1°/$_0$, der des Elasticitätscoëfficienten des einzelnen Stäbchens nur ca. 2°/$_0$ beträgt. Das Resultat wird noch günstiger, wenn man die Mittelwerthe von E für jeden Krystall miteinander vergleicht.

Krystall	E_1 senkrecht zur Würfelfläche	E_2 senkrecht zur Dodekaëderfläche
Nr. I.	4012	2094
„ II.	3993	2086
„ III.	4023	2084
Mittel	4009	2088

Die Abweichungen erreichen mithin nicht $^1/_2$°/$_0$. Hiernach kann man wohl mit grosser Wahrscheinlichkeit behaupten, dass:

der Elasticitätscoëfficient in den Krystallen des Sylvins für die gleiche Richtung im Krystalle eine Constante ist.

Dieses Resultat wird durch etwaige constante Fehler in den Dimensionsbestimmungen nicht alterirt, da hierdurch alle Werthe in derselben Weise beeinflusst werden. Ausser den Fehlern, die bei der Bestimmung der Dimensionen der Stäbchen und bei der Messung der elastischen Senkung gemacht werden, können noch folgende Umstände die Richtigkeit des Resultates beeinflussen.

Fällt die Richtung der Längsaxe des Stäbchens nicht genau mit der Würfel- oder Dodekaëderflächennormale zusammen, so wird die Senkung für die Stäbchen, deren Längsrichtung parallel der Würfelnormale liegt, grösser, die der Stäbchen, welche parallel der Dodekaëderflächennormale geschnitten sind, kleiner als ihr wahrer Werth gefunden werden. Da man jedoch bekanntlich bei einiger Vorsicht die vorgeschriebene Richtung auf 1° innehalten kann, so wird diese Fehlerquelle keinen grossen Einfluss ausüben. Sehr oft sind aber die Krystalle nicht homogen, indem sie im polarisirten Lichte Einschlüsse von doppeltbrechenden Substanzen oder reihen- und flächenförmig angeordnete Interpositionen von Flüssigkeitszellen zeigen. Bevor also aus einem Krystalle die Stäbchen angefertigt werden, muss man denselben sorgfältig darauf hin untersuchen, da man nur solche Krystalle gebrauchen kann, welche diese Erscheinungen nicht zeigen. Noch nothwendiger ist die genaue Untersuchung der fertigen Stäbchen, da dieselben häufig durch die Bearbeitung Sprünge erhalten.

Vergleichen wir jetzt die für den Sylvin erhaltenen Werthe mit denen der beiden anderen untersuchten Krystalle des regulären Systems, so ergibt sich:

	E_1 senkrecht zur Würfelfläche	E_2 senkrecht zur Dodekaëderfläche	$\frac{E_1}{E_2}$
Sylvin KCl	4010	2088	1,92
Steinsalz NaCl	4030	3395	1,19
Chlors. Natron $NaClO_3$.	4047	3190	1,27

Freiburg i. B., Phys. Inst. d. Univers., Nov. 1881.



XII. *Ueber absolute Maasse; von C. Bohn.*

Gauss hat in seiner grundlegenden Arbeit: „Intensitas vis magneticae ad mensuram absolutam revocata", drei Grundeinheiten, der Länge, der Zeit und der Masse gewählt. In allen späteren, absolute Maasse betreffenden Abhandlungen hat man die Gauss'schen Grundgrössen beibehalten. Dass das Raumelement (Länge) und die Zeit, diese „von der Erfahrung unabhängige Formen der sinnlichen Anschauung" (Kant) Grundeinheiten seien, darüber wird kein Zweifel erhoben. Hingegen ist die dritte Grundgrösse, die Masse keineswegs eine gebotene. Ebenso gut als die Masse könnte man die Kraft (d. h. einen bestimmten Zug oder Druck) als Grundgrösse annehmen. Bezeichnen M, L, T, K die Einheiten der Masse, Länge, Zeit, Kraft, so lässt sich aus der bekannten Dimensionsbestimmung der Kraft: $K \doteqdot M L T^{-2}$ durch Umkehr finden $M \doteqdot K L^{-1} T^{2}$, und unschwer können nun alle physikalischen Grössen durch Kraft, Länge und Zeit, statt wie bisher durch Masse, Länge und Zeit ausgedrückt werden.

Statt der Masse lässt sich als dritte Grundgrösse auch das Maass oder der Stärkegrad der stofflichen Raumerfüllung, mit anderen Worten die Dichte wählen, und das entspricht eigentlich am besten dem Grundgedanken des metrischen Systems. Hat man die Dichte eines bestimmten Stoffes (Wasser angegebener Beschaffenheit) als Einheit gewählt, so ist die Masseneinheit nicht länger unabhängig, sondern ändert wie die Volumeneinheit oder $M \doteqdot L^3$. Wird die Masseneinheit in astronomischer Art, mit Bezugnahme auf ihre Anziehung (Gravitation) festgestellt, so ergibt sich für die Dimension der Masse $M \doteqdot L^3 T^{-2}$.[1])

Durch diese Bemerkungen wurde ich darauf geführt, dass für die Dimensionsbestimmungen und Einheiten der physikalischen Grössen zwei Grundbegriffe ausreichen, nicht deren drei erforderlich sind.

In meinen „Ergebnissen physikalischer Forschung" (1878)

1) Maxwell, A treatise on electricity and magnetism **1.** p. 4. 1873.

habe ich (p. 965) die oben angeführten Sätze aus Maxwell's Buch mitgetheilt und ausgesprochen, die Masse könne sowohl als Grundbegriff als auch als abgeleiteter angesehen werden. Ich glaube jetzt, die Wahl nicht mehr frei lassen zu können, sondern behaupte: die Masse ist keine Grundgrösse, sondern eine abgeleitete Grösse.

Der bestimmende Grund ist dieser: Das Newton'sche Gravitationsgesetz $C.M_1 M_2/L^2 = \text{Kraft} \doteqdot M.L.T^{-2}$ nöthigt, um die Homogenität der Gleichung herzustellen, die Constante $C \doteqdot M^{-1} L^3 T^{-2}$ anzunehmen. Das thun Herwig[1]) und P. Volkmann[2]) auch unbedenklich. Mir hingegen ist es unzweifelhaft, dass der Factor C in dem mathematischen Ausdrucke des Gravitationsgesetzes nur eine unbenannte Zahl sein kann, d. h. von der Dimension Null für jede Grundgrösse sein muss. Hat man beispielsweise erkannt, dass die Schwingungsdauer zweier Pendel den Quadratwurzeln ihrer Längen direct, den Quadratwurzeln der Beschleunigungen verkehrt proportional sind und von sonst nichts abhängen, weder von der Weite der Schwingungen, noch dem Stoffe, noch der Zeit u. s. w., so schliesst man, die Schwingungsdauer T eines Pendels von der Länge l und der Beschleunigung g sei und könne nur sein:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ mal einer unbenannten Zahl,}$$

die noch zu bestimmen bleibt und bekanntlich gleich π gefunden wird. Aehnlich für den mathematischen Ausdruck des Gravitationsgesetzes. Man hat erkannt, die Anziehungen in den verschiedenen Fällen seien proportional dem Producte der Massen (M) der aufeinander wirkenden Punkte und verkehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes (L), hingen aber von sonst nichts ab, weder vom Stoff, noch von der relativen Bewegung, noch von der Zeit u. s. w. Ganz dieselbe Schlussweise, welche oben den Ausdruck für die Schwingungsdauer ergab, führt dahin, zu sagen: die Gravi-

1) Herwig, „Physikalische Begriffe und absolute Maasse" 1880.

2) P. Volkmann, Wied. Ann. **16.** p. 484. 1882.

tationsanziehung zwischen zwei Massen ist und kann nur sein gleich:

$$\frac{M_1 M_2}{L^2} \text{ mal einer unbenannten Zahl,}$$

die noch zu bestimmen bleibt; sie hängt nur von der Wahl der Einheiten ab. Wäre der Factor C im Ausdrucke für das Newton'sche Gesetz nicht eine unbenannte Zahl, sondern eine Function von Länge, Masse, Zeit, so würde die Anziehung durch das Product dieser Function mit $M_1 M_2/L^2$, dargestellt, also eine neue Function dieser Grössen. Unter Benutzung der Function, welche Herwig und Volkmann für die Grösse C aufgestellt haben, findet man:

$$\text{Anziehung} = \frac{l^3}{m^2} \cdot \frac{M_1 M_2}{L^2}$$

und da l/L und m/M als Verhältnisse gleichartiger Grössen, unbenannte Zahlen sind, ergibt sich:

$$\text{Gravitationsanziehung} = \text{Zahl} \cdot \frac{L \cdot M}{T^2},$$

d. h. Proportionalität mit einer Masse (nicht dem Producte beider) und mit dem Abstande der Massen (nicht dem umgekehrten Abstandsquadrate); also offenbarer Widerspruch mit dem Gravitationsgesetze.

Wird, wie es allein zulässig ist, der Factor C im Ausdrucke für das Gravitationsgesetz als unbenannte Zahl aufgefasst, so folgt, wie Maxwell (ohne das weiter zu benutzen) schloss, $M \doteqdot L^3 T^{-2}$, oder, wie ganz gleichwerthig Helmholtz[1]) formulirt, die Dichte $\doteqdot T^{-2}$.

Die Absicht, alle physikalischen Grössen durch Länge und Zeit allein auszudrücken, ist leicht zu erfüllen, und nachfolgend gebe ich eine Zusammenstellung der Dimensionsauswerthungen. Hinsichtlich der Ableitung verweise ich auf F. Kohlrausch[2]) oder, um grösserer Ausführlichkeit willen, auf Herwig.[3]) Wenn man will, kann man die nachstehenden Resultate einfach dadurch gewinnen, dass man für M in den bisher üblichen Ausdrücken $L^3 T^{-2}$ einsetzt.

1) Helmholtz, Wied. Ann. **17.** p. 44. 1882.

2) Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik

3) Herwig, Physikal. Begriffe u. absolute Maasse

Grundgrössen:

Länge $\doteqdot L$; Zeit $\doteqdot T$.

Abgeleitete Grössen:

Fläche $\doteqdot L^2$; Volumen $\doteqdot L^3$,
Winkelgeschwindigkeit $\doteqdot T^{-1}$; Winkelbeschleunigung $\doteqdot T^{-2}$,
Bahngeschwindigkeit $\doteqdot L\,T^{-1}$; Bahnbeschleunigung $\doteqdot L\,T^{-2}$.
Dichte $\doteqdot T^{-2}$; Masse $\doteqdot L^3\,T^{-2}$,
Bewegende Kraft oder Gewicht $\doteqdot L^4\,T^{-4}$; d. h. die vierfache Dimension einer Geschwindigkeit.

Bewegungsquantität oder Antrieb der Kraft (Impetus) $\doteqdot L^4\,T^{-3}$.

Energie (actuelle oder potentielle, mechanische Arbeit, lebendige Potenz, Wärmemenge), ferner Drehmoment $\doteqdot L^5\,T^{-4}$.

Trägheitsmoment $\doteqdot L^5\,T^{-2}$.

Spannung oder Flächendruck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$, wie hydrostatischer und hydrodynamischer, aërostatischer und aërodynamischer Druck, Elasticitätsmodul (Torsions-, Schubmodul), verschiedene Festigkeitsmodule, Compressibilitätscoëfficient, ferner molecularer Oberflächendruck von Flüssigkeiten $\doteqdot L^2\,T^{-4}$, d. i. die zweifache Dimension einer Bahnbeschleunigung.

Oberflächenspannung einer Flüssigkeit für die Einheit der Krümmung $\doteqdot L^3 T^{-4}$.

Capillaritätscoëfficient $= \frac{\text{Oberflächenspannung}}{\text{Dichte}} \doteqdot L^3\,T^{-2}$.

Diffusionscoëfficient $\doteqdot L^2 T^{-1}$.

Temperatur $\doteqdot L^2 T^{-2}$, gleichwerthig einem Geschwindigkeitsquadrat.

Coëfficient der inneren Reibung von Flüssigkeiten und Gasen (η), dann Coëfficient der inneren Wärmeleitung und Erkaltungsgeschwindigkeit $\doteqdot L^2\,T^{-3}$.

Coëfficient der äusseren Wärmeleitung oder Wärmeabgabecoëfficient, ferner Heizungscoëfficient $\doteqdot LT^{-3}$.

Verhältniss der Coëfficienten der äusseren und inneren Wärmeleitung $\doteqdot L^{-1}$.

Sogenannte Wärmecapacität oder Wärmebedarf eines Körpers für bestimmte Wirkung ist eine Wärmemenge oder Energie oder Arbeitsgrösse, also $\doteqdot L^5\,T^{-4}$.

Auch die Schmelzwärme, Verdampfungswärme, Aus-

dehnungswärme, Spannungswärme u. s. w. sind als Wärmemengen zu fassen und also $\doteq L^5 T^{-4}$. Herwig gebraucht in seinem angeführten Buch diese Bezeichnungen relativ, d. h. als Verhältnisse zwischen Wärmemengen und Massen und findet demgemäss die Dimension gleich der einer Temperatur ($L^2 T^{-2}$).

Die specifische Wärme, d. h. das Verhältniss des Wärmebedarfs eines Körpers für bestimmte Wirkung zum Wärmebedarf der gleichen Masse Wasser für die gleiche Wirkung ist eine unbenannte Zahl oder von der Dimension Null.

Für die electrischen und die magnetischen Grössen hat man bekanntlich zwei verschiedene Maasssysteme angenommen, das electrostatische oder mechanische (soll durch den Index s gekennzeichnet werden) und das electrodynamische (Index d) oder electromagnetische. Die Maasszahlen nach electrodynamischer und electromagnetischer Einheit unterscheiden sich durch einen Factor, der eine Potenz von 2 ist, hinsichtlich der Dimensionen besteht also kein Unterschied zwischen electromagnetischem und electrodynamischem Maasse.

Ersetzt man M durch $L^3 T^{-2}$ in den Dimensionsformeln, wie sie bisher für die electrischen und die magnetischen Grössen aufgestellt wurden, so erzielt man zunächst den Vortheil, alle gebrochenen Exponenten fortzuschaffen, und gerade diese boten der Anschaulichkeit besondere Schwierigkeiten.

Man findet:

Electricitätsmenge:

$E_s \doteq L^3 T^{-2}$ (wie Capillaritätscoëfficient),

$E_d \doteq L^2 T^{-1} = E_s . (L/T)^{-1}$ (wie Diffusionscoëfficient).

Electrische Dichte nach Volumen:

$\varrho_s \doteq T^{-2}$ (wie Massendichte),

$\varrho_d \doteq L^{-1} T^{-1} = \varrho_s . (L/T)^{-1}$.

Electrische Flächendichte:

$\sigma_s \doteq L T^{-2}$ (wie Bahnbeschleunigung),

$\sigma_d \doteq T = \sigma_s . (L/T)^{-1}$ (eine Zeit).

Stromstärke:

$J_s \doteq L^3 T^{-3}$ (dreifache Geschwindigkeitsdimension, oder wie Quotient aus Masse und Zeit),



$J_d \doteq L^2 T^{-2} = J_s . (L/T)^{-1}$ (zweifache Geschwindigkeitsdimension, oder wie Quotient aus Masse und Länge).

Electrisches Potential:

$V_s \doteq L^2 T^{-2}$ (zweifache Geschwindigkeitsdimension),

$V_d \doteq L^3 T^{-3} = V_s . (L/T)^{-1}$ (dreifache Geschwindigkeitsdimension).

Electrischer Leitungswiderstand:

$R_s \doteq L^{-1} T$ (reciproke Geschwindigkeit),

$R_d \doteq L T^{-1} = R_s . (L/T)^2$ (Geschwindigkeit).

Capacität:

$C_s \doteq L$ (Länge),

$C_d \doteq L^{-1} T^2 = C_s . (L/T)^{-2}$.

Magnetismusmenge oder Polstärke[1]):

$\omega_s \doteq L^2 T^{-1}$ (wie Difussionscoëfficient),

$\omega_d \doteq L^3 T^{-2} = \omega_s . (L/T)^{+1} = E_s$ (wie Capillaritätscoëfficient).

Magnetisches Moment oder Stabmagnetismus:

$\mu_s \doteq L^3 T^{-1}$,

$\mu_d \doteq L^4 T^{-2} = \mu_s . (L/T)^{+1}$.

Magnetisches Potential:

$V'_s \doteq L^3 T^{-3}$ (dreifache Geschwindigkeitsdimension oder wie Masse durch Zeit),

$V'_d \doteq L^2 T^{-2} = V'_s \cdot (L/T)^{-1}$ (zweifache Geschwindigkeitsdimension).

Magnetisches Feld, auch Horizontalcomponente des Erdmagnetismus:

$H_s \doteq L^2 T^{-3}$ (wie innerer Wärmeleitungscoëfficient oder Reibungscoëfficient),

$H_d \doteq L T^{-2} = H_s . (L/T)^{-1}$ (wie Bahnbeschleunigung).

In vorstehender Zusammenstellung ist der bekannte Satz hervorgehoben, dass das Verhältniss des electrostatischen und des electrodynamischen Maasses derselben Grösse eine Potenz

1) Clausius findet die Dimension anders (Wied. Ann. **16.** p. 539. 1881.) Demgemäss wäre $\omega_s \doteq L^4 T^{-3}$ und ω_d wie oben.

einer Geschwindigkeit ist, — welche Clausius die kritische Geschwindigkeit nennt.

Die meisten Autoren begnügen sich, anzugeben, in welchen Fällen es am bequemsten und damit am empfehlenswerthesten sei, das eine oder das andere Maasssystem zu gebrauchen. Fleeming Jenkin[1]) aber fügt dem noch zu, diese doppelte Art zu messen, führe keine grössere Misslichkeit oder Unzukömmlichkeit (inconvenience) mit sich, als der Gebrauch von Kette, Ruthe, Faden, Knoten in Feldmessung und Schifffahrt gegenüber den Zollen, Fussen, Metern in Maschinenbeschreibung u. s. w., oder als die Flächengrössenangabe bald nach Acker, Tagwerk, Morgen, Joch u. s. w., bald nach Quadratcentimeter u. a. Dieser Meinung kann ich jedoch nicht beistimmen. Denn Kette, Ruthe, Faden, Knoten, Meile, Zoll, Meter u. s. f. sind lauter Grössen derselben Dimension, nämlich einfach Längen, die Angaben nach einer Einheit werden durch Multiplication mit einer reinen Zahl sofort in Angaben nach der anderen Einheit umgewandelt. Ebenso haben die verschiedenen Flächenmaasse genau die gleiche Dimension, die doppelte einer Länge. Das landwirthschaftliche Flächenmaass Tagwerk ist, wörtlich genommen, eine Arbeitsgrösse im Verhältniss zu einer Zeit, und ähnlich ist Joch zu verstehen; ein Tagwerk oder ein Morgen Fläche kann gerade während eines Arbeitstages oder an einem Morgen in gewöhnlicher Art landwirthschaftlich bearbeitet (z. B. gepflügt) werden, ein Joch gerade von einem Gespanne (Joche) Ochsen binnen eines Arbeitstages bearbeitet werden. Es kommen im täglichen Gebrauche noch manche Maassangaben vor, welche wörtlich genommen Unsinn aussagen. So, wenn man die Entfernung zweier Orte durch eine Zeitangabe, eine Stunde z. B., ausdrückt; das Verständniss ist leicht: gemeint ist, die Entfernung (Länge) könne von einem Fussgänger mit mittlerer Geschwindigkeit in Zeit einer Stunde zurückgelegt werden. Aehnlich liegen stillschweigende Voraussetzungen unter, wenn man die Menge eines Bekleidungsstoffes durch eine Länge ausdrückt. Es genügt die Angabe

1) Fleeming Jenkin, Textbook of electricity. 4. Ausg. p. 108. 1878.

soviel Meter oder Ellen, wenn es überhaupt nur auf den Flächeninhalt ankommt, die Form als Rechteck vorausgesetzt wird und die Breite bekannt ist. Aber durchaus nicht so einfach ist es zu verstehen, dass und wie eine und dieselbe electrische oder magnetische Grösse durch Multipla artverschiedener Einheiten ausgedrückt werden könne.

Nach meinem Dafürhalten besteht geradezu Widerspruch zwischen dem electrostatischen und dem electrodynamischen Maasssysteme. Eine Stromstärke z. B. kann nicht gleichberechtigt durch das Quadrat einer Geschwindigkeit (electrodynamisch) und durch den Cubus einer Geschwindigkeit (electrostatisch) dargestellt werden.

Beide Maasssysteme nehmen ihren Ausgang von Erscheinungen, welche man die Grundphänomene der Electricitätslehre und des Magnetismus zu nennen pflegt, und für welche man ein dem Newton'schen Gravitationsgesetze ähnliches Gesetz gelten lässt. Man definirt Einheit der Electricitäts-(Magnetismus-)Menge jene, die auf die gleich grosse Menge aus der Entfernungseinheit die Krafteinheit ausübe.

Ist man aber berechtigt, die fraglichen Erscheinungen so zu deuten, als sei die Wirkung zweier Mengen Electricität (oder Magnetismus), die dem Entfernungsquadrat verkehrt proportional ist, eine Kraft, in dem Sinne und von der Dimension, wie in der Mechanik, z. B. wie die Gravitationsanziehung? Ist diese Wirkung einer bewegenden Kraft $\neq L^4 T^{-4}$ oder ist sie einer Beschleunigung $L T^{-2}$ gleichzusetzen? Da man von diesen Auffassungen der sogenannten Grundphänomene ausgehend zu widersprechenden Ergebnissen geführt wird, so können nicht beide Auffassungen zulässig sein (vielleicht keine).

Man kann sich ein Electricitätsquantum in einem unendlich kleinen Raume (Punkt) denken, und zwar entweder positiver oder negativer Art. Es ist aber zu bedenken, dass wenn sich zwei electrische Körper einander nahe treten (ob gross im Volumen oder klein oder unendlich klein, ändert nichts wesentlich), eine Influenz oder Induction eintritt, d. h. nach gewöhnlicher Sprechweise eine andere Vertheilung der Electricität, Aenderung der localen Dichte der

Electricität. Also besteht nicht die ganze Wirkung der zwei Electricitätsmengen auf einander in einer ponderomotorischen Anziehung oder Abstossung. Zu erinnern ist noch, dass bei Festsetzung der Electricitätsmengeneinheit in der gewöhnlichen Art Rücksicht auf das Dielectricum zu nehmen ist; die oben angeführte Definition müsste streng genommen dadurch ergänzt werden, dass man ein bestimmtes Zwischenmittel angibt, z. B. Luft im Normalzustande oder etwa sogenanntes Vacuum.

Man pflegt sich auch eine Quantität positiven oder negativen Magnetismus in einem unendlich kleinen Raume zu denken, das ist aber wohl eine zu weit gehende Abstraction, da es keine unipolaren Magnete gibt, beide hypothetisch entgegengesetzte Magnetismen stets zusammen vorkommen, während allerdings ein electrischer Körper jeweils nach einer Art electrisirt ist, anders ausgedrückt jeweils nur positiv oder nur negativ electrische Eigenschaft besitzt. Auch Magnete (oder Pole) üben Induction auf einander aus, d. h. bei Nähe der Pole oder Magnete wird der magnetische Zustand oder die magnetische Anordnung geändert, die Wirkung der zwei Magnete oder Pole auf einander ist durch die ponderomotorische Anziehung (oder Abstossung) noch nicht vollständig beschrieben. Dass auch die ponderomotorische Wirkung zweier Magnetpole auf einander von der Zwischensubstanz, davon ob und wie stark diese diamagnetisch ist, bedingt wird, dass in die übliche Definition der Polstärkeneinheit, also die Angaben des Zwischenmittels (des Diamagneticums) eingehen müsste, darf in Erinnerung gebracht werden.

Um in die Maassangaben electrischer und magnetischer Grössen mehr Klarheit zu bringen, scheint es mir zweckmässig, nicht von den für die Auffassung (auch für das Experiment) nicht genügend einfachen sogenannten Grunderscheinungen auszugehen, sondern von unbestrittenen und einfacheren Vorgängen. Ein tauglich scheinender Satz ist jener, der die vollständige Umsetzbarkeit der ganzen Stromarbeit in eine Wärmemenge (Energie oder mechanische Arbeit) ausspricht. Bezeichnet J die Stromstärke, V die electro-

motorische Kraft oder einen Potentialunterschied, t die Stromdauer, Q eine Wärmemenge, so ist bekanntlich $VJt = Q$. Da nun $Q \mathrel{=\!\!\!\!|} L^5\, T^{-4}$, so findet man:

$$VJ \mathrel{=\!\!\!\!|} L^5\, T^{-5}.$$

Könnte man noch die Dimension von V/J angeben, so wäre die Dimensionsermittelung aller electrischer und magnetischer Grössen — der letzteren mit Hülfe des Satzes von der Aequivalenz eines Magnets mit einem zu seiner Axe rechtwinkeligen Kreisstrome leicht. Nun ist nach dem Ohm'schen Gesetze V/J ein Leitungswiderstand R. Gerade in der Dimensionsbestimmung des Leitungswiderstandes nach electrostatischem und electrodynamischem Maass zeigt sich ein auffälliger Widerspruch; nach dem ersten Maasssysteme ist der Widerstand einer umgekehrten Geschwindigkeit gleichwerthig oder proportional, nach dem zweiten aber einer Geschwindigkeit selbst.

Schon vor langer Zeit wurde der Leitungswiderstand als eine Verzögerung der Entladung, als eine umgekehrte Geschwindigkeit aufgefasst. Die schönen Untersuchungen von Riess[1]) stellen die Identität von Leitungswiderstand und Verzögerungswerth fest. Mit je kleinerer Geschwindigkeit die electrische Ausgleichung oder die Ausbreitung eines electrischen Zustandes durch einen Körper erfolgt, desto grösser ist dessen Leitungswiderstand (wie das electrostatische System aussagt), nicht desto kleiner (wie wegen directer Proportionalität mit Geschwindigkeit im electrodynamischen Maasssysteme behauptet wird). Nach Analogie des Reibungswiderstandes u. s. w. kann man, wie mir scheint, unbedenklich den Leitungswiderstand einer Geschwindigkeit verkehrt proportional nehmen, oder $R \mathrel{=\!\!\!\!|} L^{-1}\, T$. Dieses angenommen oder zugegeben, folgt aus:

$$VJ \mathrel{=\!\!\!\!|} L^5\, T^{-5} \quad \text{und:} \quad \frac{V}{J} \mathrel{=\!\!\!\!|} L^{-1}\, T,$$

dass: $$J \pm L^3\, T^{-3} \quad \text{und:} \quad V \mathrel{=\!\!\!\!|} L^2\, T^{-2}.$$

Das steht im Einklange mit den Angaben des electrostatischen Maasssystems. Definirt man die Einheit der

---

1) Riess, „Lehre von der Reibungselectricität" **1.** p. 26. 1853.

Electricitätsmenge als jene, die während der Zeiteinheit in einem Strome von der Stärke Eins durch den Querschnitt des Leiters geht, so erhält man, unter Zuziehung des Satzes von der Aequivalenz eines Magnets und eines Kreisstromes, für alle electrischen und magnetischen Grössen die Dimension ganz übereinstimmend mit dem electrostatischen Maasssysteme.

Dieses verdient meines Erachtens auch noch aus anderen Gründen den Vorzug vor dem electromagnetischen. Nach ihm wird nämlich die Volumendichte der Electricität $\mp T^{-2}$, gerade wie die Massendichte oder das Maass der stofflichen Raumerfüllung, während das electrodynamische System zu dem unvorstellbaren Ausdrucke $\varrho_d \mp L^{-1} T^{-1}$ führt, der keine Analogie mit jenem unbezweifelten für die Stoffdichte bietet.

Ferner kann man sich eine Capacität wohl vorstellen als eine Flächenausdehnung im Verhältniss zu einem Abstande, d. h. also $\mp(L^2 : L)$ oder $\mp L$. So wird die Capacitätsdimension auch im electrostatischen Maasssysteme gefunden; unter $C_d \mp L^{-1} T^{-2}$ kann ich mir hingegen nichts vorstellen.

Die Dimension einer Electricitätsmenge $L^3 T^{-2}$, wie sie gefunden wird, wenn man ausgeht von der Aequivalenz von JVt mit einer Arbeit und der Gleichwerthigkeit eines Leitungswiderstandes mit einer umgekehrten Geschwindigkeit, gibt $(E_1 E_2)/l^2 \mp L^4 T^{-4}$, führt also zur Dimension einer bewegenden Kraft oder eines Gewichts für die Wirkung zweier Electricitätsmengen auf einander. In dem hier vertretenen, mit dem electrostatischen zusammenfallenden Maasssysteme ist die Dimension einer Polstärke oder Magnetismenge $w \mp L^2 T^{-1}$, und das gibt $(w_1 w_2)/l^2 \mp L^2 T^{-2}$, führt also zur Dimension eines Geschwindigkeitsquadrats oder einer Temperatur.[1]) Was man sich darunter etwa vorstellen könnte, will ich hier nicht ausführen, sondern nur daran erinnern, dass der Begriff einer Magnetismusmenge, d. h. eines

1) Nimmt man das electrostatische Maass der Magnetismusmenge in Uebereinstimmung mit Clausius, so liefert $(w_1 w_2)/l^2 \mp L^6 T^{-6}$, das ist die sechsfache Dimension einer Geschwindigkeit.

unipolaren Magnets von verschwindend kleinen Abmessungen hinsichtlich der Zulässigkeit Bedenken erregt.

Nach Vorstehendem, dem sich noch manches in gleicher Richtung gehende anfügen lässt, halte ich dafür, das sogenannte electrostatische Maass sei das allein zulässige, das sogenannte electrodynamische oder electromagnetische aber sei zu verlassen.

P. Volkmann verallgemeinert den Begriff der Masse als Maass für die Quantität des Trägers der Wirkung und fasst ponderable, electrische und magnetische Mengen, ebenso Stromintensitäten einfach als Massen.[1]) Dadurch kommt er natürlich zu Dimensionsangaben, die wesentlich verschieden von den bisherigen sind. Man kann dieses System prüfen an der Homogenität der Gleichung $VJt = Q$. Da aber nach Volkmann:

$$(\dim V) = [m\, l^2\, t^{-2}], \quad (\dim J) = [m], \quad (\dim t) = [t],$$

so ergibt sich $(\dim VJt) = [m^2\, l^2\, t^{-1}]$. Hingegen ist auch bei Volkmann: $(\dim Q) = [m\, l^2\, t^{-2}]$, also entschiedener Widerspruch vorhanden.

Aschaffenburg, 20. September 1882.

XIII. *Zur Rechtfertigung der von R. Kohlrausch bei seinen Untersuchungen über Contactelectricität angewandten Methode; von E. Gerland.*

Bei den mannigfachen Arbeiten, welche der vor kurzem neu entfachte Streit über die grössere Berechtigung der Contact- oder chemischen Theorie hervorgerufen hat, sind namentlich von Exner[2]) und von Zahn[3]) die Untersuchungen R. Kohlrausch's und meine eigenen über diesen Gegen-

1) Volkmann, Wied. Ann. **16.** p. 481. 1882.

2) Exner, Wien. Ber. **82.** II. Abth. p. 376 und **80.** II. Abth. Dec.-Heft 1879.

3) Dr. W. v. Zahn, Untersuchungen über die Contactelectricität. Leipzig 1882.

stand in einer Weise besprochen, welche mich zu den folgenden Bemerkungen nöthigt.

Da Exner's Versuchen alsbald andere entgegengestellt wurden, welche keineswegs zu den von ihm erhaltenen Resultaten führten, da auch vielfach die Berechtigung der von ihm beliebten Deutungen derselben bestritten wurde, so glaubte ich, von einer Verwahrung gegen die bei dieser Gelegenheit geübte ziemlich abfällige Kritik meiner Versuche absehen zu sollen. Der Widerspruch, der darin liegt, dass die Methode Kohlrausch's volle Anerkennung erfährt, im Gegensatze zu meinen nach ihr angestellten Versuchen, ist zu offenbar, als dass ich es dem unbefangenen Leser nicht hätte überlassen sollen, sich darüber ein Urtheil zu bilden. Dazu hatte ich ihn durch die ausführliche Mittheilung meiner Versuche in den Stand gesetzt, hatte auch nicht versäumt, die gewonnenen Zahlen zu controliren. Die Uebereinstimmung der nach ganz verschiedenen Methoden erhaltenen Werthe für die electromotorischen Kräfte zwischen Wasser und einigen Metallen hätte Exner wohl abhalten müssen, lediglich auf die dabei gefundene Thatsache hin, dass sich der Werth $M|H_2O$ nicht direct, sondern nur in der Combination $M|M_1 + M_1|H_2O$ erhalten liess, eine Beobachtung, die ich übrigens nicht allein gemacht habe, die Resultate meiner Versuche kurzer Hand zu verwerfen. Wenn man sich über derartige Schwierigkeiten mit der einfachen Bemerkung hinwegsetzt, dass „die[1]) vielen Irrthümer“ (anders Denkender) „sich von selbst lösen, sobald man den Boden der Contacttheorie verlässt“, so ist dies allerdings bequem, dürfte aber wohl kaum Aussicht auf allgemeine Billigung haben.

Viel weiter, wie Exner, geht nun aber von Zahn. Er verwirft von vornherein die Methode Kohlrausch's und fragt (p. 6), ob man wohl noch die von ihm gefundenen Werthe neben anderweit erhaltenen werde fortführen dürfen. Es wird wohl nicht zu bezweifeln sein, dass von Zahn zu den fortzuführenden Werthen auch die von ihm gefundenen rechnet; aber man traut seinen Augen kaum, wenn man drei Seiten weiter (p. 9) liest, dass diese Werthe nach einer

1) Exner, Wien. Ber. **80.** II. Abth. 1879. p. 17 des Separ.-Abz.

Methode erhalten wurden, welche ihr Urheber selbst als eine Combination der Methoden Hankel's und Kohlrausch's bezeichnet. Er ändert nämlich das Hankel'sche Verfahren nach Kohlrausch's Vorgang dahin ab, dass er in die Ableitung der einen Condensatorplatte zur Erde noch eine als constant zu betrachtende electromotorische Kraft einschaltet und erhält so für seine Versuchsresultate dieselbe Controle, wie sie Kohlrausch für höchst wünschenswerth erachtete. Wenn nun auch von Zahn diese Controle für sehr werthvoll erklärt, wenn er vermuthet (p. 10), dass der in der Unvollkommenheit der Methode Kohlrausch's beruhende Fehler kleiner sei, als der Beobachtungsfehler, den man bei seinen eigenen Beobachtungen zu befürchten habe, so erscheint es als eine völlig widersprechende Forderung, trotzdem Kohlrausch's so wohl begründete Autorität künftighin nicht mehr gelten zu lassen.

Ehe ich nun versuche, die Entstehung dieses Widerspruchs aufzuklären, sei es mir gestattet, die Methode Kohlrausch's den ihr erhobenen Bedenken gegenüber zu rechtfertigen.

Der gewichtigste Einwand, den man auch neuerdings von anderer Seite[1]) dem in Rede stehenden Verfahren gemacht hat, ist der, dass „bei directer Verbindung der Platten und bei der Verbindung mit den Polen der Säule die Capacitäten der geladenen Flächen, also die Vertheilungen der Electricitäten sich ändern.“ Da Kohlrausch so sorgfältig in seinen Electrometern die infolge geänderter Vertheilung zu befürchtenden Ungenauigkeiten vermieden hat, so wird man annehmen dürfen, dass er auch bei seinen Versuchen diese Fehlerquelle nicht übersah, wenn er dies auch nicht ausdrücklich bemerkt. Vermieden hat er sie wenigstens in seinen Versuchsresultaten, was ja von Zahn, wie wir sahen, zugibt, indem er nur solche Werthe zuliess, bei denen die mögliche Grösse dieser Fehler kleiner war, wie die ausserdem zu befürchtenden Beobachtungsfehler. Er nimmt ja doch nur Werthe an, die auf zweierlei Weise, mit und ohne Einschaltung des Elementes, gefunden wurden. Somit war

1) cf. G. Wiedemann, die Lehre von der Electricität. Braunschw. 1882. 1. p. 198.

er jedesmal im Stande, die Grösse des Einflusses geänderter Vertheilung zu übersehen. Wenn er also auch für theoretische Betrachtungen noch vorhanden war, so war er doch experimentell völlig unschädlich. Innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler haben also die von ihm gefundenen Zahlen denselben Anspruch auf Richtigkeit; wie andere auf experimentellem Wege gefundene physikalische Constante auch. Wenn dem Hankel'schen Verfahren, wobei eine Platte zur Erde abgeleitet gehalten wird, jener Vorwurf auch nicht zu machen ist, so trifft es dagegen der gewiss ebenso gewichtige, dass es die Erdableitung als unverändert ansieht, ohne sich davon zu versichern. Nach dem Vorgange von Kohlrausch hat erst von Zahn diesen Einwand durch die Einschaltung des Maass-Daniells und der dadurch möglichen Controle beseitigt. Aber gerade er hat dann auch am wenigsten Recht, den obigen Vorwurf zu erheben.

Ob wirklich der Fehler der durch veränderte Vertheilung hervorgerufen werden kann, die Zuverlässigkeit der von ihm gegebenen Zahlen nicht beeinträchtigt, lässt sich nun bei Kohlrausch's Versuchen auch prüfen, während dies bei den Hankel'schen unmöglich ist. Von Zahn ist freilich anderer Ansicht. Zwar hat er Recht (p. 11), wenn er das Putzen der Platten mit Oel verwirft, und findet, dass Kohlrausch keine nähere Angabe über seine Art des Putzens gegeben hat. Will man also wissen, wie Kohlrausch seine reinen Oberflächen erhielt, so muss man verschiedene Putzmethoden prüfen und falls eine derselben Platten herzustellen erlaubte, welche die Kohlrausch'schen Zahlen wieder beobachten liessen, so dürfte man daraus folgern, entweder, dass man die Putzmethode Kohlrausch's gefunden, oder dass man es mit ganz gleichen und dann doch wohl reinen Oberflächen zu thun habe. Jedenfalls würde die Möglichkeit des Wiederfindens der Kohlrausch'schen electrischen Differenzen den Grad der Annäherung an die entsprechenden physikalischen Constanten genau beurtheilen lassen. Dies ist nun in meiner Arbeit geschehen. Kohlrausch's und meine Zahlen für dieselbe electrische Differenz sind oft genug nebeneinander gestellt worden, und man hätte wohl erwarten können, dass von Zahn diese

Thatsache nicht vollständig mit Stillschweigen übergangen und infolge davon einen weiteren Vortheil der Hankel'schen Bestimmungen behauptet hätte, der nicht vorhanden ist. Genauer wenigstens, wie ich es gethan habe, lässt sich der Zustand einer Metalloberfläche wohl schwerlich physikalisch definiren, von Zahn selbst hat es wenigstens nicht gethan (p. 18 ff.)

Nun habe ich allerdings die electrischen Differenzen von reinen Metallen bestimmt, welche als galvanoplastische Ueberzüge auf Platten des käuflichen Metalles sich befinden. Den Beobachtungen Kohlrausch's und meinen Erfahrungen zu folge sind die Bedenken von Zahn's gegen deren Anwendung doch wohl sehr übertrieben. Selbstverständlich freilich wird man „gelb gewordene Versilberungen, missfarbige oder gar poröse Ueberzüge" ebenso ausschliessen, wie solche, welche zu dünn sind. So lange aber das directe Versuchsresultat Kohlrausch's nicht ebenfalls auf experimentellem Wege als unrichtig nachgewiesen ist, und so lange nicht bessere Methoden, Platten aus ganz reinen Metallen herzustellen, angegeben werden, wird man aus der Anwendung solcher Ueberzüge keinen Einwand von einigem Gewichte hernehmen können.

Sind somit die gegen Kohlrausch's Methode erhobenen Bedenken, denen eine gewisse Berechtigung zuzuschreiben war, ganz und gar nicht geeignet, die Brauchbarkeit der von ihm erhaltenen Resultate zu beeinträchtigen, so gilt dies um so mehr von den weiteren Einwänden, die von Zahn erhebt, da sie lediglich auf Missverständnissen beruhen. Durch solche klärt sich denn auch der oben aufgedeckte Widerspruch in von Zahn's Schrift leicht auf. Kohlrausch hat bekanntlich anfangs nach einer unvollkommneren Methode gearbeitet, wie später. Bei seinen ersten Untersuchungen waren die Oberflächen seiner Platten nicht vollständig gereinigt, und er begnügte sich, die Drähte, welche die Pole des Elementes mit den Condensatorplatten verbanden, voneinander und von der sie haltenden Hand durch Kork zu isoliren.[1]) Während seiner Versuche stiegen ihm aber Bedenken gegen die Genauigkeit der Resultate derselben auf. Er brach sie also ab, benutzte sie nur zum Nachweise des

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 82. p. 10. 1851.

Gesetzes der Spannungsreihe, construirte seinen Condensator und Commutator und gelangte dann erst zu seinen definitiven Zahlen. Dabei waren die Poldrähte des Elementes, wie es die seiner Abhandlung zugefügte Figur unzweifelhaft ergibt, isolirt zu den auf Schellacksäulchen aufgesetzten Quecksilbernäpfchen geführt, die dann mit den Condensatorplatten wiederum durch isolirte Drähte verbunden waren.[1]) Das Element aber bestand aus Glasgefässen, deren Flüssigkeiten durch Bindfäden communicirten, welche in heberförmig gebogenen Glasröhrchen verliefen. Thonwände (wie Wiedemann[2]) angibt) wandte er zur Trennung derselben nicht an. Ich verfuhr ebenso, nur dass ich statt des Daniell'schen ein Meidinger'sches Element benutzte. Wenn demnach von Zahn angibt (p. 5), dass Kohlrausch sein Daniell'sches Element durch Holz und Kork hinreichend zu isoliren geglaubt habe, während dasselbe von mir durch einen (allerdings mit einem Fragezeichen versehenen) Porzellanuntersatz erstrebt worden sei, so ist dies ein Irrthum; wir haben beide die Isolirung mit Glas und Schellack erstrebt. Die Isolirung durch Glas ist ja nun vielleicht ein wenig veränderlich je nach dem Feuchtigkeitszustand der umgebenden Luft. Jedoch ist daraus durchaus kein Einwand zu erheben, da die electromotorische Kraft des Elementes nur für die kurze Zeit, welche ein Versuch in Anspruch nahm, als constant angesehen wurde. Dies ist aber unbedenklich, sobald man die Werthe der electrischen Differenzen als constante betrachten darf, und dass dies zulässig ist, haben wir gesehen.

Von Zahn übersah, dass Kohlrausch möglichst für Isolation gesorgt hatte, wohl hauptsächlich, weil bei seinen eigenen Versuchen die Ableitung einer Platte zur Erde nöthig war. Das hat ihn denn auch eine allerdings sehr ungenaue, wenn nicht unrichtig ausgedrückte Stelle in Kohlrausch's zweiter Abhandlung[3]) gänzlich missverstehen lassen. Kohlrausch sagt da allerdings, „dass weder die Daniell'sche Kette, noch der die Platten unmittelbar verbindende Draht isolirt sind",

1) Kohlrausch, Pogg. Ann. 88. Taf. IV Fig. 4. 1853.
2) l. c. p. 198.
3) Kohlrausch, Pogg. Ann. 88. p. 470. 1853.

und so scheint v. Zahn ganz in seinem Rechte zu sein, wenn er (p. 5) glauben möchte, Kohlrausch habe bei Einschaltung der einfachen Drahtverbindung eigentlich in der Art der Hankel'schen Methode gearbeitet. Ich will hier kein Gewicht darauf legen, dass dies höchstens umgekehrt der Fall sein könnte, da die betreffenden Arbeiten Kohlrausch's älter sind, wie die Hankel's, möchte aber doch fragen, wie von Zahn diese Annahme mit der genauen Beschreibung seines Verfahrens, welche Kohlrausch zwei Seiten vorher gibt, in Einklang bringen will. Solche unverständliche und unzureichend ausgedrückte Stellen finden sich nun bei Kohlrausch mehr, und das ist der Grund, warum ich zur Zeit geglaubt habe, mit der Mittheilung meiner Versuche und der Besprechung der Kohlrausch'schen so ausführlich sein zu müssen. Ich habe dort auch die Stelle so aufgefasst, wie sie allein Sinn geben kann, dass Kohlrausch nach Anbringung der geladenen Schellackmasse entweder die Poldrähte des Elementes oder die Verbindungsdrähte der Condensatorplatten mit den Näpfchen voneinander isolirt am Electrometer prüfte, oder dass er dies that, nachdem in gewöhnlicher Weise die Verbindung hergestellt war.

Hiernach glaube ich dargethan zu haben, dass die Zweifel an der Richtigkeit der von Kohlrausch und mir erhaltenen Constanten für die electrischen Differenzen verchiedener Körper grundlos sind.

Zum Schlusse seien noch ein Paar Worte über die von Kohlrausch sogenannte Parteilichkeit des Condensators erlaubt. Ich habe den Grund derselben in dem grösseren oder geringeren Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre gesucht, während Kohlrausch zu ihrer Erklärung an die Ladungen der äusseren Wand des Hauses denkt, Hankel und v. Zahn electrische Zimmerluft dafür verantwortlich machen, Schultze-Berge[1]) endlich in der Influenz verstärkter äusserer Electricitätsmengen den Grund dieser Störungen sucht. Da aber Kohlrausch[2]) die Influenzwirkung einer ganz in der Nähe

1) Schultze-Berge, Ueber die Electricitätserregung beim Contact von Metallen u. Gasen. Inaug.-Diss. Berlin 1880 u. Wied. Ann. 12. p. 297. 1881.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. 88. p. 469. 1853.

einer Condensatorplatte befestigsten Schellackmasse, von Zahn (p. 16) die Einwirkung einer über den Condensator gestülpten Glasglocke als überraschend gering fanden, da ferner Schultze-Berge die Störungen als nach Richtung und Grösse sehr variabel beobachtete, ja dieselben zeitweise ganz wegfielen, so scheinen diese Thatsachen geeignet, meine Hypothese zu stützen. Ebenso dürften die von beiden letztgenannten Forschern als hinreichend schützend befundene Einschliessung des Condensators sich mit derselben sehr gut vereinigen lassen.

Kassel, 2. Januar 1883.

XIV. *Zur Volumenänderung der Metalle beim Schmelzen. Notiz von F. Nies u. A. Winkelmann.*

Roberts und Wrightson[1]) haben das specifische Gewicht einer Reihe von Metallen im festen und flüssigen Zustande bestimmt und folgende Werthe gefunden:

	Specifisches Gewicht		Differenz in Procenten
	im festen s	im flüssigen Zustande s_1	
Wismuth . . .	9,82	10,055	+ 2,3
Kupfer	8,8	8,217	− 7,1
Blei	11,4	10,37	− 9,93
Zinn	7,5	7,025	− 6,76
Zink	7,2	6,48	−11,10
Silber	10,57	9,51	−11,2
Eisen	6,95	6,88	− 1,02

Diese Zahlen können so aufgefasst werden[2]), als ob sie in Widerspruch ständen mit Resultaten, welche wir bei der Untersuchung der Volumenänderung einiger Metalle gefunden haben[3]), und nach welchen das flüssige Metall bei der Schmelz-

1) Roberts u. Wrightson, Nature **24.** p. 470. 1881. Beibl. **5.** p. 817. 1881.

2) Vgl. E. Wiedemann, Wied. Ann. **17.** p. 576. 1882.

3) Nies u. Winkelmann, Wied. Ann. **13.** p. 43. 1881.

temperatur meistens ein kleineres Volumen besitzt als das feste bei derselben Temperatur. Diese Auffassung ist aber eine unrichtige. Denn die obigen Werthe der spec. Gewichte im festen und flüssigen Zustande beziehen sich nicht auf die gleiche Temperatur; vielmehr gilt der eine Werth s für die gewöhnliche Zimmertemperatur, der andere Werth s_1 für die Schmelztemperatur. Es geht dies aus einer Arbeit von Wrightson[1]) hervor, welche über Eisen und Stahl handelt. Betreffs der beiden in obiger Tabelle angeführten Werthe für Eisen 6,95 und 6,88 heisst es dort: „Sechs so erhaltene Diagramme zeigen, dass das specifische Gewicht des flüssigen Metalls (Eisen) 6,88, das des plastischen 6,5, das des kalten 6,95 beträgt."

Da also die Zahlen der obigen Tabelle sich auf verschiedene Temperaturen beziehen, so lassen sie die Frage, ob der ohne Temperaturänderung herbeigeführte Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand mit einer Vergrösserung oder Verminderung des Volumens verbunden sei, ganz unberührt und können daher unseren Resulaten weder widersprechen, noch dieselben bestätigen.

Nur die schon bezeichnete Beobachtung Wrightson's über das Eisen lässt eine Vergleichung mit unseren Resultaten zu. Dass diese eine vollständige Uebereinstimmung darstellt, erhellt noch näher aus den folgenden Sätzen, die sich dem bereits citirten anschliessen: „Aus diesen sowie aus den ersterwähnten Versuchen geht hervor, dass beim Uebergange vom festen zum flüssigen Zustande Eisen sich von der Dichte des festen Metalls 6,95 bis zu der des plastischen 6,5 allmählich ausdehnt und dann eine plötzliche Contraction bis zur Dichte 6,88 erfährt. Dasselbe Phänomen kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man eine eiserne Kugel vermittelst einer Gabel vorsichtig in ein Bad von flüssigem Eisen gleiten lässt. Anfangs sinkt dieselbe, kommt nach wenigen Secunden in die Höhe und erhebt sich zum Theil über die Oberfläche des geschmolzenen Metalls, bis sie schmilzt.

Hohenheim, November 1882.

---

1) Wrightson, Beibl. 5. p. 188. 1881.

XV. *Berichtigung; von A. Guébhard.*

Erst kürzlich, nach langer Abwesenheit von Paris, ist mir ein Aufsatz des Hrn. W. Voigt bekannt geworden, der im Augustheft dieser Annalen[1]) als „Theorie der electrochemischen Experimente des Hrn. G." erschienen ist, mit meinem Verfahren aber eigentlich nichts zu thun hat und ein rein theoretischer Angriff ist gegen das von mir bisher rein experimentell abgeleitete Aequipotentialformgesetz[2]) der unter besonderen Bedingungen erzeugten Nobili'schen Farbenringe.

Es ist gewiss keinem Leser entgangen, dass meine, von Hrn. Voigt doch wörtlich übersetzte Hauptangabe, dass ich verticale, cylinderförmige, überall gleich weit (wenn auch wenig) von der Platte entfernte Electroden anwandte, mit der theoretischen Annahme „punktförmiger" oder die Platte berührender Electroden vertauscht worden ist. Es bedarf ferner kaum der Erwähnung, dass die — physikalisch absolut unbegründete — Voraussetzung eines gleichförmigen Potentials der Platte die neue Fragestellung zwar viel leichter, aber auch viel unrichtiger erscheinen lässt, als sie schon früher von H. Wild, H. Weber und Ditscheiner behandelt worden war. Dass man aber durch eine rein hypothetische, von ganz besonderen Daten ausgehende und durch kein einziges Experiment gestützte mathematische Ueberlegung meine zwei Jahre lang vervielfältigten Bestätigungen und wiederholten praktischen Messungen als „falsch" erklären will; dass dazu noch die von Hrn. Prof. Helmholtz[3]) de visu verkündigte Coincidenz meiner electrochemischen Figuren mit den von Hrn. G. Holzmüller[4]) unabhängig berechneten höheren Isothermensystemen kurz geleugnet wird, ohne

1) W. Voigt, Wied. Ann. **17.** p. 257—272. 1882.

2) Guébhard, Compt. rend. **90.** p. 984. 1124. 1880; **93.** p. 403. 582. 792. 1881; **94.** p. 437. 851. 1882. L'Electricien **2.** p. 59—67. 273—283. 429—439. 1881—1882. Journ. de Phys. (2) **1.** p. 205—222. 1882.

3) Helmholtz, Berl. Ber. 1882.

4) Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen. Leipzig 1882. **8.** p. 284 mit 26 lithogr. Taf.

dass Hr. Voigt meine Curven selbst hergestellt hat, erscheint mir nicht statthaft.

Viel entscheidender und kürzer als jede Rechnung wäre doch die Verfertigung einiger Platten gewesen, welche nach meinen Angaben die zwei einzigen von Hrn. Voigt zur Lösung gebrachten Fälle wiedergegeben hätten, nämlich die Fälle zwei gleichnamiger, resp. ungleichnamiger Pole. Hätte man beim Experiment statt cylindrischer Nadeln oder Flächen punktförmig abgeschnittene isolirte Electroden, und statt einer mit Strom- oder Einströmungslinien begrenzten Platte eine wenn auch grosse, rechtwinklige Platte angewandt, so hätten vielleicht die Farbenringe „eine gewisse Aehnlichkeit“ mit den Voigt'schen theoretischen Curven darbieten können, obgleich die bezügliche Rechnung dann selber unzulänglich erscheinen müsste.[1]) Wird aber, nach meinen deutlichen Angaben, statt des unendlichen, unausführbaren Bereichs, im ersten Falle entweder die Kirchhoff'sche[2]) oder die Lamé'sche[3]) Anordnung, im zweiten aber ein grösseres Cassini'sches Oval als Directrix der cylindrischen Grenzelectrode angewandt, so kann „die oberflächlichste Messung“ einen jeden überzeugen, dass die geometrische Form der „isochromatischen“ Linien — sei auch ihr Bildungsprocess, was er will — gar nicht mit den Voigt'schen Gleichungen $\varrho_1^{-3} \pm \varrho_2^{-3} = K$, sondern sehr annähernd mit den Kirchhoff'schen Aequipotentialformeln $\varrho_1^{\pm 1} \varrho_2 = C$ zusammenfällt.

Diese „ausserordentliche Aehnlichkeit“ meiner Ringfiguren mit Aequipotentialniveaucurven hat ja Hr. Prof. E. Mach[4]) nicht nur anerkannt, sondern auch theoretisch zu erklären gewusst, obwohl er über die von mir bisher kaum besprochene „Natur“ dieser Curven sich „in einer gründlichen Meinungsdifferenz“ zu befinden behauptet. Ferner sind von Hrn. Dr. Hugo Meyer, meinem ersten Gegner,

---

1) Was den Fall entspricht, dass die Platte hierbei endlich ist, habe ich nicht nur implicite in der Formulirung meines Gesetzes erwähnt, sondern explicite in den Compt. rend. **94.** p. 851. 1882 behandelt.

2) Kirchhoff, Pogg. Ann. **64.** p. 497—515. 1845.

3) Lamé, Leçons sur les cordonnées curvilignes. 1859. p. 207.

4) Mach, Wien. Ber. (2) **86.** p. 8—14. 1882.

ganz ausserordentlich genaue Messungen veröffentlicht worden[1]), welche, bei einer einzigen, dazu gar nicht bestimmten Platte, doch nur unbedeutende Differenzen ergeben haben. Von Hrn. Hildebrandt[2]), Holzmüller, Helmholtz[3]) ist die Thatsache constatirt worden, wie sie jeder durch blosses Uebereinanderlegen der berechneten, auf durchsichtiges Papier gezeichneten, und der electrochemischen, auf Metall hervorgebrachten Figuren bestätigen kann. Dass nun alle Schlüsse welche Hr. Voigt an seine Rechnungen knüpft, — als wären die von ihm erhaltenen theoretischen Linien identisch mit den Nobili'schen nach meiner Methode erzeugten Farbenringen — irrig sind, bedarf wohl keines anderen Beweises. Dass aber dabei „die Unmöglichkeit seiner Anschauung sich von selbst erweist", das will ich nicht sagen: nur wollte ich zeigen, dass mit den „electrochemischen Experimenten des Hrn. G." diese höheren Speculationen gar nichts zu thun haben.

Auch wäre es, meiner Meinung nach, recht Schade, wenn abstracte Theorie, bewährbaren Thatsachen zuwider, ein allereinfachstes isothermographisches Hülfsmittel für höhere Geometrie, wegen eines blossen Missverständnisses, zu Fall bringen könnte.

Deswegen darf ich nicht schweigen, und ich beabsichtige, in den nächsten Heften des „Journal de Physique"[4]) und „Electricien" selbst alles Theoretische zu veröffentlichen, was aus der Beobachtung, nicht gegen dieselbe abgeleitet werden kann.

Paris, im November 1882.

---

1) H. Meyer, Gött. Nachr. 1882. p. 666—676.

2) Hildebrandt, Progr. der Realsch. zu Gandersheim. 4. p. 10. Ostern 1882.

3) Holzmüller, Helmholtz, l. c.

4) Soeben erschienen im Novemberheft 1. (2) p. 482—492. 1882.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 3.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XVIII.

I. *Ueber die specifische Wärme des Wassers;* *von F. Neesen.*

I.

Von den zur Bestimmung der specifischen Wärme bekannten Methoden werden und sind früher vorzugsweise benutzt worden die Mischungs- und die Eisschmelzungsmethode. Diesen beiden gegenüber zeigt die Abkühlungsmethode, bei welcher die spec. Wärme aus der Abkühlungszeit des betreffenden zu untersuchenden Körpers ermittelt wird, einen ausserordentlichen Grad von Bequemlichkeit, namentlich: wenn es sich darum handelt, die Abhängigkeit der spec. Wärme von der Temperatur zu ermitteln. Dagegen birgt die letztgenannte Methode in ihrer bisherigen Anwendung eine so grosse Fehlerquelle in sich, dass genaue Resultate mit derselben nicht zu erhalten gewesen sind. Es liegt die grösste Fehlerquelle in der nothwendigen Voraussetzung, dass der sich abkühlende Körper zu jeder Zeit an allen seinen Stellen dieselbe Temperatur besitzt, eine Voraussetzung, die in den bisherigen Versuchen jedenfalls nicht erfüllt war. Ich habe versucht, ob diese Methode nicht genauer gemacht werden kann dadurch, dass man ohne Lagenänderung der sich Wärme zustrahlenden Flächen während der Abkühlung die Theile des sich abkühlenden Körpers lebhaft durcheinanderrührt. Auf der Naturforscherversammlung in Danzig im Jahre 1880 wurden ein von mir in dieser Absicht construirter Apparat und Versuche mit demselben beschrieben. Um aber die Richtigkeit der Ergebnisse solcher Versuche beurtheilen zu können, müssen jene durch sichere anderweitige Beobachtungen controlirt werden. Es ist dazu nothwendig, für eine bestimmte Substanz die Abhängigkeit der spec. Wärme von

der Temperatur zu kennen. Aber auch für Wasser, über dessen spec. Wärme die meisten Untersuchungen vorliegen, stimmen die verschiedenen Resultate, wie bekannt, sehr wenig überein. Es ergab sich daher die Nothwendigkeit, die Abhängigkeit der spec. Wärme des Wassers von der Temperatur einer erneuten Untersuchung zu unterwerfen.

Die bisherigen Angaben weichen nicht allein in quantitativer, sondern auch in qualitativer Hinsicht voneinander ab. Während von Regnault und Anderen eine kleine stetige Zunahme der spec. Wärme des Wassers mit steigender Temperatur gefunden wurde, haben zuerst Pfaundler und Platter (1870) bei niedrigen Temperaturen eine Abnahme der spec. Wärme mit wachsender Temperatur aus ihren Versuchen gefolgert. Diese Versuche erscheinen allerdings nicht genau genug, um sichere Schlüsse darauf zu bauen. Darauf hat Rowland[1]) aus eigenen directen Versuchen und solchen über das mechanische Aequivalent der Wärme, sowie aus den Versuchen von v. Münchhausen[2]) gefolgert, dass, wofern die Temperaturen nach dem Luftthermometer gemessen werden, die spec. Wärme des Wassers zunächst bis ungefähr 30° abnimmt und von da an wieder zunimmt.

Ich begann eine erneute Untersuchung über die angegebene Grösse im Sommer vorigen Jahres und setzte dieselbe im vergangenen Winter fort. Das Resultat findet sich in einer kurzen Notiz in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin 1882 Nr. 10 p. 74. Im vergangenen Herbste hörte ich mit Interesse von Hrn. Wüllner, dass in dem Laboratorium desselben gleichzeitig mit den meinigen Untersuchungen über denselben Gegenstand in Angriff genommen seien, als deren allgemeines Resultat sich, wie Hr. Wüllner mir im Anfang des Sommers v. J. mittheilte, eine Bestätigung der Rowland'schen Folgerungen ergab. Auch mein Resultat deckt sich hiermit, wie die weiteren Angaben zeigen werden, in gewisser Ausdehnung.

Ich wählte zur Ermittelung der spec. Wärme die Eisschmelzungsmethode mit dem Eiscalorimeter von Bunsen,

1) Rowland, Proc. Amer Soc. 7. p. 75. 1880.
2) v. Münchhausen, Wied. Ann. 1. p. 592. 1877.

da mir die Versuche mit letzterem die geringsten Fehlerquellen zu bieten scheinen. Dabei erfordert aber das im Princip so einfache Instrument doch, wie jeder, welcher mit ihm gearbeitet hat, zugeben wird, eines eingehenden Studiums. Einzelne Erfahrungen über dieses Calorimeter werden sich im Folgenden finden.

Die Versuche wurden in diesem Frühjahre durch Eintritt des wärmeren Wetters unterbrochen, da das Eiscalorimeter mit Wasser, resp. Eis gefüllt bei warmer Witterung zu grosse Quantitäten von Eis beansprucht. Ich sehe daher die Versuche gewissermassen nur als orientirende an; die weiteren Detailausführungen hoffe ich in dem kommenden Winter machen zu können.

II. Beschreibung der benutzten Apparate.

Nach der von Schuller und Wartha angegebenen Methode befand sich das Eiscalorimeter in einem mit destillirtem Wasser gefüllten Gefässe *A*. Letzteres stand in einem grösseren Gefässe *B* aus Zinkblech mit doppelten Wänden, deren Zwischenraum mit Sägespänen ausgefüllt war. Durch in *B* eingefüllte Kältemischung wird in *A* ein Eismantel gebildet, darauf *B* mit klein gestückeltem Eis gefüllt. Für das Schmelzwasser war Ablauf vorhanden. Den Eiscylinder in dem Calorimeter selbst bildete ich durch Kältemischung, welche in die innere Röhre, die zur Aufnahme des erwärmten Körpers bestimmt ist, eingeführt wurde. Nachdem der Eismantel hinreichende Stärke erhalten und die innere Röhre ausgespült war, wurde letztere mit destillirtem Wasser gefüllt. Die Capillare, in welcher die Verschiebung des Quecksilberfadens beobachtet wurde, war mit dem Calorimeter mittelst Schliffstück verbunden, dessen Dichtung durch umgebendes Quecksilber geschah. Die Stellung des Quecksilberfadens in der Capillare las ich an einer hinter der Capillare befindlichen Millimetertheilung auf Spiegelglas ab. Die Capillare war mittelst Quecksilberfaden calibrirt.

Das destillirte Wasser, dessen spec. Wärme bestimmt werden sollte, wurde aus käuflichem mit einigen Tropfen Salpetersäure und schwacher Lösung von doppelt chrom-

saurem Kali versetztem, destillirten Wasser durch zweimalige Destillation gewonnen. Es befand sich in einem Platinkölbchen oder einem Glaskölbchen aus dünnwandigem Glase. Die Erwärmung geschah nach der etwas modificirten Methode von d'Arsonval. Das Erwärmungsgefäss bestand aus einem Kupfergefässe *a* (Fig. 1), durch welches eine Kupferröhre *b* hindurchging. Durch den Hahn *d* wurde *a* mit Wasser gefüllt; in *a* war noch das Thermometer *c* und die kleine Metallröhre *e* eingekittet. In letzterer wurde die doppelt umgebogene Glasröhre *i* befestigt, welche in das grössere Gefäss *g* mit dem zum Speisebrenner führenden, seitlichen Auslasse endigte. In *g* ragte die mit der Gasleitung verbundene Röhre *m* hinein. Um ein Auslöschen der Gasflamme zu verhüten, wurde der Speisebrenner direct durch eine enge Zwischenleitung mit dem Zuleitungsschlauch verbunden. An das untere Ende von *b* war ein konisch zugehendes Stück *o* angesetzt mit einem cylindrischen Ende, das mit einem Schlitze *β* zur Einführung eines Verschlussschiebers versehen war. Sodann ist an *o* noch ein Ring *α* angelöthet mit einer Oeffnung etwas grösser wie der Durchmesser der Kölbchen, in welchen sich das zu untersuchende Wasser befand. Die an *a* befestigte Metallstange *f* wird von dem Speisebrenner erwärmt. Der zu erwärmende Körper *p* hängt innerhalb *b* an einer Elfenbeinstange (Fig. 2 etwas grösser gezeichnet) in einer federnden Gabel *t*. Diese Gabel hat die Erweiterung *u*, in welche eine konisch zugehende Elfenbeinstange *s* hineinragt. Beim Niederdrücken von *s* wird die Feder *t* auseinandergedrückt, und der Körper *p* fällt herunter. Ein Thermometer *v* gibt die Temperatur von *p* an.

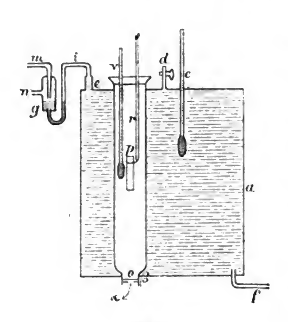


Fig. 1.

Gefäss *a* wird vollständig mit Wasser gefüllt, in *g* befindet sich etwas Quecksilber. Die Regulirung der Temperatur

geht in der Weise vor sich, dass das Wasser in *a* bei seiner Ausdehnung die Zuflussöffnung des Gases beim Rohre *m* verengert. Soll eine höhere Temperatur genommen werden, so wird *d* geöffnet; das sich ausdehnende Wasser tritt dann hier aus.

Das Gefäss *a* war bei der grösseren Zahl der Versuche noch mit einem Gypsmantel umgeben.

Ist die Temperatur in *b* hinreichend lange constant geblieben und das Calorimeter vorbereitet, so wird das Gefäss *a* von seinem Standorte weggenommen, mit dem Ringe *α* auf die innere Röhre des Calorimeters gesetzt, der Schieber in *β* weggezogen und *p* durch Niederdrücken von *s* fallen gelassen. Auf diese Weise kommt *p* mit der äusseren Luft gar nicht in Berührung.

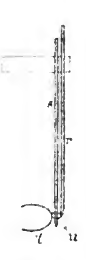


Fig. 2.

III. Erfahrungen an den einzelnen Apparaten.

Die Resultate der Temperaturregulirung nach der d'Arsonval'schen Methode sind sehr befriedigend. Ich habe stundenlang die Temperatur bis auf 0,01° constant erhalten können. Mit der Zeit trat eine geringe Undichtigkeit des Apparates ein, wodurch die Genauigkeit natürlich gestört wurde. Es zeigten sich ferner kleine regelmässige Schwankungen in der Temperatur in *a*. Dieselben rührten von der Ausdehnung des Gefässes *a* her, welches von seinen Wänden die Wärme an das innere Wasser, aber auch an die Luft abgibt. Diese Schwankungen hörten auf, als ich den ganzen Apparat mit Gyps umgab, um rasche Abkühlung nach aussen zu verhindern. Noch bessere Erfolge verspreche ich mir von einem gleich construirten Apparate, bei welchem das Gefäss *a* aus einer die Wärme schlecht leitenden Masse besteht und die Wärme dem Innern von *a* durch einen lose sitzenden Metallcylinder mit in das Gefäss hineinreichenden Blechen zugeführt wird, welcher mit dem Erwärmungsstab *f* verbunden wird. Die Röhre *b* besteht dann an ihrem oberen und unteren Ende gleichfalls aus die Wärme nicht leitender Substanz. Durch Abkühlung von *f* mit Eis und gleich-

zeitiger Anwendung der regulirten Erwärmungsflamme muss man auch constante Temperaturen unterhalb der Zimmertemperatur erhalten können.

Von meinen Erfahrungen mit dem Eiscalorimeter habe ich folgende in der Literatur bisher nicht erwähnt gefunden. Der um die innere Röhre im Calorimeter zu bildende Eiscylinder hat bei seiner Entstehung eine Temperatur niedriger wie 0°, mag man ihn nun durch eine Kältemischung oder durch Verdunsten von Alkohol bilden. Sehr langsam gelangt das Eis auf 0°; macht man nun einen Versuch zu einer Zeit, wo das ganze Eis noch nicht die Temperatur 0° angenommen hat, so wird ein Theil der zugeführten Wärme benutzt, um das gesammte Eis auf 0° zu erwärmen. Daher fallen die beobachteten Volumenänderungen zu klein aus. Auffallend würde hiernach sein, dass in dem Momente des Einfüllens der warmen Substanz in das Calorimeter doch eine Volumenverringerung eintritt. Es erklärt sich dieses daraus, dass der Eiscylinder dort, wo er an der inneren Calorimeterröhre anliegt, die Temperatur 0° hat, dass dort also eine Schmelzung eintreten wird. Ich beobachtete, dass in der That die ersten Versuche, auch wenn sie einige Stunden nach Bildung des Eiscylinders gemacht waren, stets zu geringe Volumenveränderungen ergaben. Es ist daher von Wichtigkeit, nach Bildung des Eiscylinders einige Male Abschmelzungen vorzunehmen, ehe mit den wirklichen Versuchen begonnen wird.

Eine gewisse Störung bewirkt bekanntlich die freiwillige Bewegung des Fadens in der Capillaren. Dieselbe wird durch die Aenderung der Schmelztemperatur des Wassers bei Druckänderung erklärt. Das Wasser im Calorimeter steht unter einem höheren Drucke wie das das Calorimeter umgebende Wasser; daher muss entsprechend einer Abschmelzung (wegen des tieferen Schmelzpunktes) ein Zurückgehen des Fadens erfolgen. Es können aber auch andere Ursachen mitwirken, welche bedeutend grössere Wirkung haben. Bunsen selbst hat schon auf den grossen Einfluss kleiner Unreinigkeiten in dem das Calorimeter umgebenden Schnee aufmerksam gemacht. Dieser Einfluss wird vermieden mit der Schuller und Wartha'schen Anordnung der Ein-

senkung des Calorimeters in destillirtes Wasser, doch nur, wenn letzteres sich in einem Glasgefäss oder ähnlichem, vom Wasser nicht angreifbarem Gefässe befindet. Ich hatte das destillirte Wasser zunächst in ein Zinkblechgefäss gefüllt. Mehrere Tage hindurch war dann die freiwillige Bewegung klein im Sinne der Abschmelzung durch erhöhten Druck. Mit der Zeit wurde dieselbe Bewegung aber noch kleiner, schlug in ihr Gegentheil um und wurde sehr gross im entgegengesetzten Sinne. Beim Auseinandernehmen des Apparates zeigte sich an dem Boden des Zinkgefässes das destillirte Wasser voller rothbraunen Schmutzes, ferner war in dem Eiscalorimeter eine neue Eisbildung erfolgt, und zwar aus dem Quecksilber in demselben heraus. Der Vorgang erklärt sich somit dadurch, dass das Wasser wahrscheinlich Eisenoxyd bildet, dass durch die Beimengung dieses die Schmelztemperatur erniedrigt, daher das den unteren Theil des Calorimeters umgebende Wasser eine Temperatur niedriger wie 0^0 annimmt, wodurch der Anlass zu der neuen Eisbildung gegeben wird. Hervorzuheben ist allerdings, dass, trotzdem das destillirte Wasser um das Calorimeter ursprünglich 0^0 hatte und der in diesem gebildete Eismantel aus reinem Eise bestand, und trotzdem die umgebenden Eisstücke, welche möglichst rein genommen wurden, jedenfalls beinahe die Temperatur 0^0 hatten, doch das destillirte Wasser um das Calorimeter nach Bildung des Eisenoxyds und Vermischung mit letzterem kälter wie 0^0 wurde. Es half nicht viel, als das Zinkgefäss mit einem Oelanstrich versehen wurde; auch dann erschien nach einiger Zeit die Vorwärtsbewegung des Fadens.

Nachdem das destillirte Wasser in ein Glasgefäss gefüllt war, hörte die freiwillige Vorwärtsbewegung des Fadens auf.

Das freiwillige Zurückgehen des Fadens geschah regelmässig. Geringe Aenderungen in der Grösse dieser Bewegung möchten auf Zuströmen von Luft zu dem Apparat zurückzuführen sein.

Für die Wahl des Materials, aus welchem die kleinen Gefässe, in welchem sich das zu untersuchende Wasser be-

findet, herzustellen sind, empfiehlt sich von vornherein Platin wegen seiner geringen specifischen Wärme, ganz abgesehen von seiner Indifferenz gegen Wasser. Indessen ist die dichte Löthung nach Einfüllen des Wassers schwierig. Kommt man mit dem Löthkolben oder der Stichflamme in die Nähe, so fängt das Wasser sofort an zu sieden und hindert einen ganz dichten Verschluss. Auch in ganz geübten Händen misslang die vollständige Dichtung in den meisten Fällen. Ich habe nur ein einziges Röllchen erhalten, welches vollständig dicht hielt. Die übrigen Gefässe nahmen sämmtlich im Verlaufe der mit ihnen angestellten Versuche etwas an Gewicht ab. Ein Beweis für das Dichthalten ist es übrigens nicht, wenn der Platincylinder nach der Löthung gewogen, derauf stark erhitzt und dann wieder gewogen, beide mal dasselbe Gewicht zeigt. Denn auch Cylinder, welche diese Probe aushielten, zeigten im Verlaufe der Versuche Gewichtsabnahmen. War die Leckage nur gering, so konnten regelmässige Controlwägungen nach und vor jeder Bestimmung den richtigen Wasserinhalt geben.

Ich nahm zur Controle der Bestimmungen mit den Platingefässen noch Glasgefässe aus dünnwandigen Reagenzgläsern mit verdicktem Boden. Dieselben gebrauchen zu ihrer Erwärmung allerdings etwas mehr Wärme wie die Platingefässe; sie sind aber leichter herzustellen und leichter zuzuschmelzen. Ausserdem hat man bei ihnen nur Glas, während bei den Platingefässen noch die Löthungsmaterialien hinzukommen.

Bei fasst allen Glasgefässen habe ich die Beobachtung gemacht, dass nach kurzem Gebrauche sich in dem Wasser weissflockige Gebilde zeigten, jedenfalls herrührend von dem Angriff des Glases durch das Wasser. Da sich dieser Niederschlag beim Stehenlassen des Wassers in Reagenzgläsern nicht bildet, so vermuthe ich, dass der Angriff des Glases durch plötzliche Temperaturänderungen, wie dieselben beim Gebrauche des Eiscalorimeters vorkommen, begünstigt wird.

IV. Beobachtungen.

Zur Temperaturbestimmung wurden zwei Thermometer benutzt, von denen das eine, in 0,2° getheilt, auf dem Normal-

aichungsamt in Berlin mit dem dort befindlichen Normalthermometer verglichen war, während das andere, in 0,1° getheilt, von mir mit diesem Thermometer verglichen wurde. Der Nullpunkt wurde in der Regel, jedenfalls nach jeder erheblichen Erwärmung neu beobachtet, und zwar durch Eintauchen in geschabtes Eis. Die Reduction der Angaben des Quecksilberthermometers auf die des Luftthermometers geschah nach den in den Veröffentlichungen des Normalaichungsamtes angegebenen Daten.

Zur Bestimmung der von den Platin-, resp. Glaskapseln abgegebenen Wärme wurde die mittlere specifische Wärme grösserer Platin-, resp. Glasmengen besonders bestimmt.

Die im Folgenden aufgeführten Versuche sind mit drei Platinkapseln I, II, III und einer Glaskapsel IV angestellt. Die Platingefässe I und II verloren im Verlaufe der Versuche etwas Wasser, Gefäss III und IV nicht. Der Verlust wurde, wie schon früher erwähnt, durch Controlwägung berücksichtigt.

Gefäss I wog anfänglich 8,115 g, das Gewicht stieg auf 8,193 g und nahm dann ab bis 8,1654 g, leer wog das Gefäss 3,1724 g, also grösste Wassermenge:

		8,193 g
		3,1724 „
		5,0206 g
Gefäss II	wog anfangs . . .	8,2330 g am Ende 8,1346 g,
„ II	leer	3,4856 „
	grösste Wassermenge	4,7474 g
Gefäss III	wog mit Wasser .	9,0560 g
„ III	„ ohne „ .	3,3894 „
	Wassermenge	5,6666 g
Gefäss IV	wog mit Wasser .	9,8216 g
„ IV	„ ohne „ .	2,9768 „
	Wassermenge	6,8548 g.

Die Bestimmungen mit den verschiedenen Gefässen sind auf die in dem Glasgefässe Nr. IV enthaltene Menge von 6,8548 g reducirt.

Die im Folgenden angegebenen Versuchsresultate geben die Ablesungen s an der Capillaren und die daraus bestimmten Volumenänderungen in Cubikmillimetern entsprechend den abgeschmolzenen Eismengen.

Die Temperaturen sind die des Quecksilberthermometers.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

t die Temperatur des erwärmten Körpers,

d die Dauer des Versuches,

v die während d beobachtete, durch das Abschmelzen bewirkte Volumenänderung,

c_v die freiwillige Volumenänderung vor dem Versuche während einer Minute,

c_n dieselbe nach dem Versuche,

c das Mittel aus c_v und c_n,

C die aus dieser freiwilligen Volumenänderung folgende Correction für die ganze Versuchsdauer,

$v - C$ ist danach die Volumenänderung, welche der von dem erwärmten Körper abgegebenen Wärme zu verdanken ist, also proportional der Wärmemenge, welche nothwendig ist, um den Körper von 0^0 auf t^0 zu erwärmen.

Vor dem Hineinwerfen des erwärmten Körpers wurde 10—20′ lang die Bewegung des Fadens beobachtet, dann wurde der Versuch mindestens so lange gerechnet, bis die Bewegung des Fadens wieder stationär geworden war; darauf wurde c_n beobachtet aus der Bewegung in 10′. Die Correction ist negativ gerechnet, wenn dieselbe abgezogen werden muss.

A. Specifische Wärme des Platins.

Tabelle I.

Masse des erwärmten Platins $m = 6{,}3122$ g

Nummer des Versuchs	t	d	v	c_v	c_n	c	C	$v - C$
1.	8,99°	78,75′	25,51 s	−0,24	−0,25	−0,245	−21,62	3,89 s = 1,43 cmm
2.	14,85	20	9,5	−0,12	−0,07	−0,095	− 1,90	7,6 = 2,722 „
3.	20,61	18	13,0	−0,05	−0,08	−0,065	− 1,1	11,9 = 4,40 „
4.	22,84	21	13,2	0	0	0	0	13,2 = 4,84 „
5.	27,45	20,5	22,7	−0,18	0	−0,09	− 1,8	20,9 = 7,58 „
6.	29,59	28	17,5	+0,07	0	+0,035	+ 0,98	18,48 = 6,68 „
7.	34,53	17,5	23,9	−0,13	−0,10	−0,115	− 2,0	21,9 = 7,94 „

Für die Umrechnung in Cubikcentimeter ist zu beachten, dass die Ablesungen an verschiedenen Theilen der Scala gemacht wurden, sodass den einzelnen Scalentheilen in den verschiedenen Versuchen andere Reductionsfactoren zukamen.

Zusammenstellungen der aus den angeführten sieben Versuchen für jede Temperaturänderung um 1° berechnete Contraction γ:

Tabelle II.

t =	8,99	14,85	20,61	22,84	27,45	29,59	34,53	
γ =	0,159	0,183	0,216	0,212	0,274	0,226	0,229	Mittel 0,213

Hieraus berechnet sich für die drei angewandten Platingefässe der Wärmewerth γ für jeden Temperaturgrad auf:

I γ 0,107 ccm	II γ 0,117 ccm	III γ 0,114 ccm.

B. Specifische Wärme des Glases.

Die Beobachtungen wurden mit drei Glasstücken, b_1, b_2, b_3 gemacht. Zu den oben angegebenen Columnen kommt hier eine Columne hinzu, welche das angewandte Glasstück enthält.

Tabelle III.

Nummer des Versuchs	b	t	d	v	c_v	c_n	c	C		$d - C$
				cmm	s	s	s	s	cmm	cmm
1.	b_3	15,15	29,5'	26,79	−0,02	0	−0,01	− 0,3		74,03 = 26,68
2.	b_3	21,07	16,5	37,92	−0,1	−0,08	−0,09	− 1,485 =	0,54	37,38
3.	b_1	22,83	51	37,16	−0,06	−0,07	−0,065	− 3,32 =	1,21	35,95
4.	b_2	24,39	44,5	28,29	+0,567	+0,607	+0,587	+26,22 =	+9,439	37,729
5.	b_1	28,43	37,4	47,09	−0,09	−0,13	−0,11	− 4,10 =	−1,488	45,60
6.	b_1	30,20	45	43,72	+0,30	+0,22	+0,26	+11,75 =	+4,25	47,97

Die folgende Tabelle enthält die aus dem Vorstehenden gezogene mittlere Contraction für 1° und in der dritten Columne dieselben Zahlen reducirt auf das Glasstück b_1, dessen Gewicht $m = 7{,}5852$ g war.

Tabelle IV.

t	γ	γ red. auf b_1	t	γ	γ red. auf b_1
15,15	1,762 cmm	1,594 cmm	24,39	1,547 cmm	1,538 cmm
21,07	1,774 „	1,6054 „	28,43	1,604 „	1,604 „
22,83	1,5740 „	1,5740 „	30,20	1,588 „	1,588 „
				Mittel	1,586 cmm

Daraus folgt für die benutzte Glaskapsel der Wärmewerth γ für jeden Temperaturgrad:

$$\gamma = 0{,}623 \text{ ccm}.$$

Aus den für das Platin beobachteten Werthen geht eine sehr beträchtliche Zunahme der mittleren specifischen Wärme mit der Temperatur hervor. Eine Ausnahme in dem stetigen Anwachsen bildet der für die Temperatur 27,45° beobachtete Werth. Derselbe scheint irrig zu sein. Da jedoch Unregelmässigkeiten bei der Beobachtung nicht nachzuweisen waren. musste er mit berücksichtigt werden. Die scheinbare Zunahme der specifischen Wärme, welche zum Theil auch darauf geschoben werden kann, dass bei den niedrigeren Temperaturen die Correction aus der freiwilligen Bewegung einen grösseren Einfluss hat, spielt bei den aus den Wärmewerthen der Platinkapsel zu berechnenden Correctionen eine so unbedeutende Rolle, dass sie gänzlich in dem Bereiche der Beobachtungsfehler liegt. Daher habe ich mich mit dem Mittel aus allen Beobachtungen begnügt.

C. Specifische Wärme des Wassers.

Zu den Columnen der vorigen Tabelle treten hinzu diejenige γ, welche den Wärmewerth des angewandten Gefässes und diejenige D, welche die aus den beobachteten Werthen abgeleiteten, für die Wassermenge in dem Gefässe N geltenden Werthe für die Contraction enthält. An Stelle der Columne $d - C$ tritt die Columne $d - C - \gamma$.

Tabelle V.

Nr.	Nr. der Kapsel	t	d	v	c_v	c_n	c	C		γ	$d-C-\gamma$	D
					s	s	s	s	cmm	cmm	cmm	cmm
1.	II	1,60	32′	7,91	+0,02	+0,02	+0,02	+0,64	=0,23	+0,18	7,50	10,86
2.	I	2,09	20	11,81	+0,1	+0,08	+0,09	+1,8	=0,653	+0,23	10,93	15,22
3.	II	2,14	28,5	10,60	+0	+0,04	+0,02	+0,57	=0,21	+0,27	10,12	14,66

Die freiwillige Bewegung des Quecksilberfadens blieb bei allen Versuchen vor und nach denselben in der gleichen Weise sich ähnlich wie bei diesen drei Versuchen. Daher führe ich dieselbe nicht mehr getrennt auf, sondern begnüge

mich mit der Angabe der daraus folgenden ganzen Correction *C*.

Nr.	Nr. der Kapsel	t	d	v	C	γ	$d-C-\gamma$	D
				cmm	cmm	cmm	cmm	cmm
4.	II	2,29°	19'	12,48	+0,1	0,28	12,10	17,54
5.	II	2,52	25	13,83	+0,07	0,31	13,45	19,50
6.	II	2,58	19	14,25	+0,09	0,32	13,84	19,96
7.	I	3,20	41	17,75	0	0,36	17,39	23,88
8.	II	3,96	32,5	18,17	−0,04	0,50	17,61	25,96
9.	II	4,86	26,5	26,32	−0,16	0,61	25,87	38,15
10.	I	4,96	26	27,44	−0,10	0,57	26,97	37,02
11.	II	5,8	42,7	30,43	−0,18	0,72	29,89	44,07
12.	I	6,22	22	33,68	−0,06	0,70	33,04	45,36
13.	II	6,43	17,5	33,47	0	0,79	32,68	47,37
14.	II	6,87	22	36,79	+0,04	0,85	35,90	52,07
15.	II	7,37	20	40,71	+0,1	0,91	39,79	57,74
16.	I	7,62	48,5	43,81	−0,15	0,86	43,10	59,18
17.	II	7,66	49,2	40,82	−0,22	0,90	40,14	59,19
18.	III	9,71	39	63,34	0,08	1,18	62,12	75,15
19.	I	11,12	25	66,93	0,2	1,28	65,63	91,02
20.	II	11,44	20	66,43	0,12	1,43	64,88	93,90
21.	II	12,12	31	70,95	0,6	1,51	68,84	99,40
22.	III	12,89	35	83,67	−0,07	1,59	82,15	99,38
23.	II	13,61	40,2	72,55	−0,47	1,70	71,32	105,16
24.	I	13,84	56	77,25	−0,5	1,58	75,72	103,96
25.	I	14,54	39	78,12	−0,03	1,67	76,48	105,00
26.	III	15,11	32	98,24	−0,03	1,86	96,41	116,63
27.	I	15,21	35	88,42	0,37	1,74	86,31	118,47
28.	II	16,00	54,5	87,38	0,28	2,00	85,10	124,09
29.	II	16,67	28	92,73	0	2,08	90,65	132,35
30.	II	17,81	20	102,33	0,02	2,21	100,10	145,89
31.	I	18,12	33	112,07	0,27	2,07	109,73	150,49
32.	I	19,20	34	116,43	0,1	2,20	114,13	159,24
33.	II	19,61	34	107,98	0,3	2,46	105,49	155,62
34.	IV	20,61	37	174,09	−0,34	13,03	161,40	161,40
35.	III	23,13	18	144,95	−0,26	2,84	142,37	172,22
36.	II	23,61	32,2	119,73	0,42	2,96	116,35	170,21
37.	IV	24,13	62,5	202,39	0,5	15,25	186,64	186,64
38.	III	24,43	50,0	174,90	0,31	3,01	171,58	207,56
39.	IV	25,31	59,1	212,94	−0,64	16,00	197,6	197,6
40.	I	27,44	38	178,55	0,01	3,36	175,2	211,96
41.	IV	28,54	26	240,30	−0,19	18,04	222,46	222,46
42.	II	28,83	46	160,68	−0,08	3,61	157,15	230,36
43.	II	29,23	30	157,47	0,03	3,68	153,76	224,5
44.	II	29,82	45	163,13	0	3,74	159,39	232,79
45.	III	29,26	55,2	198,87	−0,17	3,59	195,45	236,46
46.	III	30,18	33	196,76	−0,34	3,71	193,39	233,94
47.	II	30,23	35	165,19	0,45	3,79	160,95	236,44
48.	IV	30,37	39	256,05	−0,24	19,19	237,10	237,10
49.	IV	31,85	39	272,83	−0,07	20,12	252,78	252,78
50.	II	31,63	46,9	171,89	−0,42	3,97	167,50	245,56
51.	III	31,99	30	210,07	−0,06	3,89	206,24	249,48

Die in dieser Tabelle aufgeführten Zahlen zeigen keine ausserordentlich gute Uebereinstimmung; die Abweichungen derselben voneinander steigen, was zu erwarten ist, der absoluten Grösse nach mit der Temperatur. Weil den Zahlen die wünschenswerthe Genauigkeit fehlt, so sind die aus ihnen gezogenen Resultate nur als orientirende anzusehen. Die detaillirte Ausmittelung des Verlaufs der spec. Wärme muss einer weiteren Untersuchung, bei welcher für jeden Temperaturgrad mehrere Werthe, aus denen ein Mittel genommen werden kann, zu bestimmen sind, vorbehalten bleiben.

Es fällt in der Tabelle zunächst auf, dass die Versuche mit dem Glasgefässe fast durchweg geringere Werthe geben, als die mit den Platingefässen, nur von 25,31^0 an schliessen sich die Beobachtungen mit beiden Gefässarten einander an.

Zwischen 20 und 23^0 scheint sich die spec. Wärme eigenthümlich zu verhalten, denn ein so geringer Fortschritt in der Contraction ist an keiner anderen Stelle zu finden.

Den Verlauf der spec. Wärme habe ich aus den aufgeführten Zahlen graphisch zu ermitteln gesucht, indem ich die einzelnen Beobachtungen auf Coordinatenpapier auftrug und mit der Hand die Curve durchlegte, welche sich den Beobachtungen am meisten anschmiegt unter der Voraussetzung, dass diese Curve einen stetigen Verlauf hat. Mehrere Versuche gaben stets denselben Curvenzug.

Aus dieser Curve wurden die zu den Temperaturen, 2, 3, 4^0 etc. gehörigen Contractionen entnommen und dann eine Formel zur Darstellung derselben aufgesucht.

Ich gebe in der folgenden Tabelle VI diese Werthe, wie sie sich aus der Curve ergaben.

Die erste Columne t enthält die Temperaturen, die zweite D die zugehörigen Contractionen, die dritte d die Differenzen der letzteren für je 1^0, die vierte C die mittleren Contractionen für den Temperaturbereich von 0^0 bis zu der betreffenden Temperatur.

Die darauf folgende Tabelle enthält dieselben Werthe für den Fall, dass die Temperaturen nach dem Luftthermometer gemessen werden. Die Bedeutung der übrigen dieser Tabelle beigegebenen Columnen wird nachher angegeben.

Tabelle VI.

t	*D*	*d*	*C*	*t*	*D*	*d*	*C*
2	13,75	8,25	6,88	16	125,0	7,8	7,81
3	22	7,5	7,33	17	132,8	8,7	7,81
4	29,5	8,0	7,50	18	141,5	7,5	7,86
5	37,5	8,0	7,58	19	149,0	8,2	7,83
6	45,5	8,5	7,58	20	157,2	7,3	7,86
7	54	8,5	7,71	21	164,5	7,5	7,83
8	62,5	8,0	7,81	22	172,0	7,6	7,82
9	70,5	7,9	7,84	23	179,6	7,9	7,81
10	78,4	8,3	7,84	24	187,5	7,5	7,81
11	86,1	8,3	7,83	25	195,0	8,2	7,80
12	94,4	7,8	7,87	26	203,2	7,8	7,82
13	102,2	7,8	7,86	27	211,0	7,3	7,81
14	110,0	7,4	7,86	28	218,3	7,2	7,80
15	117,4	7,6	7,83	29	225,5	8,0	7,77
16	125,0		7,81	30	233,5		7,78

Tabelle VII.

Temperaturen nach Angaben des Luftthermometers.

t	*D*	*d*	*C*	*D* berechnet	*δ* Differenz der berech. 2. und 5. Columne
2	14,0	8,0	7,0	13,7	−0,3
3	22,0	7,7	7,33	21,7	−0,3
4	29,7	7,8	7,42	29,8	+0,1
5	37,5	8,2	7,50	37,8	+0,3
6	45,7	8,3	7,61	45,9	+0,2
7	54,0	8,5	7,71	53,9	−0,1
8	62,5	8,0	7,81	61,9	−0,6
9	70,5	8,0	7,83	70,0	+0,5
10	78,5	8,2	7,85	78,1	−0,4
11	86,5	7,8	7,89	86,1	−0,4
12	94,7	8,0	7,89	94,2	−0,5
13	102,5	8,0	7,89	102,2	−0,3
14	110,5	8,0	7,89	110,3	−0,2
15	118,5	8,0	7,90	118,4	−0,1
16	126,5	8,1	7,91	126,5	+0,1
17	134,5	8,1	7,91	134,6	+0,1
18	142,6	8,5	7,92	142,7	+0,1
19	150,7	8,0	7,94	150,9	+0,2
20	159,2	7,5	7,96	159,0	−0,2
21	167,2	7,6	7,96	167,2	+0,0
22	174,7	7,7	7,94	174,9	+0,2
23	182,3	7,8	7,93	182,6	+0,3
24	190,0		7,92	190,3	+0,3

t	D	d	C	D berechn.	δ
25	197,8		7,91	198,0	+0,2
26	205,7	7,9	7,91	205,7	+0,0
27	213,2	7,5	7,89	213,4	+0,2
28	221,0	7,8	7,89	221,1	+0,1
29	228,7	7,7	7,88	228,8	+0,1
30	236,5	7,8	7,88	236,5	+0,0

Beide Tabellen stimmen darin überein, dass die mittlere spec. Wärme (welche durch die Contraction gemessen wird) erst zu und dann abnimmt. Bei Tabelle VII zeigt sich dieses am regelmässigsten. Das Maximum liegt verschieden, je nachdem die Temperatur nach dem Quecksilberthermometer oder nach dem Luftthermometer gemessen wurde. Bei ersterem liegt das Maximum etwa bei 12°, bei letzterem bei 20°.

Die Differenzen zwischen den Werthen D der Columne 2 stimmen, wie die Columne 3 „d“ zeigt, ziemlich überein, sie schwanken um einen Mittelwerth, der aber bei den niedrigen Temperaturen offenbar ein grösserer ist, wie bei den höheren. Es werden sich daher die Werthe D annähernd genau durch zwei Grade darstellen lassen, welche sich in dem Punkte kreuzen, wo das Maximum der mittleren spec. Wärme stattfindet. Ich habe eine complicirtere Darstellung nach der Formel $D = a\,(b - t)^c$ versucht, aber keine genauere Darstellung erhalten, als wenn ich den berechneten Werthen zu Grunde lege die beiden Formeln:

$$D = \;\; 14 + 8{,}063\,(t - 2) \text{ bis } 20^{0},$$
$$D = 167 + 7{,}77\;\;(t - 21) \text{ von } 21^{0} \text{ an},$$

und zwar für die Werthe, welche den Temperaturen des Luftthermometers entsprechen. In der Columne „D berechnet“ finden sich diese berechneten Werthe, in der folgenden „δ“ die Differenzen gegen die Werthe D der zweiten Columne. Diese Darstellung durch die angegebenen Formeln würde also bedeuten, dass die wahre spec. Wärme dc/dt annähernd als constant mit einem Wendepunkt bei 20° angesehen werden kann.

Die Angaben der Tabelle VII stimmen qualitativ vollkommen mit den von Rowland nach der Mischungsmethode

ermittelten Resultate, wie die folgende Vergleichstabelle zeigen wird. In der früher citirten Arbeit findet sich das Verhältniss der mittleren spec. Wärmen für verschiedene Temperaturintervalle berechnet. Ich berechne aus den Zahlen *D* der zweiten Columne Tabelle VII dieselben Werthe.

Tabelle VIII.

Temperaturintervall	Verhältniss der mittleren specifischen Wärmen nach		Temperaturintervall	Verhältniss der mittleren specifischen Wärmen nach	
	Rowland	Neesen		Rowland	Neesen
0—18° / 18—27°	1,0025	1,0099	0—16° / 16—24°	1,0010	0,9959
0—17° / 17—29°	1,0024	1,0079	0—21° / 21—28°	1,0045	1,0358
0—18° / 18—30°	1,0067	1,0111	20—24° / 24—29°	0,9983	0,9794
0—17° / 17—25°	1,0027	1,0001			

Bis auf den Werth 0 — 21/21 — 28° ist der Verlauf dieser Verhältnisse nach beiden Reihen derselbe. Quantitativ ist allerdings ein grosser Unterschied vorhanden.

Zum Schluss gebe ich noch eine Zusammenstellung der direct beobachteten Contractionen aus Tabelle V und der nach den beiden Formeln p. 384 berechneten Werthe. Die Temperaturen sind auf das Luftthermometer bezogen. Daher etwas andere Werthe wie in Tabelle V.

Tabelle IX.

Nr.	Nr. der Kapsel	*t*	*D* beob.	*D* ber.	Differenz *δ*
2.	II	2,09	15,22	14,72	−0,5
3.	II	2,14	14,66	15,13	+0,47
4.	II	2,29	17,54	16,34	−1,2
5.	II	2,52	19,50	18,19	−1,31
6.	II	2,58	19,96	18,68	−1,28
7.	I	3,19	23,88	23,59	−0,29
8.	II	3,95	25,96	29,72	+3,76
9.	I	4,85	38,15	36,97	−1,18
10.	I	4,95	37,02	37,78	+0,56
11.	II	5,79	44,07	44,56	+0,49
12.	I	6,21	45,36	47,94	+2,58
13.	II	6,41	47,37	49,56	+2,19

Nr.	Nr. der Kapsel	t	D beob.	D ber.	Differenz δ
14.	II	6,87	52,07	53,10	+ 1,03
15.	II	7,35	57,74	57,14	— 0,60
16.	I	7,60	59,18	59,15	— 0,03
17.	II	7,64	59,19	59,47	+ 0,28
18.	III	9,68	75,15	75,92	+ 0,77
19.	I	11,08	91,02	87,21	— 3,89
20.	II	11,40	93,90	89,79	— 4,11
21.	II	12,07	99,40	95,19	— 4,21
22.	I	12,84	99,38	101,40	+ 2,02
23.	II	13,56	105,16	107,20	+ 2,04
24.	I	13,78	103,96	108,97	+ 5,01
25.	I	14,48	105,00	114,62	+ 9,62
26.	III	15,04	116,63	119,14	+ 2,49
27.	I	15,14	118,47	119,95	+ 1,48
28.	II	15,94	124,09	126,39	+ 2,3
29.	II	16,55	132,35	131,31	— 1,04
30.	II	17,72	145,89	140,74	— 5,15
31.	I	18,03	150,49	143,24	— 7,25
32.	I	19,10	159,24	151,88	— 7,36
33.	II	19,51	155,62	155,18	— 0,44
34.	IV	20,50	161,40	163,16	+ 1,76
35.	II	23,50	170,21	186,62	+16,41
36.	III	23,02	172,22	182,69	+10,47
37.	IV	24,02	186,64	190,46	+ 3,82
38.	III	24,32	207,56	192,79	—14,77
39.	IV	25,19	197,60	199,55	+ 1,95
40.	III	27,32	211,96	216,10	+ 4,14
41.	IV	28,42	222,46	224,64	+ 2,18
42.	II	28,71	230,36	226,91	— 3,45
43.	II	29,11	224,50	230,02	+ 5,52
44.	I	29,14	236,46	230,25	— 6,21
45.	II	29,70	232,79	234,59	+ 2,20
46.	III	30,06	233,94	237,39	+ 3,45
47.	II	30,12	236,44	237,86	+ 1,42
48.	IV	30,75	237,10	238,86	+ 1,76

Aus dem Verlaufe der allerdings ziemlich bedeutenden Abweichungen ist zu erkennen, dass eine zusammengesetztere Formel, wie die lineare, die Beobachtungen besser darstellen würde. Indessen habe ich aus den directen Beobachtungen eine sich enger anschliessende Formel nicht aufgesucht, weil ich, wie früher schon erwähnt, diese Werthe nur als allgemein orientirende über den Verlauf der spec. Wärme des Wassers ansehe.

Die spec. Wärme wächst, soviel geht aus den angegebenen Zahlen hervor, nicht stetig mit der Temperatur, sondern nimmt nach einem anfänglichen Wachsthum ab. Sie scheint mit Fortschreiten der Temperatur zu pendeln.

Berlin, 16. December 1882.

II. *Optische Controversen; von E. Ketteler.*

Die neueste Zeit hat neben der elastischen Theorie des Lichtes, die bekanntlich selber durch das Hereinziehen der Körperschwingungen tiefgehende Veränderungen erfahren hat[1]), eine electromagnetische erstehen sehen, welche die optischen Erscheinungen von völlig anderen Gesichtspunkten betrachtet wie jene. Streitfragen gibt es innerhalb des Rahmens einer jeden von ihnen, sei es, dass verschiedene Auffassungen, denen man vielleicht in einem früheren Stadium gleiche Berechtigung zuerkennen konnte, ihren alten Vorrang zu behaupten fortfahren, oder dass auch einzelne Systeme sich geradezu auf mehr oder minder nachweisbaren Irrthümern aufbauen. Es dürfte daher wohl von Interesse sein, beide Theorien sowohl in Bezug auf ihre allgemeine Leistungsfähigkeit als in Bezug auf ihre Einzelsätze miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zwecke gerade mit dem Studium der Maxwell-Helmholtz'schen Ideen und mit der Vorbereitung zu einer Wiederholung der Versuche Kerr's beschäftigt, sehe ich mich freilich durch einen vom April d. J. datirten Aufsatz des Hrn. Lommel[2]) zu einer rascheren Erwiderung gedrängt. Die folgenden Blätter wer-

1) Infolge derselben mehren sich allmählich die Beziehungen zwischen ihr und der mechanischen Wärmetheorie. Vgl. z. B. unten p. 400 (Anm.) und p. 409.

2) Nach dem letzten Aufsatz des Hrn. Lommel (Wied. Ann. **16.** p. 427. 1882) beschränke ich mich darauf, das von demselben aufgestellte System objectiv dem meinigen gegenüber zu stellen. Auf die (vielfach fluctuirenden) Einwände desselben im einzelnen einzugehen, darauf verzichte ich; die sich hierfür interessirenden Leser verweise ich auf die Abhandlungen von Hrn. Lommel und mir und dabei besonders auf die Reihenfolge ihrer Publication. — Als der erste Theil des gegenwärtigen Aufsatzes bereits abgeschlossen war, erschienen in Wied. Ann. **17.** p. 468. 1882 von Hrn. Voigt Bemerkungen zu Hrn. Lommel's Theorie der doppeltbrechenden und der elliptisch polarisirenden Medien. Obwohl ich mit denselben im wesentlichen einverstanden bin, so mag doch eine Klarlegung derselben Gedanken nach theilweise anderen Richtungen z. Z. nicht unzweckmässig erscheinen.

den sich daher auf die wesentlichen Controversen der elastischen Theorie beschränken, und ohne für jetzt an die Principien der electromagnetischen Anschauungsweise heranzutreten, dürfte sich trotzdem doch schon nachweisen lassen, dass wenigstens die bisher gemachten Versuche derselben, den Uebergang des Lichtes von neuen, nur ihr eigenthümlichen Grenzbedingungen abhängig zu machen, in mehrfacher Hinsicht verfehlt sind.

I. Die Dispersionstheorie und ihre Anwendung auf langsame Schwingungen.

Ich bespreche zunächst die Dispersion oder die Abhängigkeit des Refractions- und Extinctionscoëfficienten von der Wellenlänge. Während man namentlich im Ausland unter Ignorirung des durch die Leroux-Christiansen'sche Entdeckung geschaffenen Thatbestandes gewohnheitsmässig an der Cauchy'schen Formel festhält, hat allerdings Hr. v. Lang[1]) neuerlich wieder jenen Thatbestand geleugnet und ist für die unverminderte Stichhaltigkeit der Leistungen Cauchy's eingetreten. Auf der anderen Seite stehen sich heute die von Lommel modificirte Theorie Helmholtz's, sowie die von mir aufgestellte gegenüber, beide als Umbildung einer schon früher von Sellmeier[2]) gegebenen Erklärung, gemäss welcher im Inneren der ponderablen Mittel Körper- und Aethertheilchen zusammenschwingen.

Für eine übersichtliche Zusammenstellung derselben wird es sich empfehlen, den in Betracht kommenden Formeln eine einheitliche Bezeichnung zu Grunde zu legen; ich wähle dazu durchweg die bisher von mir angewendete.

Die Entwickelungen der Hrn. Helmholtz und Lommel beziehen sich auf die Wirkungen von dreierlei Kräften, die nämlich von den Aethertheilchen, von den Körpertheilchen und von der Wechselwirkung zwischen beiden ausgehen

1) v. Lang, Wien. Ber. **84.** p. 361. 1881. Auch die von ihm besorgte neue Auflage von Beer's „Einleitung in die höhere Optik" stellt sich auf denselben Standpunkt.

2) Sellmeier, Pogg. Ann. **145.** p. 399. 1872.

sollen. Meine Darstellung beschränkt sich auf die Arbeitsleistungen der beiden ersteren.

Hrn. Helmholtz's Verdienste habe ich bereits früher[1]) gebührend gewürdigt; er zuerst hat für die Bewegungen der Aether- und Körpertheilchen je eine gesonderte Differentialgleichung aufgestellt[2]) und zugleich für letztere einen Bewegungswiderstand in derselben Form eingeführt, wie sie sich bei den langsameren Pendel- und Schallschwingungen bereits bewährt hatte.

Den genannten beiden Bewegungsgleichungen lässt sich nach Helmholtz zunächst für ein einfaches Mittel die allgemeine Form geben:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + F(\xi,\xi') = \mathfrak{e}\dfrac{d^2\xi}{dz^2}, \\ m'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} + F'(\xi,\xi') = -\left(\varkappa\xi' + \gamma\dfrac{d\xi'}{dt}\right). \end{cases}$$

Darin bedeuten m, m' die in der Volumeneinheit enthaltene Aether-, resp. Körpermasse, ξ, ξ' sind die bezüglichen Ausschläge, $\mathfrak{e} = m V^2$ ist die Deformationsconstante des inneren Aethers, $\varkappa = 4\pi^2 m' / T_m^2$ misst die Intensität der elastischen und $\gamma = G(2\pi m' / T_m)$ die der Reibungskraft, welche beide die Körpertheilchen in ihre Gleichgewichtslage zurückführen. Versteht man endlich unter F, F' noch näher festzustellende Functionen der Ausschläge, so subsumiren sich auch die Theorien von Lommel und mir unter vorstehende Formen.

Wir integriren diese Gleichungen mittelst der complexen Ausdrücke:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - n\dfrac{z}{\lambda}\right), \quad \xi' = A'\cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - n\dfrac{z}{\lambda}\right), \\ n = a + b\sqrt{-1}, \qquad A' = \mathfrak{A}'\left(\cos\Delta + \sin\Delta\sqrt{-1}\right), \end{cases}$$

und bedeuten darin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ die Amplituden, Δ den Phasenunterschied, a den Hauptrefractions- und b den Hauptextinctionsindex, welche bei senkrechter Incidenz der Schwingungsdauer T und der sich ihr zuordnenden Wellenlänge

1) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 376. 1881.

2) Vgl. Voigt, Wied. Ann. 17. p. 473. 1882.

$\lambda (= VT)$ entsprechen. Bei den Differentiationen ist dann im Einklang mit der Fresnel'schen Regel $\sin\varphi$ durch $\sqrt{-1}\cos\varphi$ zu ersetzen, unter φ die jeweilige Phase verstanden.

1. Die Annahme Helmholtz's.

Hr. Helmholtz[1]) denkt sich die Stärke der gegenseitigen Einwirkung der Aether- und Körpertheilchen als der relativen Lagenänderung der einen gegen die anderen proportional. Bedeutet daher β eine Constante, so ist nach ihm:

$$F(\xi,\xi) = -\beta(\xi' - \xi), \quad F'(\xi,\xi') = +\beta(\xi' - \xi),$$

und so erhalten die Gleichungen I die definitive Gestalt:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= e\frac{d^2\xi}{dz^2} + \beta(\xi' - \xi), \\ m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} &= -\left(\varkappa\xi' + \gamma\frac{d\xi'}{dt}\right) + \beta(\xi - \xi'). \end{aligned} \right.$$

Die Kraft der Wechselwirkung erscheint natürlich vermöge des Princips der Reaction in beiden Gleichungen mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet.

Wenn der Autor zur Vermeidung von Schwierigkeiten das untersuchte Mittel ausdrücklich als eine gegenseitige Durchdringung der beiden continuirlich gedachten einzelnen Atomsysteme behandelt und überdies bezüglich der Kraft $-\varkappa\xi'$ aus demselben Grunde sich vorstellt, dass schwere centrale Massen der Molecüle fest liegen, und die beweglichen Theile derselben gegen diese und den Aether eine bestimmte Gleichgewichtslage bewahren mögen, so darf man fürchten, dass dieses künstlich construirte Mittel von den in der Natur gegebenen mit discreten Molecülen erheblich abweiche. Auch mögen die drei angenommenen Kräfte für ihr stabiles Zusammenwirken auf eine ganz bestimmte relative Form und Grösse angewiesen sein, und wenn man weiter beachtet, dass die angedeuteten Schwierigkeiten sich noch erheblich steigern, wenn dieselben Aethertheilchen in einem zusammengesetzten Mittel mehrere heterogene Molecularqualitäten in Bewegung zu setzen haben (in welchem Falle

1) Helmholtz, Pogg. Ann. **154.** p. 585. 1875.

in der Differentialgleichung des Aethers ebenso viele einzelne Glieder $\beta(\xi' - \xi)$ vorkommen sollen, als Einzelausschläge ξ' vorhanden sind, während für jeden derselben eine besondere moleculare Bewegungsgleichung erforderlich wird, so drängt sich wohl die Frage auf, ob nicht vielleicht eine auf das Arbeitsprincip gegründete Behandlung über die erwähnten Schwierigkeiten hinweghelfe, und ob überhaupt die vorstehenden Differentialgleichungen mit dem Princip der Erhaltung der Energie in Einklang stehen, wenn diese von aussen her durch Strahlung dem Mittel zugeführt wird.[1])

Liegt endlich den Gleichungen (1) ausgesprochener Weise eine Uebertragung akustischer Begriffe zu Grunde, so muss es natürlich auch gestattet sein, sie rückwärts auf langsame Schwingungen, insbesondere etwa auf die Energieübertragung tönender Körper auf die Luft in Anwendung zu bringen. Nun scheint mir indess die Theorie des sogenannten Luftwiderstandes (vgl. unten unter 4_b p. 412) zu verlangen, dass in der oberen auf die Luft bezogenen Differentialgleichung die Constante β verschwindet, während sie in der unteren irgend welchen endlichen Werth erhalten mag.

Auch die durch Integration der Gl. (1) erhaltenen Bedingungsgleichungen geben zu manchen Bedenken Anlass. Hier möge freilich zuvörderst bemerkt werden, dass Helmholtz über den Werth der oben $V(=\sqrt{e/m})$ genannten Constante keine nähere Bestimmung getroffen hat. Die Reflexionserscheinungen nöthigen indess dazu, sie mit der Lichtgeschwindigkeit im freien Aether zu identificiren. Und da ausser mir sowohl Sellmeier wie Lommel dem intermolecularen Aether dieselbe Elasticität und Dichtigkeit zulegen wie dem Weltäther, so soll diese Voraussetzung auch hier gemacht werden. Setzt man jetzt abkürzungsweise:

$$\frac{\beta T_m^2}{4\pi^2} = B, \qquad \left(1 - \frac{B}{m'}\right)\frac{1}{T_m^2} = \frac{1}{T_0^2}$$

und führt statt der Schwingungsdauern die ihnen propor-

1) Auf dieses Bedenken habe ich schon in den Verhandl. des naturhist. Ver. für Rheinl.-Westf. Jahrg. 1876. 2. hingewiesen.

tionalen Wellenlängen ein, so ergeben sich die folgenden vier endgültigen Ausdrücke:

$$
(2)\quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 1 = \dfrac{B}{m}\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} + \dfrac{\dfrac{B^2}{m\,m'}\dfrac{\lambda^4}{\lambda_m^4}\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_0^2}-1\right)}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_0^2}-1\right)^2 + G^2\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}} = P \\[2ex] 2ab = \dfrac{\dfrac{B^2}{m\,m'}G\dfrac{\lambda^5}{\lambda_m^5}}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_0^2}-1\right)^2 + G^2\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}} = Q. \end{cases}
$$

$$
(3)\quad \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = \frac{\dfrac{B}{m'}\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_0^2}-1\right)^2 + G^2\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}}, \qquad \operatorname{tg}\Delta = \frac{G\dfrac{\lambda}{\lambda_m}}{\dfrac{\lambda^2}{\lambda_0^2}-1}.
$$

Die Indices a und b selbst erhält man mittelst der Gleichungen:

$$
a^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+P)^2+Q^2} + (1+P)\right],
$$
$$
b^2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+P)^2+Q^2} - (1+P)\right].
$$

Eine Discussion der Ausdrücke (2) und (3) führt zu folgenden Ergebnissen.

Für die extreme Wellenlängen $\lambda = 0$, für welche die Functionen P und Q verschwinden, wird $a = 1$, $b = 0$ und zugleich $K = b/\lambda = 0$, sodass das Mittel für die kürzesten Wellen die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Durchgängigkeit besitzt wie der Weltäther. Die Amplitude der Körpertheilchen wird unmerklich, und Aether- und Körpertheilchen schwingen mit einem Phasenunterschied, für welchen $\operatorname{tg}\Delta = 0$ ist.

Für die zweite extreme Wellenlänge $\lambda = \infty$ werden P und Q ebenfalls unendlich und wird $Q/P = 0$. Daher hat man $a = \infty$, $b = 0$, $K = 0$, sodass die längsten Wellen sich mit verschwindend geringer Geschwindigkeit fortpflanzen und vom Mittel völlig durchgelassen werden. Die Amplitude $\mathfrak{A}'$ der Körpertheilchen erreicht dabei einen endlichen Betrag, und der Phasenunterschied Δ ist um π gewachsen.

Zwischen beiden liegen die Wellenlängen des Maximums der Absorption und des Maximums und Minimums der Re-

fraction. Für erstere ($\lambda = \lambda_0$) erreicht zugleich die Amplitude $\mathfrak{A}'$ ihren grössten Werth, und wird $\varDelta = \frac{1}{2}\pi$.

Einer oben gemachten Bemerkung zufolge müssen auch diese Beziehungen ohne weiteres anwendbar sein auf analog gebaute akustische Mittel (mit Longitudinalschwingungen). Denken wir uns denn ein solches etwa aus einem dichten Gase und aus zahllosen kleinen, nach Art einer Stimmgabel leicht beweglichen Körperchen hergestellt, und übertragen wir auf die Schwingungen dieses Systemes diejenigen Vorstellungen, welche uns vermöge unserer Erfahrungen über das Mitschwingen geläufig sind. Offenbar wird dann das Maximum des Amplitudenverhältnisses und der Absorption auch hier derjenigen Welle beigelegt werden, deren Tonhöhe mit der der Körperchen übereinstimmt, man wird es indess als selbstverständlich ansehen, dass diese Werthe mit der Entfernung von der Tonhöhe T_0 beiderseits abnehmen, für die endlich entfernte Tonhöhe $T = 0$ einen endlichen Betrag und für die unendlich entfernte Tonhöhe $T = \infty$ einen unendlich kleinen Betrag erreichen. Während sonach diesen Erwartungen wohl die Extinctionscurve $[b = f(\lambda)]$, nicht dagegen die Amplitudencurve $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{A} = f(\lambda)]$ entspricht, erhält auch die theoretische Refractionscurve mit ihrem doppelten Maximum einen recht eigenthümlichen Verlauf. Insbesondere dürfte a priori einzusehen sein, dass für eine unendlich langsame Schwingungsbewegung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben den gleichen Werth haben sollte, als wäre der directe Theil der Körperwirkung gar nicht vorhanden, nämlich den Werth V.

2. Die Annahmen Lommel's.

Hr. Lommel[1]) hat es versucht, die Helmholtz'sche Theorie zu verbessern oder vielmehr anscheinend eine neue Originalarbeit an deren Stelle zu setzen. Die von ihm vorgenommene Umwandlung bezieht sich zuvörderst auf die Wechselwirkung der Aether- und Körpertheilchen, welche er nicht der Differenz der bezüglichen Ausschläge, sondern dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional setzt,

1) Lommel, Wied. Ann. **3.** p. 339. 1878; **6.** p. 55. 1879.

sodass dieselbe „nach dem von **Newton** aufgestellten Reibungsgesetze erfolgt“. Man könnte demnach vermuthen, dass in den beiden Differentialgleichungen (I) die Functionen F, F' die Form erhalten:

$$F(\xi, \xi') = -\beta'\left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right), \quad F'(\xi, \xi') = +\beta'\left(\frac{d\xi'}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right),$$

doch nimmt der Hr. Verfasser noch weitere Aenderungen vor. Integrirt man nämlich unter vorstehender Annahme, so erscheint die frühere Constante β hier mit $-\sqrt{-1}\,.(2\pi/T)$ multiplicirt, und wenn daher diesmal abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\frac{\beta' T_m}{2\pi} = B',$$

so erhält man z. B. statt des ersten der Ausdrücke (2):

$$a^2 - b^2 - 1 = -\frac{\dfrac{B'^2}{m\,m'}\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{B'}{m'} - G\right)^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}.$$

Darin ist die rechte Seite der Erfahrung zuwider für lange Wellen negativ, für kurze positiv.

Hr. **Lommel** weiss sich indess dadurch zu helfen, dass er bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen dem von ihm ausdrücklich angezogenen Reactionsprincip die Annahme hinzufügt, dass „die gemeinsame Gleichgewichtslage der Aether- und Körpertheilchen ihren Ort im Raume bewahre“. Bezeichnen wir die Abscisse derselben zur Zeit t durch x und die Abscissen der Massen m, m' durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, so werden sonach die Verschiebungen derselben gegen die Gleichgewichtslage:

$$\mathfrak{x} - x, \quad x - \mathfrak{x}'.$$

Daraufhin schreibt dann Hr. **Lommel**:

$$m\frac{d^2(x-\mathfrak{x})}{dt^2} = e\frac{d^2(x-\mathfrak{x})}{dz^2} + \beta'\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}'}{dt}\right)$$

$$m'\frac{d^2(\mathfrak{x}'-x)}{dt^2} = -\left(\varkappa(\mathfrak{x}'-x) + \gamma\frac{d(\mathfrak{x}'-x)}{dt}\right) - \beta'\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt} - \frac{d\mathfrak{x}'}{dt}\right).$$

Gegen die Annahme eines constanten Gleichgewichtsortes will ich hier keine Einwendung erheben, obwohl die



Feststellung der Phasendifferenz besser den Integralgleichungen und insbesondere der Gleichung für Δ vorbehalten bliebe. Es muss indess darauf hingewiesen werden, dass Hr. Lommel seiner Annahme, die er bezüglich der übrigen Kräfte auch durchführt, bezüglich der Wechselwirkung keine Rechnung trägt. Setzt man in der That:

$$x - \mathfrak{x} = -\xi, \qquad \mathfrak{x}' - x = \xi',$$

so erhalten seine Bewegungsgleichungen die Gestalt:

$$(4_a) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mathfrak{e}\frac{d^2\xi}{dz^2} - \beta'\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\xi'}{dt}\right) \\ m\frac{d^2\xi'}{dt^2} &= -\left(\varkappa\xi' + \gamma\frac{d\xi'}{dt}\right) - \beta'\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\xi'}{dt}\right), \end{aligned} \right.$$

welche Form sich von der modificirten Helmholtz'schen Form 1 durch das Vorzeichen des unteren β unterscheidet. Die Gleichungen Lommel's stehen sonach mit dem Princip der Reaction im Widerspruch, sofern die Wechselwirkung der Geschwindigkeitsdifferenz der Aether- und Körpertheilchen proportional genommen wird. Setzt man dagegen:

$$x - \mathfrak{x} = \xi, \qquad \mathfrak{x}' - x = \xi',$$

so schreiben sich die Gleichungen Lommel's:

$$(4_b) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mathfrak{e}\frac{d^2\xi}{d\mathfrak{z}^2} - \beta'\left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\xi'}{dt}\right) \\ m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} &= -\left(\varkappa\xi' + \gamma\frac{d\xi'}{dt}\right) + \beta'\left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\xi'}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

In diesem Falle wäre freilich das Princip der Wirkung und Gegenwirkung gewahrt, aber die Wechselwirkung wäre nicht mehr durch die Geschwindigkeitsdifferenz, sondern durch die mittlere Geschwindigkeit der Aether- und Körpertheilchen gegeben. Ob sich für diese letztere Hypothese jemand wird erwärmen können, weiss ich nicht; schwerlich indess erscheinen diese Formeln als eine Verbesserung der von Helmholtz aufgestellten.

Die Integration der Gleichungen (4) ergibt die Bedingungen:

$$(5)\quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 1 = \dfrac{\dfrac{B'^2}{m m'}\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{B'}{m'} - G\right)^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}} \\ 2ab = \dfrac{B'}{m}\dfrac{\lambda}{\lambda_m} + \dfrac{\dfrac{B'^2}{m m'}\left(\dfrac{B'}{m'} - G\right)\dfrac{\lambda^3}{\lambda_m{}^3}}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{B'}{m'} - G\right)^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}}. \end{cases}$$

$$(6)\quad \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = \frac{\dfrac{B'}{m'}\dfrac{\lambda}{\lambda_m}}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{B'}{m'} - G\right)^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}}}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2} - 1}{\left(G - \dfrac{B'}{m'}\right)\dfrac{\lambda}{\lambda_m}}.$$

Die beiden oberen Ausdrücke geben für $\lambda = 0$ dieselben Werthe der Indices a und b wie die bezüglichen Ausdrücke 2. nämlich $a = 1$, $b = 0$, $K = 0$; für $\lambda = \infty$ dagegen wird $a = \infty$, $b = \infty$, $K = 0$. Andererseits wird diesmal für beide extreme Wellenlängen $\mathfrak{A}' = 0$, sodass die Körpertheilchen für sehr rasche und sehr langsame Schwingungen in Ruhe bleiben. Dem Phasenunterschied endlich kommen Werthe zu, die gegen die früheren um 90° verschoben sind.

Entspricht sonach bloss der dritte dieser Ausdrücke annähernd dem oben (p. 393) als wahrscheinlich bezeichneten Verlaufe, so wird dagegen der vierte um so weniger befriedigen; er hebt eben den Vorzug des dritten direct wieder auf und ermöglicht dadurch die Abnormitäten der beiden ersteren.

Auf Grund dieser Vorbemerkungen lässt sich nun der Nachweis führen, dass das System der Gleichungen Lommel's noch zu einem anderartigen, höchst eigenthümlichen Widerspruch führt. Denken wir uns nämlich bei gegebenem λ_m und G die Functionen:

$$a = f_1(\lambda), \quad b = f_2(\lambda), \quad K = f_3(\lambda),$$

zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ berechnet und in der Weise graphisch dargestellt, dass die reciproken Wellenlängen (oder die ihnen proportionalen Schwingungszahlen) als Abscissen (x) und die zugehörigen a, b, K als Ordinaten aufgetragen werden. Man lasse alsdann die Constante B'^2, die näherungsweise der Dichtigkeit d parallel läuft, conti-

nuirlich abnehmen und denke sich die jedem d entsprechenden drei Curven verzeichnet. An der Grenze der Verdünnung gestalten sich dann die folgenden Verhältnisse.

1. Die Refractionscurve reducirt sich auf zwei sich senkrecht schneidende Geraden, auf eine Horizontale $a = 1$ und auf die Verticale: $x = 1/\lambda = 0$, $a = \infty$.

2. Die Extinctionscurve besteht ebenfalls aus zwei aufeinander senkrechten Geraden, von denen die eine gegeben ist durch $x = 0/0$, $b = 0$, während die Gleichungen der anderen sind: $x = 0$, $b = \infty$.

3. Die Absorptionscurve besteht aus der Horizontalen $K = 0$.

Setzt man dagegen in den Differentialgleichungen (4) von vornherein $\xi' = 0$, $\beta' = 0$, sodass sich dieselben auf die des Aethers reduciren, so erhält man die drei horizontalen Geraden: $a = 1$, $b = 0$, $K = 0$.

Dieser mathematische Widerspruch bleibt natürlich trotz der abwehrenden Bemerkung Hrn. Lommel's[1]) in aller Schärfe bestehen. Er ist eben für die Helmholtz-Lommel'sche Behandlungsweise charakteristisch.

3. Eine dritte Annahme.

Im Interesse der Vollständigkeit möchte ich hier noch eine dritte Möglichkeit andeuten, auf die ich bei Abfassung dieses Aufsatzes aufmerksam geworden bin. Wurde nämlich unter 1 die Wechelwirkung zwischen Aether- und Körpertheilchen ihrer Ausschlagsdifferenz und unter 2 dem ersten Differentialquotienten derselben nach der Zeit proportional gesetzt, so liesse sich in der angedeuteten Richtung noch der weitere Schritt thun, sie dem zweiten Differentialquotienten der Ausschlagsdifferenz, also dem Unterschiede der beiderseitigen Beschleunigungen proportional zu nehmen.

In diesem Falle erhält man einfache und elegante Formeln, von denen sich die Ausdrücke für $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$, $\operatorname{tg} \varDelta$ und $2ab$ sehr nahe den von mir aufgestellten, auf die ich weiter unten zurückkomme, anschliessen, während allerdings der Ausdruck

1) Lommel, Wied. Ann. 16. p. 427. 1882.

für $a^2 - b^2 - 1$ eine neue Schwierigkeit bereitet. Man erhält nämlich für die längsten Wellen ($\lambda = \infty$), und zwar bei beliebiger Dichtigkeit neben der Amplitude $\mathfrak{A}' = 0$ und dem Extinctionscoëfficienten $b = 0$ für den Refractionsindex a einen von der Einheit verschiedenen endlichen Werth. Bleiben aber bei den ganz langsamen Schwingungen die Körpertheilchen in Ruhe, so unterscheidet sich für diese das Medium in nichts vom Weltäther, der innerhalb eines absolut festen, feinporigen Gefüges zu langsamen Schwingungen sollicitirt wird und diese Schwingungen ohne Reibung ausführt. Für diese Bewegung erhielte folglich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einen doppelten Werth, was aber selbstverständlich widersinnig ist.

4. Theorie der Wechselwirkung periodischer Bewegungen.

Den bisher besprochenen Versuchen stelle ich jetzt meine eigene Theorie gegenüber, die, wie ich zeigen zu können glaube, sich auf recht einfache dynamische Erwägungen stützt. Freilich habe ich bisher in Rücksicht auf die verschiedenen Erscheinungsgruppen, die sich ihr unterordnen sollten, einige Unbestimmtheit walten lassen, doch da sich dieselben seitdem sämmtlich zwanglos ihr gefügt haben, so lässt sich nunmehr die zu Grunde liegende Idee mit um so grösserer Schärfe darstellen.

Auch ich nehme zuvörderst an, dass der Abstand der Körpertheilchen gegen die Länge der Wellen wenigstens praktisch unendlich klein sei, ohne gerade befürchten zu brauchen, dass die folgenden Betrachtungen bei Abnahme der Schwingungsdauer einmal ihre Gültigkeit verlieren. Dieselben beruhen nämlich, wenngleich anscheinend auch bei ihnen schon die blosse Berücksichtigung der Beschleunigungen der Kräfte zum Ziele führt, in ihrer tieferen Wesenheit auf dem Princip der Erhaltung der Schwingungsarbeit. Der hiermit angedeutete Gegensatz ist somit ein so fundamentaler, dass ich kein Bedenken trage, der von mir bekämpften Anschauungsweise geradezu ihre Unverträglichkeit mit jenem Princip zum Vorwurf zu machen.

I. Geht man in der Mechanik von Druckkräften zu arbeitenden Kräften über, so beschränkt man sich vielfach auf die Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte (X) auf eine einzige Masse (m) und lässt der Arbeitsleistung für die Wegstrecke $dx\,(=d\xi)$ einen Zuwachs der Geschwindigkeit (v) gleich dv, resp. einen Zuwachs der lebendigen Kraft $d(\frac{1}{2}mv^2)$ entsprechen, der mit ihr durch die Gleichung:

$$(7) \qquad mv\,dv = d\frac{mv^2}{2} = \Sigma X\,dx$$

verknüpft ist. Indess steht nichts im Wege, dass an der Gesammtarbeit beliebig viele Einzelmassen $m_1, m_2 \ldots$ participiren, deren Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \ldots$ dadurch um dv_1, $dv_2 \ldots$ erhöht werden. Man kann sich eben die Gesammtarbeit in ebenso viele entsprechende Bruchtheile zerlegt denken, als Einzelmassen vorhanden sind, und erhält folglich die allgemeinere Gleichung:

$$\Sigma mv\,dv = \Sigma X\,dx.$$

Dabei wird freilich die Gesammtarbeit der Kräfte andere Bewegungen der bezüglichen Massen zur Folge haben können, als wenn die isolirten Kräfte nacheinander eine gleiche Arbeit aufwenden. Würden aber die Einzelarbeiten irgendwelchen Massen m_0 bei einer Geschwindigkeit v_0 einen Geschwindigkeitszuwachs dv_0 ertheilen, so verlangt jedenfalls der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte die Gleichheit:

$$(7_b) \qquad \Sigma mv\,dv = \Sigma m_0 v_0\,dv_0 = \Sigma X\,dx.$$

Der Inhalt derselben heisst bekanntlich das Princip der Aequivalenz von Arbeit und lebendiger Kraft.

Wir denken uns vorläufig zwei einzelne Massen m_1, m_2 und zwei einzelne zusammen arbeitende Kräfte X', X'' und schreiben daher:

$$m_1 v_1\,dv_1 + m_2 v_2\,dv_2 = X_1'\,dx_1' + X_2''\,dx_2''.$$

Unsere weiteren Betrachtungen sollen nun dadurch eingeschränkt werden, dass wir uns vorstellen wollen, alle in Betracht kommenden Geschwindigkeiten und Kräfte seien derart miteinander verbunden, dass, wenn durch eine äussere Kraft das bestehende Gleichgewicht gestört wird, sofort alle

übrigen Punkte in Mitleidenschaft gezogen werden. Die Bestandtheile unseres Systems sollen also, kurz gesagt, miteinander in Wechselwirkung stehen.

Unsere Aufgabe sei dann die, unter der Annahme, dass die erwähnten Gleichgewichtsstörungen sich in periodische, und zwar zusammenstimmende Bewegungen der Bestandtheile umsetzen, die letzte Gleichung so in zwei einzelne umzuformen, dass es möglich wird, die Attribute dieser Schwingungen zu berechnen. Die Massen der Volumeneinheit des so definirten Aggregates mögen fortan m, m', ihre Geschwindigkeiten $v = dx/dt$, $v' = dx'/dt$ genannt werden. Man denke sich ferner im Schwerpunkt der Masse m einen Kraftentwickelungsmechanismus angebracht, welcher in der Zeit dt die als bekannt vorausgesetzte Kraft X erzeugt. Ebenso möge der Schwerpunkt der Masse m' der Sitz einer zweiten gegeben Kraft X' sein.

Ich nehme zunächst an, dass seitens einer spontanen äusseren Einwirkung an der Masse m die angebbare Spannkraftsarbeit $-Xdx$ geleistet sei. Die damit disponibel werdende Arbeit $+Xdx$ wird dann nicht blos ihrer eigenen Masse m den Zuwachs $mv\,dv$ ertheilen, sondern auch die Masse m' in doppelter Weise participiren lassen. Ihre freie Bewegung erhalte den Zuwachs $m'v'\,dv'$, zugleich aber werde an ihr eine gewisse Spannkraftsarbeit geleistet, die wir durch $X''\,dx$ bezeichnen wollen. Man hat folglich:

$$(8) \qquad Xdx = mv\,dv + (m'v'\,dv' + X''dx)\,^{1)},$$

sodass für die freie Bewegung des Systems nur der Ueberschuss:

$$(X - X'')\,dx = mv\,dv + m'v'\,dv'$$

verwandt wird. Dem möge etwa der Fall entsprechen, dass einem optischen Mittel Bewegungsenergie seitens einer äusseren Aetherwelle zugeführt würde.

1) Bezeichnet man die zugeleitete Arbeit Xdx durch dQ, die Erhöhung der lebendigen Kraft der freien Bewegung $d(mv^2/2 + m'v'^2/2)$ durch dH und die Vermehrung der inneren Arbeit durch dJ, so lässt sich mit der mechanischen Wärmetheorie schreiben:

$$dQ = dH + dJ.$$

Denken wir dagegen zweitens seitens einer spontanen Kraft die Masse m' ergriffen und seitens derselben die angebbare Arbeit $X'dx'$ frei gemacht; dieselbe wird sich dann entsprechend umsetzen in:

$$(9) \qquad X'dx' = m'v'dv' + (m v dv + X''' dx'),$$

wo die beiden eingeklammerten Glieder der Masse m zu gute kommen.

Sollen nun die unter (1) und (2) erzeugten Bewegungen zusammenstimmende sein, sodass bei der Fortpflanzung der beiden Bestandtheilen gemeinsamen periodischen Zustände bald die Arbeit Xdx an der Masse m, bald die Arbeit $X'dx'$ an der Masse m' reproducirt wird, so müssen die v, v' der Gleichungen (8) und (9) übereinstimmen, muss also die Bedingung erfüllt sein:

$$(10) \qquad (X - X'')\,dx = (X' - X''')\,dx' = mvdv + m'v'dv'.$$

Jede derartige Bewegung wird indess so lange willkürlich bleiben, als nicht angegeben werden kann, in welchem Verhältniss die Einwirkung der arbeitenden Masse m auf die Masse m' dieser letzteren Zuwachs an lebendiger Kraft ($m'v'dv'$) und Zuwachs an innerer Arbeit ($X''dx$) mittheilt. Und ebenso, solange das entsprechende Verhältniss $mvdv$: $X'''dx'$ für die Einwirkung der Masse m' auf m unbekannt bleibt. Setzt man dagegen etwa:

$$X''dx = (c' - 1)\,m'v'dv', \qquad X'''dx' = (c - 1)\,mvdv,$$

unter c', c gegebene Coëfficienten verstanden, sodass diese selbst definirt sind durch:

$$(11) \qquad \begin{cases} m'v'dv' + X''dx = c'm'dv \\ mvdv + X'''dx' = cmvdv, \end{cases}$$

so ist die Bewegung des Systems zur Zeit dt dadurch eine völlig bestimmte geworden. Die Gleichungen (8) und (9) nehmen dann die einfache Gestalt an:

$$(\mathrm{III_a}) \qquad \begin{cases} X dx = d\dfrac{mv^2}{2} + c'd\dfrac{m'v'^2}{2}, \\ X'dx' = cd\dfrac{mv^2}{2} + d\dfrac{m'v'^2}{2}. \end{cases}$$

Wenn indess die so eingeführte Beschränkung ausschliesslich auf das Aequivalenzprincip von Arbeit und lebendiger

Kraft gestützt wird, so ist ihr insofern eine gewisse Willkür nicht abzusprechen, als man ja die Coëfficienten c, c' ebenso gut durch andere C, C' ersetzen könnte, die definirt wären durch:

$$(12) \qquad \begin{cases} m'v'dv' + X''\, dx = C'm'dv'.v, \\ m\,v\,dv\, + X'''\, dx' = C\,m\,dv\,.v'. \end{cases}$$

Dadurch würden dann die Gleichungen (8) und (9) die von der obigen verschiedene Form erhalten:

$$(\mathrm{III_b}) \qquad \begin{cases} X\,dt = d(mv) + C'\,d(m'v'), \\ X'dt = Cd(mv) + d(m'v'). \end{cases}$$

Sofern allerdings der Zusammenhang zwischen c, c'; C, C' sich ausspricht durch die Beziehungen:

$$(13) \qquad C = c\,\frac{v}{v'}, \qquad C' = c'\,\frac{v'}{v},$$

so ist vorläufig, solange nämlich über die Beschaffenheit dieser Coëfficienten keine vereinfachenden Annahmen gemacht, dieselben also für jeden Moment dt als gegeben betrachtet werden, die eine Schreibart sachlich mit der anderen identisch. Aeusserlich freilich enthalten die Gleichungen ($\mathrm{III_a}$) lebendige Kräfte und Arbeitsgrössen, Gleichungen ($\mathrm{III_b}$) dagegen Bewegungsquantitäten und Druckkräfte.

Man denke sich jetzt weiter die Möglichkeit, dass sich Systeme von miteinander in Wechselwirkung stehenden Körpern finden mögen, in welchen die Massen m, m' ohne Phasendifferenz zusammenschwingen, sodass folglich das Geschwindigkeitsverhältniss v/v' sich gleichzeitig als das Amplitudenverhältniss A/A' darstellt, ihm also während der ganzen Dauer einer Schwingung ein constanter Werth zukommt. Für ein solches System behielten dann offenbar während dieser Zeit auch die Coëfficienten c, c' und C, C', deren Constanz sich hier eben wechselseitig bedingt, unveränderliche Werthe, würde folglich in jedem Augenblick das Verhältniss, in welchem die Arbeit einer ersten Masse sich auf Vermehrung einerseits der freien Bewegung und andererseits der inneren Arbeit einer zweiten Masse vertheilt, ein gegebenes bleiben.

Ich mache nun bezüglich dieser — der absolut elastischen Mittel — und im Anschluss an die allgemein mechanischen Begriffe der Differentialgleichungen die ganz bedingungslose Hypothese, dass dieses Verhältniss nicht einer einzelnen einfachen Schwingung als solcher eigenthümlich sei, sondern dass es für beliebige einfache Schwingungen und für beliebige Superpositionen derselben einen identischen Werth behalte, dass also die Coëfficienten C, C' als die einfacheren von der Schwingungsform unabhängig seien und das gegebene System als unveräusserliche Merkmale desselben ein für allemal charakterisiren.

Um dann von den elastischen Mitteln (mit reellen Ausschlägen) zu den absorbirenden überzugehen, hat man in Gl. (III_a) bekanntlich complexe Amplituden einzuführen, während bei Benutzung der Gl. (III_b) die thatsächlichen Schwingungsausdrücke (mit Exponentialfactoren) genügen. Man findet so, dass dann auch C, C' ihre reelle Form behalten, wohingegen c, c' complexe Grössen werden.

In Uebereinstimmung hiermit habe ich in der That gefunden, dass bei allen meinen Untersuchungen, in welchen die Kräfte X zum Theil recht verschiedene und recht verwickelte Formen hatten, die Gleichungen (III_b) in einer der Natur völlig entsprechenden Weise integrirt werden können unter der Annahme, dass die C, C' Constanten seien. Und umgekehrt, betrachtet man die bezüglichen Erfahrungsthatsachen als mit den vorstehenden Gleichungen verträglich, so müssen C, C' als absolute Attribute des gegebenen Systems gedeutet werden.

Wenn ich freilich in meinen ersten Arbeiten[1]) über Absorption und Dispersion das thatsächliche (reelle) Amplitudenverhältniss $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$ noch als von aussen her gegeben ansehen und infolge dessen die C, C' nicht isolirt, sondern blos als Factoren der veränderlichen Producte $C'\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$, $C\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ behandeln durfte, so reichte es damals auch vollkommen aus, einzig die Dispersionsconstante CC' als von der Schwingungsform unabhängig hinzustellen.

1) Ketteler, Wied. Ann. 7. p. 658. 1879.

Gegenwärtig dagegen möchte ich, wie weiter unten ausgeführt werden soll, die Annahmen:

$$C = \text{const.} \qquad C' = \text{const.}$$

nicht mehr auf optisch-akustische Mittel beschränkt, sondern in entsprechender Erweiterung auf beliebige Systeme, deren Bestandtheile miteinander irgendwie in Wechselbeziehung stehen, ausgedehnt sehen.

II. Kürzer, zwingender und allgemeiner erhält man das Princip der Wechselwirkung, wenn man ohne Herbeiziehung lebendiger Kräfte beim reinen Arbeitsprincip stehen bleibt. Schreibt man nämlich:

$$(14) \qquad m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X,$$

multiplicirt beide Seiten resp. mit:

$$v\,dt = d\xi$$

und betrachtet das Product $X d\xi$ als Resultante von Einzelarbeiten, so erhält man zwar die Ausgangsformel (7) zurück, aber die Unmittelbarkeit der obigen Kraftdefinition ist wenigstens nach ihrer einen Seite hin zu Gunsten des neuen Begriffes der lebendigen Kraft verloren gegangen. Bleiben wir indess bei jener stehen.

Ich multiplicire Gleichung (14) für eine Masse m_1 mit der kleinen, aber ganz willkürlichen Verrückung δx_1, für eine Masse m_2 mit δx_2 u. s. w. und addire. Es kommt dann:

$$(15) \qquad \Sigma m\frac{dv}{dt}\delta x = \Sigma X \delta x,$$

welche Beziehung erst durch die auf alle Summanden ausgedehnte Annahme $\delta x = d\xi$ in Gl. (7) übergeht. Heisst nun wie früher die rechte Seite Spannkraftsarbeit, so bezeichne ich fortan die linke Seite ebenso kurz als Beschleunigungsarbeit (Arbeit der Beschleunigungsdrucke) und die Gl. (15) selbst als den analytischen Ausdruck des Princips von der Aequivalenz beider.

Wir wollen dieselbe sofort auf die beiden in Wechselwirkung stehenden Kräfte X, X' der Massen m, m' des früheren Systems in Anwendung bringen. Verrichtet zunächst die erstere während der Zeit δt eine angebbare Ar-

beit $X\delta x$, so wird kraft derselben nicht blos der Beschleunigungsdruck $m(dv/dt)$ der ihr angehörigen Masse m um die identische Strecke δx verschoben, sondern es wird gleichzeitig auch der Widerstand $m'(dv'/dt)$ auf irgendwelche Strecke $\delta x'$ überwunden. Man hat daher die Beziehung:

$$X\delta x = m\frac{dv}{dt}\delta x + m'\frac{dv'}{dt}\delta x'.$$

Andererseits möge die Kraft X' während des gleichen Momentes die angebbare Arbeit $X'\delta\mathfrak{x}'$ leisten. Als Spannkraftsarbeit setzt sie sich um in die Beschleunigungsarbeiten $m'(dv'/dt)\delta\mathfrak{x}'$ und $m(dv/dt)\delta\mathfrak{x}$, sodass kommt:

$$X'\delta\mathfrak{x}' = m\frac{dv}{dt}\delta\mathfrak{x} + m'\frac{dv'}{dt}\delta\mathfrak{x}'.$$

Schreiben wir jetzt abkürzungsweise:

$$\frac{\delta x'}{\delta x} = C', \quad \frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta\mathfrak{x}'} = C$$

und multipliciren beide Gleichungen mit dt, so werden sie mit den obigen Gleichungen ($\mathrm{III_b}$) identisch. Wir wollen sie hier indess auf die Form bringen:

$$(16) \qquad X - m\frac{dv}{dt} = C'm'\frac{dv'}{dt}, \quad X' - m'\frac{dv'}{dt} = Cm\frac{dv}{dt}.$$

Man betrachtet nun bekanntlich in der Dynamik den durch das Product $m(dv/dt) = B$ gemessenen Beschleunigungsdruck als die eigentlich im System wirksame Kraft, die schon für sich allein die bewegte Masse m dorthin bringt, wohin sie thatsächlich gelangt. Ihr gegenüber erscheint die Kraft X als sogenannte äussere oder, wie wir lieber sagen wollen, als mit-veranlassende Kraft. Der d'Alembert'schen Bezeichnungsweise entsprechend wollen wir endlich $X - B = V$ noch die verlorene Kraft und $(X - B)/B = \mathfrak{V}$ die procentisch verlorene Kraft nennen. Unter Benutzung dieser Definition lässt sich dann der Inhalt der Gleichungen:

$$V = X - B = C'.B', \quad V' = X' - B' = C.B$$

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V}' = \frac{X - B}{B}\,\frac{X' - B'}{B'} = CC' = D.$$

in die folgenden Worte kleiden: Sind C, C' zwei gegebene, die Wechselwirkung des Systems nach ihren beiden Seiten hin charakterisirende Constanten, so ist in jedem Augenblick

die verlorene Kraft der einen Masse gleich einem bestimmten Bruchtheil der wirksamen Kraft der anderen, und ist endlich das Product (oder das geometrische Mittel) der beiden procentisch verlorenen Kräfte eine die volle Wechselwirkung darstellende Grösse.[1])

Sofern aber ohne eine solche geregelte Theilung zwischen Verlust und Gewinn gar keine regelmässige Schwingungsbewegung zu Stande kommt, und sofern diese Theilung für alle beliebigen von aussen kommenden einzelnen Impulse gleich, von der Succession derselben aber unabhängig sein wird, so sind die Werthe von C, C' dem System als solchen eigenthümlich.[2])

Würden endlich zu den Kräften parallel der X-Axe eines Coordinatensystems noch solche parallel der Y- und Z-Axe hinzukommen, so würden die diesen entsprechenden Gleichungen natürlich ähnlich sein. Ich habe nun gefunden, dass, wenn selbstverständlich in isotropen Medien die sich auf eine bestimmte Masse beziehenden Constanten von der Kraftrichtung unabhängig sind, sie in anisotropen Medien mit deren Richtung variiren können. (Vgl. Theil II).

a. Anwendung auf optische Medien. — Ein optisches Medium insbesondere denken wir uns fortan in der Weise gebildet, dass eine Vielheit von äusserst kleinen und äusserst nahen, aus schwingungsfähigen Atomgruppen bestehenden Molecülen in eine wellenbildende (fortpflanzungsfähige) Flüssigkeit von der Art des Weltäthers eingetaucht werde. Dabei genügt bisher die Annahme, dass die einzelnen Körpertheilchen aufeinander keine merkliche directe

1) Unrichtig dagegen wäre es, statt der obigen Gleichungen zu schreiben: $V = X - B = C'.X', \quad V' = X' - B' = C.X$
und damit die Grösse der verlorenen Kraft der einen Masse von der zufälligen Grösse der augenblicklichen, die Bewegung der anderen Masse mit-veranlassenden Kraft abhängig zu machen.

2) Eine etwas allgemeinere Darstellung des Princips der Wechselwirkung habe ich kürzlich im „Journal für reine und angewandte Mathematik“ Jhrg. 1883 gegeben.

Einwirkung ausüben. Sofern in dem Mittel neben den Schwingungen des Aethers nur eine einzige schwingende Körperqualität (m', X') angenommen wird, bezeichne ich das Mittel als einfach.

Man kann dann die letzte Betrachtung leicht auf Medien erweitern, in welchen beliebig viele heterogene Massen m_1', m_2' .... mit dem gemeinsamen intermolecularen Aether in Wechselwirkung treten. Es bestehen dann offenbar ebenso viele Gleichungen, als Wechselbeziehungen stattfinden, und da natürlich für die Aethermasse sich alle Einzelverluste summiren, so hat man:

(17) $$\begin{cases} \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1' = D_1, \quad \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2' = D_2, \; \ldots \\ V = \Sigma V_1. \end{cases}$$

In Einklang hiermit lässt sich nunmehr den Bewegungsgleichungen der optischen Medien die Form geben:

(18) $$\begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} + \sum m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}C' = \mathfrak{e}\frac{d^2\xi}{dz^2} \\ m\frac{d^2\xi}{dt^2}C + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\left(\varkappa\xi' + \gamma\frac{d\xi'}{dt}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sodass, verglichen mit den Gleichungen (I), die Functionen F, F' nach unserer Theorie definirt sind durch:

$$F(\xi, \xi') = m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}C', \qquad F'(\xi, \xi') = m\frac{d^2\xi}{dt^2}C.$$

Die erste dieser Differentialgleichungen bezeichne ich als das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit des Aethers, die folgenden als das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit der Molecularkräfte.

Ihnen entsprechen als Bedingungsgleichungen der Integration:

(19) $$\begin{cases} m\mathfrak{A} + \Sigma m'A'C' = m\mathfrak{A}(a + b\sqrt{-1})^2 \\ m\mathfrak{A}C + m'A' = m'A'\left(\frac{T^2}{T_m^2} - \sqrt{-1}\,G\frac{T}{T_m}\right). \end{cases}$$

Und aus diesen leitet man ab:

$$(20)\quad \begin{cases} a^2 - b^2 - 1 = \sum \dfrac{D\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)^2 + G^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}} \\ 2ab = \sum \dfrac{DG \dfrac{\lambda}{\lambda_m}}{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)^2 + G^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}} \end{cases}$$

$$(21)\quad \frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = \frac{C}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1\right)^2 + G^2 \dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2}}}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{G \dfrac{\lambda}{\lambda_m}}{\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1}.$$

Diese Beziehungen zeichnen sich nicht blos vor den früheren Gl. (2), (3) und (5), (6) durch grössere Einfachheit aus, sie sind auch frei von den oben dargelegten Widersprüchen, sofern nämlich allen blos ein einziges Maximum zukommt und alle bei abnehmendem D die Eigenschaften des Mittels denen des Weltäthers continuirlich näher bringen.

Bei der Vergleichung dieser Ausdrücke mit der Erfahrung hat sich freilich eine eigenthümliche Schwierigkeit herausgestellt. Zur Darstellung der Refractionscurve der undurchsichtigen wie durchsichtigen Mittel ist nämlich ausser mindestens einem, mit der Wellenlänge stark veränderlichen Gliede noch ein annähernd constantes Glied erforderlich, welches dieselbe anscheinend für $\lambda = \infty$ nicht auf das Niveau $a = 1$ herabfallen lässt, sondern auf einem gewissen Grenzniveau $a = n_\infty$ erhält. Ich habe dieser Auffassung bisher entgegengehalten, dass sich einmal bis jetzt noch nirgends Mittel gefunden haben, welche im Sinne der Theorie einfach wären, dass ferner ein solcher Grenzbrechungsindex n_∞ experimentell unzugänglich sei, und dass sowohl im ultrarothen wie ultravioletten Strahlungsgebiete Absorptionen stattfinden mögen, die auch den optischen Theil der Brechungscurve beeinflussen, sodass vielleicht n_∞ thatsächlich blos das Niveau eines mehr oder minder nahe liegenden Wendepunktes derselben darstelle. Andererseits habe ich freilich mehrfach[1]) anerkannt, dass

1) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 364. 1881.

selbst die einfache Cauchy'sche Formel mit zwei Gliedern für die empirische Verwerthung der hier gegebenen mit grosser Gliederzahl bedeutend überlegen sei. Da überdies für letztere auch noch ungewöhnlich beträchtliche Dispersions- und Reibungsconstanten in Anspruch zu nehmen sind, so will ich im Folgenden versuchen, für das erwähnte constante Glied eine neue Erklärung zu geben.

Die erste Annahme, die sich hier darbietet, wäre die, den intermolecularen Aether nicht gerade mit dem Weltäther identisch zu nehmen, sondern ihm ungleiche Elasticität oder Dichtigkeit beizulegen. So unbedenklich wahrscheinlich mancher Leser eine solche Möglichkeit hinnehmen würde, so unannehmbar erscheint sie mir, selbst wenn ich dabei von der (für sich allein schon durchschlagenden) Theorie der bewegten Mittel gänzlich abstrahire. Wie nämlich später gezeigt werden soll[1], verlangt die Reflexionstheorie einmal eine Gleichheit des elastischen Aetherdruckes in allen Mitteln und muss andererseits auch das Incompressibilitätsprincip zum Ausgang nehmen. Will man nun nicht etwa einer einst von C. Neumann[2] ausgesprochenen Meinung beitreten, dass der Aether zwar nicht von so kleinen Kräften, wie es die Schwingungsimpulse sind, wohl aber von so bedeutenden Kräften, wie sie die Molecularwirkung äussert, comprimirt oder dilatirt werden könne, so dürfte wohl eine überall gleiche Wesenheit desselben ausser Zweifel sein.

Man nehme nun an, dass die molecularen schwingungsfähigen Atomgebilde, von denen bisher ein fest bleibender und ein sich nach den Gesetzen des Pendels bewegender Bestandtheil herangezogen sind, noch einen ferneren Bestandtheil haben, der, von den Aethertheilchen erfasst, mit denselben in gleicher Phase zusammenschwingt und diesen Schwingungen, sofern sie längs Gleichgewichtsflächen erfolgen, auch keinen Widerstand entgegenstellt. Nicht minder dürfte es wohl gestattet sein, sich im Sinne der mechanischen Wärmetheorie den Raum zwischen den festbleibenden Cen-

---

1) Vgl. auch Ketteler, Wied. Ann. **3.** p. 84. 1878.

2) C. Neumann, Die magnetische Drehung des Lichtes. Halle 1863.

tren mit regellos umherfliegenden Elementarstoffen erfüllt zu denken, die dann für die Zeit ihres Gelöstseins gewissermassen die Masse des freien inneren Aethers vermehren. Doch möchte diese letztere Vorstellung wohl mehr bei Gasen und Flüssigkeiten als bei festen Körpern und insbesondere den doppeltbrechenden unter ihnen zutreffen.

Sieht man die in Rede stehende Möglichkeit als die wahrscheinlichere an, nennt die Masse der Volumeneinheit dieser ponderablen Zwischentheilchen m_0', ihren Ausschlag, resp. Amplitude ξ_0' und $\mathfrak{A}_0'$ und die ihr zukommenden Attribute C_0, C_0'', so befriedigen dieselben offenbar die eine der beiden Gleichungen:

$$+ m\mathfrak{A}\, C_0 = m_0'\mathfrak{A}_0' \quad \text{oder:} \quad - m\mathfrak{A}\, C_0 = m_0'\mathfrak{A}_0'.$$

Die erste derselben lässt sich auf die Form bringen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}\, C_0 + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\frac{8\pi^2 m_0'}{T^2}\,\xi_0',$$

die zweite dagegen auf:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}\, C_0 + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = 0.$$

Um also auch diese Schwingungen den Gl. (18) zu subsummiren, hätte man im ersteren Fall:

$$\varkappa_0 = \frac{4\pi^2 m_0'}{T_m^{\ 2}} = 4\pi^2 m_0' \frac{2}{T^2},$$

folglich: $\lambda_m^{\ 2} = \frac{1}{2}\lambda^2$ und zugleich: $G = 0$ zu setzen, dagegen genügt es, in letzterem:

$$\varkappa_0 = \frac{4\pi^2 m_0'}{T_m^{\ 2}} = 0, \quad \lambda_m = \infty$$

zu nehmen. Und da beide Fälle nebeneinander vorkommen mögen, so soll allgemein gesetzt werden:

(22) $$n_\infty^2 - 1 = \textstyle\sum C_0 C_0' = \sum D_0,$$

wo demnach $(n_\infty^2 - 1)$ die brechende Kraft des Mittels für $\lambda = \infty$ bedeutet. In expliciter Rücksicht auf dieselbe erhält sonach das Dispersionsgesetz der isotropen Mittel die kurze symbolische Form:

(IV) $$n^2 - n_\infty^2 = \sum \frac{D}{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^{\ 2}} - 1 - \sqrt{-1}\, G\frac{\lambda}{\lambda_m}}.$$

Wir werden indess die bisherigen Gleichungen (20) als die allgemeineren beibehalten. Dieselben entsprechen mit der jetzigen Deutung allen bisher bekannten Erfahrungen und insbesondere den Dispersionsverhältnissen von Kalkspath (und den durchsichtigen Mitteln) sowie von Cyaninlösungen und Selen.

Noch möge in Rücksicht auf die weiterhin zu besprechende Reflexionstheorie folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Beachtet man, dass zufolge der Gleichungen (13):

$$c'\frac{v'}{v} = c'\frac{A'}{\mathfrak{A}} = C',$$

und führt die (mit der Schwingungsform) Variable c' in die erste der Gl. (19) ein, so schreibt sich dieselbe:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' c' A'^2}{m \mathfrak{A}^2}.$$

Nun denke man sich zwei Medien, in welchen bei gleichen m, m', $D = cc' = CC'$, T, n, $\mathfrak{A}$ die Amplituden A' der Körpertheilchen verschieden wären. Für beide wird dann sein:

$$\Sigma m' c_1' A_1'^2 = \Sigma m' c_2' A_2'^2.$$

Wären insbesondere für das zweite die einzelnen $c_2' = 1$, sodass die $c_2 = D$ würden, so wären nach den Gleichungen (11) die inneren Widerstände $X'' = 0$. Man darf daher:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m' c' A'^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m' A_0'^2$$

als die auf freie Schwingungen reducirte mittlere lebendige Kraft der Körpertheilchen bezeichnen und muss entsprechend in dem Ausdruck der brechenden Kraft:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A_0'^2}{m \mathfrak{A}^2} \tag{23}$$

A_0' als diejenige Körperamplitude definiren, die sich der Aetheramplitude $\mathfrak{A}$ zuordnen würde, wenn alle an den Körpertheilchen geleistete Aetherarbeit in lebendiger Kraft ausgedrückt würde.

Selbstverständlich erhält dann endlich Gl. (8) die entsprechende (verallgemeinerte) Form:

$$X dx = d\frac{m v^2}{2} + \sum d\frac{m' v_0'^2}{2}. \tag{24}$$

Nun bildet die letzte Beziehung die nothwendigste Voraussetzung jeder Reflexionstheorie, welche auf das Princip der Erhaltung der Arbeit nicht verzichten will, während die vorletzte speciell für die Fresnel'schen Formeln charakteristisch ist. Da ihre Ableitung aus der Helmholtz-Lommel'schen Anschauungsweise absolut unmöglich erscheint, so ist damit auch die Unhaltbarkeit derselben erwiesen. Es kann also doch wohl nur Selbsttäuschung sein, wenn Hr. Lommel sein System trotzdem mit meinen auch von ihm anerkannten Reflexions- und Brechungsgesetzen für verträglich hält.

b. Anwendung auf Pendel-, Schall- und Electricitätsschwingungen. — Ich schliesse diesen Theil meines Aufsatzes mit einigen Anwendungen des Princips der Wechselwirkung auf langsame Schwingungen. Was insbesondere das Pendel betrifft, so macht sich schon in der Geschichte der Pendeltheorie[1]) die Auffassung geltend, dass man den Einfluss der vom Pendel verdrängten Luft vom Einfluss der seitlich reibenden Luft zu unterscheiden habe. Wenn nichtsdestoweniger in der neueren Akustik nur die Reibung als dämpfende Kraft berücksichtigt und höchstens ihr gegenüber der sogenannte Luftwiderstand als zu vernachlässigende Grösse dargestellt wird, so dürfte das wohl daher rühren, dass die analytische Behandlung der directen Uebertragung von lebendiger Kraft zwischen Pendel oder Tonquelle und Luft ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten zu bieten schien.

Indem ich so hier wieder an das bei meiner ersten Formulirung des Dispersionsgesetzes[2]) angeführte Beispiel vom abklingenden reibungsfreien Gravitationspendel anknüpfe, soll jetzt die Theorie desselben unter folgenden speciellen Voraussetzungen versucht werden. Das Pendel sei eine masselose unendlich dünne Stange, die sich im Aufhängepunkte ohne Reibung drehe und bis zur Pendellinse keine nennenswerthe Luftmasse bewege. Die Linse, eine flache Scheibe, schliesse genau den überall gleichen Querschnitt

1) Vgl. O. E. Meyer, Pogg. Ann. **125.** p. 177. 1865.
2) Ketteler, Wied. Ann. **7.** p. 660. 1879.

eines mit Luft gefüllten unendlich langen Rohres, dessen Axe mit der Richtung der unendlich klein gedachten Excursionen zusammenfalle, und bewege sich in demselben ohne Reibung.

Wird dann dieses Pendel seitens einer äusseren Kraft in einer seiner Extremlagen plötzlich freigelassen, so beginnt eine Reihe von Schwingungen, deren lebendige Kraft durch die Luft des Rohres in der Form von Schallwellen fortwährend weitergeführt wird, bis sie am Ausgangsorte aufgezehrt ist. Das Pendel wird also unter dem Einflusse einer mehr oder minder starken Extinction endlich zur Ruhe kommen.

Wie mir nun scheint, müssen sich die beiden obigen Differentialgleichungen, nämlich:

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2\zeta}{dt^2} + m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2}C' &= e\frac{d^2\zeta}{dz^2} \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2}C + m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2} &= -\varkappa\zeta' \end{aligned}\right\} z = 0,$$

ohne weiteres auf den in Rede stehenden Fall übertragen lassen, sobald man die früheren Attribute der Aethertheilchen auf die Luft und die der Körpertheilchen auf das Pendel bezieht und den ganzen Vorgang der Wechselwirkung an den Pendelort (P) als Coordinatenanfangspunkt ($z = 0$) geknüpft denkt.

Was die bezüglichen Integralausdrücke betrifft, so wird es genügen, dass wir von den beiden Erstreckungen des Rohres nur eine, die positive, in Betracht ziehen. Das Schwingungsgesetz des Pendels wird zuvörderst der Form entsprechen:

$$(26_a)\qquad \zeta' = \mathfrak{A}' e^{-\frac{2\pi}{T}kt} \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \chi'\right),$$

unter k den bezüglichen Extinctions- oder Ausklingungscoëfficienten verstanden.

Die zugehörige Wellenlinie der Luft ergibt sich dann durch folgende Erwägung. Da jeder einzelne Schwingungszustand vom Pendelpunkte P aus mit der gleichen Schallgeschwindigkeit V fortgepflanzt wird, so wird sich das Gesetz der Wellenlinie durch die analoge Function:

$$\zeta = \mathfrak{A}\, e^{-\frac{2\pi}{\lambda} k z'} \cos\left(2\pi \frac{z'}{\lambda} - \chi\right),$$

darstellen lassen, sofern die Abscissen z' von demjenigen Raumpunkte O ab gezählt werden, in welchem sich die zur Zeit $t = 0$ abgegangene Excursion (maxima maximarum) zur Zeit $t = t$ befindet. Fassen wir jetzt einen Raumpunkt M ins Auge, dessen Abscisse $PM = z$ sei, so ist für denselben $OM = OP - MP$ oder $z' = Vt - z$. Setzen wir dies ein und nehmen noch $\chi = 0$, so dürfen wir sonach schreiben:

$$(26_b) \qquad \zeta = \mathfrak{A}\, e^{-2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)k} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Die beiden Ausdrücke (26_a) und (26_b) wandeln nun die Differentialgleichungen (25) um in:

$$\begin{gathered} m\mathfrak{A}\left[(1-k^2)\cos\varphi - 2k\sin\varphi\right] \\ + m'\mathfrak{A}'C'\left[(1-k^2)\cos(\varphi-\chi') - 2k\sin(\varphi-\chi')\right] \\ = m\mathfrak{A}\left[(1-k^2)\cos\varphi - 2k\sin\varphi\right], \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} m\mathfrak{A}\,C\left[(1-k^2)\cos\varphi - 2k\sin\varphi\right] \\ + m'\mathfrak{A}'\left[(1-k^2)\cos(\varphi-\chi') - 2k\sin(\varphi-\chi')\right] \\ = m'\mathfrak{A}'\frac{T^2}{T_0^{\,2}}\cos(\varphi-\chi'), \end{gathered}$$

wo wieder gesetzt ist:

$$\frac{e}{V^2} = m, \qquad \varkappa = \frac{4\pi^2 m'}{T_0^{\,2}}.$$

Aus der ersteren dieser Bedingungsgleichungen ergibt sich, dass für das System „Pendel-Luft" die Constante C' gleich Null ist, und dass folglich Ausdruck (25_b) die Differentialgleichung der Luft an sich befriedigt. Was die zweite betrifft, so lässt sie sich zerfällen in:

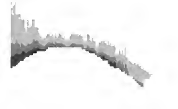
$$m\mathfrak{A}\,C(1-k^2) + m'\mathfrak{A}'\left[(1-k^2)\cos\chi' + 2k\sin\chi'\right] = \frac{T^2}{T_0^{\,2}} m'\mathfrak{A}'\cos\chi'$$

$$-m\mathfrak{A}\,C\,2k + m'\mathfrak{A}'\left[(1-k^2)\sin\chi' - 2k\cos\chi'\right] = \frac{T^2}{T_0^{\,2}} m'\mathfrak{A}'\sin\chi'.$$

Diese letzteren fassen sich dann rückwärts in die bequeme symbolische Form zusammen:

$$(m\mathfrak{A}\,C + m'A')(1 - k\sqrt{-1})^2 = \frac{T^2}{T_0^{\,2}} m'A',$$

und aus ihr zieht man:



$$\frac{m' A}{m \mathfrak{A}} = \frac{C T_0^2 (1 - k\sqrt{-1})^2}{T^2 - T_0^2 (1 - k\sqrt{-1})^2}.$$

Hieraus entwickelt sich schliesslich nach bekanntem Verfahren:

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = \dfrac{C T_0^2 (1 + k^2)}{\sqrt{[T^2 - T_0^2 (1 - k^2)]^2 + 4k^2 T_0^4}} \\ \operatorname{tg}\chi' = - \dfrac{2k\{[T^2 - T_0^2 (1 - k^2)] + (1 - k^2) T_0^2\}}{\sqrt{[T^2 - T_0^2 (1 - k^2)]^2 + 4k^2 T_0^4}}. \end{cases}$$

Betrachtete man bisher die Schwingungsdauer T neben dem Extinctionscoëfficienten k als durch die Beobachtung gegeben, so lässt sich erstere nunmehr auch theoretisch berechnen. Es genügt zu dem Ende die Erwägung, dass, wenn man $m'\mathfrak{A}'/m\mathfrak{A}$ als die Ordinaten einer Curve betrachtet, deren Abscissen die variabel genommen T^2 sind, sich jedem Werthe des erwähnten Arbeitsverhältnisses zwei verschieden grosse T zuordnen. Und da der eine offenbar so wahrscheinlich ist wie der andere und nur eine einzige Schwingungsdauer in Betracht kommt, so wird es diejenige sein, welche dem Maximum der Curve entspricht. Man kann diesen Gedanken auch in die Worte kleiden: Pendel und Luft accommodiren sich bei ihrem Zusammenschwingen so, dass ersteres von seiner Bewegungsquantität möglichst wenig an die Luft abgibt. Demgemäss ergibt sich:

$$(28) \qquad T^2 = T_\mu^2 = T_0^2 (1 - k^2).$$

$$(29) \qquad \frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = C \frac{1 + k^2}{2k}, \qquad \operatorname{tg}\chi' = \frac{1 - k^2}{2k}.$$

Aus der ersteren Gleichung sieht man, dass die Schwingungsdauer T_μ des Systems kleiner ist als die Schwingungsdauer T_0 des isolirten Pendels, und aus der letzten, dass für den Grenzfall einer unendlich geringen Dämpfung durch Luft von unendlich kleiner Dichtigkeit Luft und Pendel einen Phasenunterschied von einer Viertelschwingungsdauer zeigen.

Nunmehr ist es leicht, die Aufgabe noch dahin zu erweitern, dass man zur Dämpfung des Mitschwingens (des Luftwiderstandes) eine Dämpfung der Reibung hinzutreten

lässt. Ergänzt man also die zweite der Gleichungen (25) durch Aufnahme des Gliedes $-\gamma(d\zeta/dt)$ und integrirt mittelst der nämlichen Ausdrücke (26), so findet man leicht:

$$(30)\quad \frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = \frac{C T_0^2 (1+k^2)}{\sqrt{[T^2 - T_0^2(1-k^2) - kGTT_0]^2 + (GTT_0 - 2kT_0^2)^2}}.$$

Die Schwingungsdauer T_μ des Systems ergibt sich daraus mittelst der Beziehung:

$$T^2 = T_\mu^2 = T_0^2(1-k^2) + kGT_\mu T_0$$

und erhält den Werth:

$$T_\mu = T_0\left(-\tfrac{1}{2}kG + \sqrt{1-k^2+\tfrac{1}{4}k^2G^2}\right).$$

Benutzt man dieselbe zur Eliminirung der Reibungsconstanten G, so lässt sich das Verhältniss der Bewegungsquantitäten auf die Form bringen:

$$(31_a)\quad \frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = -\frac{CT_0^2(1-k^2)k}{T_\mu^2 - T_0^2(1+k^2)},$$

dem sich dann der frühere Ausdruck:

$$(31_b)\quad \operatorname{tg}\chi' = \frac{1-k^2}{2k}$$

auch hier zuordnet. Setzt man endlich in der (erweiterten) Differentialgleichung (25_b) von vornherein $C=0$, so ergibt sich:

$$(32)\quad T_\mu'^2 = T_0^2(1+k^2),$$

sodass also die Schwingungen des isolirten Pendels durch Reibung v e r l a n g s a m t werden. Mit Hülfe dieses Ausdrucks lässt sich dann allgemein schreiben:

$$(33)\quad T_\mu^2 = T_0^2(1+k^2) + kT_0(GT_\mu - 2kT_0),$$

sodass für das isolirte Reibungspendel zwischen G und k noch der Zusammenhang besteht:

$$(32_b)\quad k = \tfrac{1}{2}G\frac{T'_\mu}{T_0}.$$

Wie sich insbesondere die beiden Ausdrücke (28) und (32) in ihrer Verschiedenheit experimentell werden prüfen lassen, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Dabei dürfte im allgemeinen das bisher vorausgesetzte Rohr entbehrt werden können. Vorstehende Rechnungen übertragen sich selbstverständlich ohne weiteres auch auf den Fall einer im Aether erlöschenden Lichtquelle. Die ihnen ent-

gegenstehenden und gänzlich abweichenden analogen Entwicklungen Lommel's[1]) sind daher haltlos.

Schliesslich möge hier erwähnt werden, dass sich die Differentialgleichungen ausser durch die reellen Schwingungsausdrücke (26) auch befriedigen lassen durch die complexen Formen:

$$(33)\quad \zeta' = A' \cos 2\pi \frac{t}{T_0(1 - k\sqrt{-1})}, \quad \zeta = \mathfrak{A} \cos 2\pi \frac{t - \frac{z}{v}}{T_0(1 - k\sqrt{-1})}.$$

Im Anschluss an das Bisherige wäre es auch nicht schwierig, den Brechungs- und Extinctionscoëfficienten eines dioptrischen Mittels noch unter der Bedingung zu entwickeln, dass das auf die Vorderfläche einfallende Licht seitens seines Ursprungs mit einem gegebenen Ausklingungscoëfficienten k behaftet wäre. Ich begnüge mich indess mit dieser Andeutung und lasse auch später die entsprechenden Schwächungscoëfficienten des reflectirten und gebrochenen Lichtes ununtersucht.

Noch gibt es eine weitere Klasse von Schwingungserscheinungen, bei welchen ebenfalls eine nachweisbare Wechselwirkung eintritt. Es sind dies diejenigen Schwingungen, die unter dem Einfluss von Inductionsströmen in einem aus schwingenden und ruhenden Rollen zusammengesetzten Stromkreise beobachtet werden, und wo die einzelnen auf Magnete von gleicher oder ungleicher Schwingungsdauer und mit oder ohne Dämpfung einwirken können. Sollten, wie wohl keinem Zweifel unterliegt, die von mir gegebenen Differentialgleichungen sich auch für diese Erscheinungen experimentell verwerthen lassen, so dürften dieselben dann wohl anzuerkennen sein als das allgemeine Gesetz der Wechselwirkung der Schwingungen.

c. Abhängigkeit der Constanten von der Dichtigkeit. Es wird aufgefallen sein, dass alle in den beiden letzten Abschnitten gewonnenen Ausdrücke, ob sie sich auf das System „Pendel-Luft" oder auf die optischen Medien beziehen, eine bemerkenswerthe Verwandtschaft zeigen. Ins-

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 251. 1878.

besondere spielen überall die (maximalen) Bewegungsquantitäten eine hervorragendere Rolle als die (maximalen) lebendigen Kräfte.

Was nun die Abhängigkeit der bezüglichen Constanten von der Dichtigkeit betrifft, so habe ich bereits in Uebereinstimmung mit den Forderungen der Reflexionstheorie einen hierher gehörigen Satz gleich vorn an die Spitze gestellt, den nämlich, dass für optische Mittel Elasticität ($\mathfrak{e}$) und Dichtigkeit (m) des intermolecularen Aethers von der Dichtigkeit (m') des molecularen Gefüges unabhängig seien.

Bezüglich der übrigen Constanten mache ich zunächst die Voraussetzung, dass bei allen Aenderungen des Mittels seine Identität, d. h. seine durch die Kräfte (X/m, X'/m') der Raumeinheit definirte Wesenheit gewahrt bleibe, dass also mit anderen Worten T_m (λ_m) und G feste Werthe behalten.

Dies angenommen, lässt sich dann erstens für beliebige Systeme, deren Bestandtheile ohne Phasenunterschied zusammenschwingen, der Satz hinstellen: Das Verhältniss der einer gegebenen Schwingungsdauer entsprechenden zusammengehörigen Bewegungsquantitäten ist von der Dichtigkeit der einzelnen Bestandtheile unabhängig. In den Formeln kommen nämlich die Amplituden, resp. Componenten derselben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'\cos\Delta$, $\mathfrak{A}'\sin\Delta$ niemals isolirt, sondern stets in Verbindung mit den Massen m, m' vor, und solange daher die möglicher Weise von der Dichtigkeit abhängige Verschiebung $m'\mathfrak{A}'\sin\Delta : m'\mathfrak{A}'\cos\Delta$ für $\Delta = 0$ verschwindet, werden sich in dem Verhältnisse der vollen Bewegungsquantitäten $m'\mathfrak{A}'/m\mathfrak{A}$ die Factoren von Zähler und Nenner so ordnen, dass bei allen Dichtigkeiten (bis zur Grenze der Verdünnung):

$$(34) \qquad \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = \frac{m}{m'} \text{const.},$$

dass also die Amplituden den bezüglichen relativen Dichten umgekehrt proportional sind.

Dieser Satz wird sich aber auch zweitens auf Systeme mit Phasenunterschied ausdehnen lassen, sofern man denselben auf die charakteristische Schwingungsdauer T_μ

bezieht und die eventuellen Aenderungen des Phasenunterschiedes einer besonderen Untersuchung vorbehält.

Wird aber drittens das System von einem ersten Zustand durch ausschliessliche Dichtigkeitsänderungen in einen nahe liegenden zweiten übergeführt, so werden auch die Attribute C, C' diesen Aenderungen entsprechend variiren. Nun lässt sich unschwer zeigen, dass C ausschliesslich von m, C' ausschliesslich von m' abhängt. Heissen daher die Dichtigkeitsänderungen δm, $\delta m'$, und sind α, α' Constanten, so lässt sich schreiben:

$$(35) \qquad \delta C = \alpha \delta m, \qquad \delta C' = \alpha' \delta m',$$

und wenn man integrirt:

$$(35_b) \qquad C = \alpha m, \qquad C' = \alpha' m'.$$

Wenden wir nunmehr diese Sätze auf die früher behandelten Fälle im einzelnen an. Was zunächst das abklingende reibungsfreie Pendel betrifft, so erhielt man p. 415:

$$\frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = C\frac{1+k^2}{2k} \qquad \text{oder:} \qquad \frac{m'\mathfrak{A}'\cos\Delta}{m\mathfrak{A}} = C.$$

Dem Obigen zufolge ist also $\cos\Delta$ oder bei geringer Dämpfung der Abklingungscoëfficient k selbst der Dichtigkeit der mitschwingenden Luft proportional. Eine Folgerung, welche wohl ohne Zweifel durch die Erfahrung bestätigt wird.

Wenn es früher ferner zur Ableitung der Schwingungsdauer T'_μ eines in unendlich dünner Luft schwingenden, mit Reibung behafteten Pendels des Zurückgehens auf die Differentialgleichungen bedurfte, so genügt es nunmehr, in Gl. (31_a) durch Unendlichkleinsetzen von C den Zähler der rechten Seite verschwinden zu lassen, was dann auch ohne weiteres ein Verschwinden des Nenners zur Folge hat. — Für $C = 0$ erscheint das Verhältniss der Bewegungsquantitäten unter der dann zutreffenden Form $0/0$.

In den optischen Medien endlich werden sowohl $m'\mathfrak{A}'/m\mathfrak{A}$ als auch Δ von der Dichtigkeit unabhängig. Man hat nämlich nach p. 408 (Gl. 20 u. 21) die Beziehungen:

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{\Sigma m'\mathfrak{A}'\cos\Delta\, C'}{m\mathfrak{A}}, \quad 2ab = \frac{\Sigma m'\mathfrak{A}'\sin\Delta\, C'}{m\mathfrak{A}},$$

$$\frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}} = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_m^{\ 2}} - 1\right)^2 + G^2 \frac{\lambda^2}{\lambda_m^{\ 2}}}}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{G\frac{\lambda}{\lambda_m}}{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^{\ 2}} - 1},$$

in welchen ausschliesslich die C' veränderlich sind. Macht man Gebrauch von den Gleichungen (35_b), vernachlässigt für mässig durchsichtige und mässig dispergirende Mittel das Quadrat von b und behandelt in dem Producte $2ab$ in Anbetracht der oft geringen Schwankungen von a den Factor $2a$ als nahezu constant, so schreibt sich sonach genähert:

$$(36) \qquad \frac{a^2 - 1}{m'} = \text{const.}, \qquad \frac{b}{m'} = \text{const.},$$

Formeln, von welchen bekanntlich die erstere für den Gaszustand und die zweite für Farbstofflösungen experimentell bestätigt sind.

Im allgemeinen wird sich indess unsere Voraussetzung, dass λ_m und G selbst bei so weitgehenden Dichtigkeitsänderungen, wie etwa beim Uebergang vom einen Aggregatzustand in einen anderen oder auch beim Uebertritt in eine chemische Verbindung identische Werthe haben, unmöglich festhalten lessen. In diesem Falle geht eben das Mittel bei allen successiven Dichtigkeitsänderungen, für deren einzelne die obigen Gleichungen (35):

$$\delta C' = \alpha' \delta m', \qquad [\delta C = \alpha \delta m]$$

nach wie vor bestehen bleiben, in immer andere moleculare Zustände über, sodass damit α' und α ebenfalls Functionen der Dichtigkeit werden und daher nur mehr unbestimmt geschrieben werden kann:

$$C' = \Phi'(m'), \qquad [C = \Phi(m)],$$

wozu dann die weiteren Beziehungen:

$$\lambda_m = f(m, m'), \qquad G = F(m, m')$$

hinzutreten. Aus diesem Grunde mag beispielsweise der Brechungsindex des Wassers unter 4° C. trotz Abnahme der Dichtigkeit continuirlich zunehmen, und mag, wie Landolt und Brühl gezeigt haben, ein und dasselbe chemische Element in seinen verschiedenen Verbindungen andere Molecularconstanten erhalten. Setzt man dann etwa:

$\lambda_m = \Lambda(1 + \sigma_1 m'), \quad G = \Gamma(1 + \sigma_2 m'), \quad C' = \alpha_0' m' (1 + \sigma_3 m'),$
so werden sich diese veränderlichen Glieder in vielen Fällen mit genügender Annäherung zusammenfassen lassen in:

$$(37) \qquad \frac{a^2 - 1}{m'(1 + \beta_1 m')} = \text{const.}, \qquad \frac{b}{m'(1 + \beta_2 m')} = \text{const.},$$

wo β_1, β_2 experimentell zu ermittelnde Constanten sind. Vielleicht dürften diejenigen Empiriker, denen die erste dieser Formen zu verwickelt scheint, das Fruchtlose von Abänderungsversuchen einsehen, wenn sie einmal anfangen wollten, sich auch um die Existenz der zweiten zu bekümmern.

(Schluss im nächsten Heft.)

III. *Ueber die thermoelectrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits* [1]; *von W. G. Hankel.*

Als ich durch die Untersuchung des Topases erkannt hatte, dass die von Hauy ausgesprochene und dann allgemein angenommene Ansicht, wonach nur hemimorphe Krystalle durch Temperaturänderung electrisch zu werden vermöchten, zu eng sei, dass vielmehr alle Krystalle thermoelectrische Spannungen zeigen müssen, soweit nicht die besondere Beschaffenheit ihrer Substanz ein Auftreten und Anhäufen derselben bis zu messbarer Stärke hindern, war es natürlich, dass ich zunächst diejenigen Mineralien einer genaueren Prüfung unterwarf, welche in zahlreichen, möglichst grossen und vollkommenen Krystallen vorkommen. Der weiteren Ausdehnung meiner Untersuchung stellen sich nun immer grössere Schwierigkeiten dadurch entgegen, dass die Mineralien, deren electrisches Verhalten noch zu bestimmen ist, häufig nur in sehr unvollkommenen und kleinen Krystallen existiren, die oft wenig zahlreich und schwer zu er-

1) Vorgetragen in d. Sitz. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. am 14. Nov. 1881.

langen sind. Die Wahl der auf ihre thermoelectrischen Eigenschaften zu prüfenden Krystalle muss daher gar wesentlich durch den Umstand geleitet werden, dass gerade von denselben einigermassen brauchbare Individuen zu erlangen sind. Infolge dessen finden sich in der Abhandlung[1]), welche ich heute der Gesellschaft vorlege, Krystalle der verschiedensten Systeme zusammengestellt.

1. Reguläres System.

Helvin. Der Helvin krystallisirt in Tetraëdern, deren Ecken durch kleine Flächen des Gegentetraëders abgestumpft sind, und stellt sonach eine nach den Eckenaxen des Würfels hemimorphe Form dar. Beim Erkalten[2]) sind die grossen Tetraëderflächen positiv, die durch ihren Durchschnitt gebildeten Kanten, sowie die kleinen Tetraëderflächen aber negativ. Die Polaritäten sind also gerade die entgegengesetzten, als bei den tetraëdrischen Boracitkrystallen; bei diesen fand ich[3]) die Flächen des grossen Tetraëders negativ, die auf den Kanten desselben liegenden Würfelflächen nebst den Flächen des kleinen Tetraëders positiv. Beim Helvin sind die grossen Tetraëderflächen glänzender als die kleinen; bei den tetraëdrischen Boraciten erscheinen umgekehrt die kleinen Flächen glänzender als die grossen. Bei beiden Mineralien herrscht also darin Uebereinstimmung, dass die glänzenderen Flächen positive, die weniger glänzenden aber negative Spannung annehmen.

2. Tetragonales System.

Mellit (Honigstein). Von Krystallen des tetragonalen Systems habe ich früher[4]) den Apophyllit und Idokras auf ihr thermoelectrisches Verhalten untersucht. Bei beiden lagen im Allgemeinen an den Enden der Hauptaxe die posi-

---

1) Seitdem erschienen im 12. Bd. der Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. p. 551—596. Mit 3 Tafeln.

2) Ich führe in dem Folgenden stets nur die beim Erkalten auftretenden electrischen Spannungen an; die beim Erwärmen erscheinenden sind ihrem Vorzeichen nach gerade die entgegengesetzten.

3) Hankel, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 6. p. 151. 1857.

4) Hankel, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 18. p. 260. 1875.

tiven Pole, während die Randkanten und prismatischen Seitenflächen negative Electricität zeigten. Ebenso verhielt sich ein grosser Mellitkrystall: die Enden der Hauptaxe und die anliegenden Flächenstücke waren positiv, die eine infolge ihrer guten Ausbildung zur Beobachtung geeignete Randkante nebst den anliegenden Flächenstreifen negativ.

3. Hexagonales System.

Pyromorphit und Mimetesit. Die beiden sehr nahe verwandten Mineralien (das erstere vorzugsweise phosphorsaures Bleioxyd und Chlorblei, das zweite arsensaures Bleioxyd und Chlorblei) sind mit dem Apatit (phosphorsaurem Kalk mit Fluorcalcium) isomorph; sie stimmen auch in ihrem electrischen Verhalten mit der auf dem grössten Theile der Apatite beobachteten electrischen Vertheilung überein. Die Enden der Hauptaxe (Endflächen und umliegende Pyramidenflächen) sind positiv, die seitlichen Prismenflächen negativ.

Eine Eigenthümlichkeit zeigt sich bei den Mimetesitkrystallen darin, dass die Prismenflächen, mit denen oder in deren Nähe sie aufgewachsen gewesen, nicht negative, sondern positive Spannung besitzen. Sie gleichen darin gewissen gelben und grünen Beryllen[1]), bei welchen ebenfalls auf einer oder zwei Prismenflächen in mehr oder minder grosser Ausdehnung positive anstatt negativer Polarität auftritt.

Phenakit. Die Krystalle des Phenakits gehören zur rhomboëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung des hexagonalen Systems. Bei einem ziemlich gut ausgebildeten Krystalle von Framont in Lothringen fand sich am Ende der Hauptaxe und auf den umliegenden Rhomboëderflächen positive, auf den prismatischen Seitenflächen negative Electricität. Damit stimmte auch die auf einem Bruchstücke eines vom Ilmengebirge stammenden Krystalles beobachtete electrische Vertheilung im Allgemeinen überein. Auf grossen Krystallen aus den Smaragdgruben bei Katharinenburg (Ural), die zum Theil noch mit einer dünnen Lage von Glimmerschiefer be-

1) Hankel, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 18. p. 238. 1875.

deckt waren, liess sich die Lage der Pole nicht mit Sicherheit bestimmen.

Pennin. Die Krystalle des Pennins werden seitlich entweder nur von den Flächen des Hauptrhomboëders R, oder auch von den Flächen des Gegenrhomboëders $-R$ begrenzt und tragen an den Enden der Hauptaxe kleine Flächen $0R$. Da der Pennin in der Richtung der letztgenannten Flächen sehr vollkommen spaltbar ist, so sind die meisten Exemplare an ihren Enden durch diese Durchgänge begrenzt. Während bei den vorhergehenden Mineralien die Enden der Hauptaxe positiv und die seitlichen Flächen negativ waren, sind beim Pennin die Endflächen $0R$ negativ, und die seitlichen Flächen ($+R$, und auch $-R$) positiv. Dabei zeigt sich auch hier wieder die Eigenthümlickeit, dass einzelne seitliche Flächen nicht positive, sondern negative Polarität annehmen; jedoch lässt sich bei der jetzt vorliegenden Begrenzung der Krystalle nicht erkennen, ob diese Abweichung zu der Stelle, mit welcher der Krystall ursprünglich angewachsen gewesen ist, in Beziehung steht. Welche Polarität auf den am oberen und unteren Ende vorhandenen Durchgangsflächen auftritt, hängt von ihrer Lage zum ganzen Krystalle ab. Liegt ein solcher Durchgang nahe am natürlichen Ende, so ist er noch negativ, wenn auch schwächer als die ausgebildete Endfläche $0R$; je weiter er sich von diesem Ende entfernt, um so mehr nimmt die negative Spannung ab und geht bei einem gewissen Abstande in die positive über. .

Dioptas. Nimmt man das Rhomboëder, nach welchem der Dioptas vollkommen spaltbar ist, als Grundrhomboëder R, so werden die Krystalle desselben gewöhnlich von den Flächen $\infty P2$ und $-2R$ begrenzt. Zu ihnen treten bisweilen noch Flächen eines Rhomboëders dritter Ordnung hinzu, sodass die Krystalle der rhomboëdrisch-tetartoëdrischen Atheilung des hexagonalen Systems angehören. Die Feststellung des thermoelectrischen Verhaltens des Dioptases wird durch den Mangel an ringsum vollkommen ausgebildeten Krystallen erschwert. Die von mir untersuchten bestanden meist aus mehreren, nicht in paralleler Stellung verwachsenen, grösseren

oder kleineren Individuen. Aus der Gesammtheit aller Beobachtungen ergibt sich jedoch, dass die Enden der Hauptaxe und die umliegenden Rhomboëderflächen negativ, die Prismenflächen dagegen positiv sind, wobei indess, ebenso wie beim Pennin, der Fall eintritt, dass einzelne Prismenflächen negativ erscheinen. In welcher Beziehung diese letzteren Flächen zu der ursprünglichen Anwachsungsstelle stehen, liess sich bei der gegenwärtig vorliegenden Begrenzung nicht ermitteln. Eine Bruchfläche am Ende der Hauptaxe, die nicht allzu nahe dem natürlichen Ende gelegen hat, nimmt stets positive Spannung an.

4. Rhombisches System.

Strontianit, Witherit und Cerussit (Weissbleierz). Die Krystalle der drei genannten Mineralien sind mit denen des Aragonits isomorph, jedoch stimmt in Betreff der Zwillingsbildung der Strontianit mit dem Aragonit viel mehr überein, als der Witherit und Cerussit.

Die Krystalle des Strontianits gleichen im Allgemeinen den böhmischen Aragoniten, stellen also prismatische von ∞P und $\infty \breve{P} \infty$ gebildete, am oberen Ende Flächen von P und $\breve{P} \infty$ tragende Säulen dar, die aber vielfach Zwillingslamellen (wobei ∞P die Zwillingsfläche) einschliessen. Beim Erkalten treten an den Enden der Hauptaxe und der Brachydiagonale die positiven, an den Enden der Makrodiagonale (also auf den Flächen $\infty \breve{P} \infty$) die negativen Pole auf. Mit diesen böhmischen Aragoniten stimmen nun sowohl in der Gestalt als auch in der electrischen Vertheilung die Strontianitkrystalle von Drensteinfurt überein.

Während bei dem Aragonite und Strontianite prismatische Formen vorherrschen, bilden die Witherite und Cerussite (von Wolfach in Baden) scheinbare sechsseitige Pyramiden, welche man früher als von den Flächen P und $2\breve{P}\infty$ gebildet annahm. Sénarmont hat jedoch durch optische Untersuchung gezeigt, dass die sechsseitige Pyramide des Witherits als ein Sechsling[1]) aufzufassen ist, sodass

1) In der Abhandlung weise ich nach, dass ein grosser von mir untersuchter Witheritkrystall aus sieben Individuen gebildet ist, weil sonst

sämmtliche Pyramidenflächen von den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ gebildet werden. Wären die scheinbaren Pyramiden eine Combination von P und $2 \breve{P} \infty$, so müsste an dem Ende der Brachydiagonale positive, und nur auf den an den Enden der Makrodiagonale gelegenen Kanten negative Polarität auftreten. Die Beobachtung ergibt aber nur die Enden der Hauptaxe und die anliegenden Flächenstücke positiv, dagegen sämmtliche Randkanten nebst ihren Umgebungen negativ, was in voller Uebereinstimmung mit der von Sénarmont aufgestellten Zusammensetzung ist.

Bei dem Cerussit ist es mir nur gelungen, auf den Krystallen von Wolfach nicht unbeträchtliche electrische Spannung wahrzunehmen. Diese den Witheriten gleichenden Krystalle zeigen nun positive Electricität auf den Enden der Hauptaxe; die Mittelkanten und die anliegenden Stücke der Pyramidenflächen sind negativ. Auf einigen Eckpunkten der Basis und einem Theile der Polkanten wird schwache positive, auf anderen gar keine oder schwache negative Spannung gefunden. Diese Vertheilung ist nur erklärlich, wenn wir diesen Cerussit ebenso wie den Witherit als einen Sechsling auffassen. In den Eckpunkten der Basis und in den Polkanten treten gewissermassen Durchschnitte der zur Brachydiagonale gehörigen Flächen an die Oberfläche und bedingen daher an mehreren dieser Stellen positive Polarität.

5. Monoklines System.

Euklas. Die Krystalle des Euklases sind parallel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte vollkommen spaltbar; sie gleichen in dieser Beziehung also dem Gypse. Mit diesem letzteren Minerale stimmen sie nun auch in ihrem thermoelectrischen Verhalten überein. An den Enden der verticalen Axe und der Klinodiagonale liegen die positiven, an den Enden der Orthodiagonale die negativen Pole. Wird jedoch ein Krystall in der Mitte parallel dem vollkommensten Durchgange zersprengt, so zeigen die Durchgangsflächen, ebenso wie beim Gypse, positive Spannung. Wenn ein Ende der

---

der auf einer Fläche vorhandene einspringende Winkel mit einer kammförmigen Naht nicht erklärlich wäre.

verticalen Axe verbrochen ist, so erscheint auf ihm, wenn die Bruchfläche nicht zu nahe am natürlichen Ende liegt, anstatt der positiven die negative Polarität.

Titanit. Gegenüber den im Vorhergehenden behandelten Krystallen sind die Titanite dadurch ausgezeichnet, dass sie in meist vollständig ausgebildeten Exemplaren vorkommen, und dass ausser einfachen Krystallen sich auch sehr häufig Zwillinge finden, bei denen die beiden Individuen entweder nur aneinander oder auch durcheinander gewachsen sind.

Die an einfachen Krystallen sehr gewöhnlich auftretende Combination besteht aus 0P, ∞P, P̶∞ und ½P̶∞. Meistens sind diese Krystalle nur dünne Tafeln, weil die Flächen ½P̶∞ sehr ausgedehnt, die Flächen ∞P aber sehr niedrig auftreten. An den Enden der Orthodiagonale finden sich öfter noch die Flächen ⅔P̶2 und 4P̶4; bisweilen wachsen die Flächen 4P̶4 derartig an Grösse, dass die Flächen ∞P fast verschwinden, und der Krystall dann ein schiefliegendes, von den Flächen 4P̶4 gebildetes Prisma darstellt, auf dessen klinodiagonalen Kanten die Flächen 0P, ½P̶∞ und P̶∞ liegen.

Die electrische Vertheilung auf diesen Krystallen ist, wenn sie nach einer Erhitzung bis zu 100° C. erkalten, sehr regelmässig. An den Enden der verticalen Axe und der Orthodiagonale liegen die positiven, an den Enden der Klinodiagonale die negativen Pole.[1]) Es sind also die Flächen 0P positiv, und diese positive Polarität breitet sich je nach den Umständen mehr oder weniger auf die benachbarten Theile der Flächen ½P̶∞ und P̶∞ aus; die übrigen Theile der Flächen ½P̶∞ und P̶∞ zeigen negative Polarität. Sind die Krystalle sehr dünn und besitzen infolge der grossen Ausdehnung von ½P̶∞ eine rhombische Form, so tritt an den spitzen Enden der Orthodiagonale die positive Spannung nur

1) Bereits in meiner Habilitationsdissertation vom Jahre 1840 habe ich die positiven Pole an den Enden der verticalen Axe und die negativen an den Enden der Klinodiagonale angegeben. Die positiven Pole an den Enden der Orthodiagonale konnte ich bei dem damals angewandten Beobachtungsverfahren nicht wahrnehmen.

schwach auf, wird auch wohl durch die auf den Flächen $\frac{1}{2}P\infty$ vorhandene negative verdeckt. Wenn aber durch das Auftreten der Flächen $4P4$ an den Enden der Orthodiagonale etwas längere Kanten entstehen, so zeigt sich daselbst starke positive Electricität.

Ich habe in meinen Untersuchungen über das thermoelectrische Verhalten des Aragonits und des Orthoklases gezeigt, dass durch die Zwillingsbildung die thermoelectrische Vertheilung auf den Krystallen nicht geändert wird. Dies gilt auch im allgemeinen von den Berührungs- und Durchwachsungszwillingen des Titanits; nur in dem Falle, wo die beiden den Zwilling bildenden Individuen ungleiche Dicke haben, treten bei den Berührungszwillingen eigenthümliche Störungen in der normalen Vertheilung ein.

Schon in meiner Habilitationsschrift (1840) habe ich erwähnt, dass bei den Titanitkrystallen ebenso wie bei den Boraciten in höheren Temperaturen die Pole ihre electrische Beschaffenheit umkehren. Auf allen Krystallen, bei welchen durch die Flächen $4P4$ an den Enden der Orthodiagonale etwas längere Kanten gebildet werden, lässt sich die Umkehrung in den auf diesen Kanten gelegenen Polen stets beobachten, und die Temperatur, bei welcher dieser Wechsel in der Polarität eintritt, liegt nahe bei 112° C. Werden also die bezeichneten Titanitkrystalle bis 210° C. erhitzt, so zeigen die Enden der Orthodiagonale beim Beginn der Abkühlung negative Spannung, die ein Maximum erreicht, wieder abnimmt und schliesslich in die positive übergeht. Während die Umkehrung in den Polen an den Enden der Orthodiagonale stets deutlich hervortritt, lassen sich die entsprechenden Wechsel in den im klinodiagonalen Hauptschnitte liegenden Polen weniger gut beobachten; oft gelingt dies nur an dem einen oder dem anderen Pole, während die übrigen beim Beginne der Abkühlung unelectrisch erscheinen und später dann die gewöhnliche Polarität zeigen.

IV. *Ueber die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft eines reversiblen Elementes von dem Druck, welcher auf die Flüssigkeit des Elementes ausgeübt wird; von F. Niemöller.*

In Folgendem soll eine Formel für die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft eines reversiblen Elements von dem auf der Flüssigkeit lastenden Drucke entwickelt werden, welche freilich kaum eine experimentelle Bestätigung finden dürfte, da die Aenderung der Kraft nur für bedeutende Druckkräfte messbar, aber theoretisch nicht ohne Wichtigkeit ist.

Dass eine solche Abhängigkeit existiren muss, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Flüssigkeit eines Elements um so weniger zusammendrückbar ist, je mehr Salz sie enthält. Wenn der Strom nun z. B. beim Durchgang durch das Element Salz bildet, während die Flüssigkeit einem hohen Druck ausgesetzt ist, so wird die Flüssigkeit wegen des sich neu bildenden Salzes eine stärkere Elasticität bekommen, sie wird sich ausdehnen und dabei Arbeit leisten. Diese Arbeit fällt fort, wenn die Lösung keinem äusseren Druck ausgesetzt ist. Es muss demnach unter hohem Druck wegen der hinzukommenden Ausdehnungsarbeit die electromotorische Kraft geringer sein, als unter normalem Atmosphärendruck, wenigstens bei den Elementen mit einer Flüssigkeit, wo der Strom der Kette Salz bildet.

Eine solche reversible Kette ist die von Hrn. Helmholtz[1]) angegebene Chlorzink-Calomelkette; die Anode ist Calomel auf Quecksilber, die Kathode amalgamirtes Zink, die Flüssigkeit eine Lösung von Zinkchlorid. Der vom Element erzeugte Strom bildet Zinkchlorid, welches sich in der nicht gesättigten Flüssigkeit auflöst.

Es sei s das Gewicht des Salzes, w das des Wassers in der Flüssigkeit der Kette, v das Volumen, π der Druck, ϑ die absolute Temperatur, welche constant erhalten werde.

---

1) Helmholtz, Berl. Ber. 1882. p. 22.

Ferner bezeichne F die freie Energie[1]) der Flüssigkeit, welche Function von w, s, v oder π und von ϑ ist.

Wie Hr. Helmholtz gezeigt hat, stellt bei allen in constanter Temperatur vorgehenden Uebergängen die Function F die potentielle Energie des Systems dar. Nimmt also das Volumen um dv zu, so nimmt F um $(\partial F/\partial v)\,dv$ ab, die geleistete äussere Arbeit ist πdv, also ist:

$$(1) \qquad -\frac{\partial F}{\partial v} = \pi .$$

$-(\partial F/\partial s)\,ds$ ist die Arbeit, welche die Salzlösung leisten kann, wenn die Salzmenge ds hinzutritt. — Es gehe nun während der Zeiteinheit ein Strom J durch das Element, die magnetische Stromeinheit scheide in der Zeiteinheit (Secunde) die Salzmenge q aus, so ist die äussere Arbeit, welche die Lösung während dieses reversiblen Vorganges verrichtet, gleich $-(\partial F/\partial s)\,qJ$.

Ist aber A der Theil der electromotorischen Kraft, welcher von der Concentration abhängt, so ist AJ die Stromarbeit in der Secunde. Da nun die Abnahme der freien Energie der Lösung gleich dieser Stromarbeit sein muss, so ist unter Weglassung des Factors J:

$$(2) \qquad -\frac{\partial F}{\partial s} \cdot q = A .$$

A ist in magnetischem Maass auszudrücken.

Aus den Gleichungen (1) und (2) muss man F eliminiren. Wir brauchen dazu noch eine Beziehung zwischen v und π. Ist v_0 das Volumen der Flüssigkeit beim Druck Null, so ist $v = v_0(1 - \mu\pi)$, wo μ eine (kleine) von der Concentration abhängige Constante ist. Dadurch geht (1) über in:

$$(1_a) \qquad -\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{v_0 - v}{\mu v_0}.$$

Wir setzen noch $w/s = h$, so ist μ blos Function von h. Differenziren wir (2) nach v und (1_a) nach s, so folgt:

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{(v_0 - v)\,q h}{v_0 \mu^2 s} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h}.$$

Da: $$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial v} = -\frac{1}{\mu v_0} \cdot \frac{\partial A}{\partial \pi}$$ ist,

1) Helmholtz, l. c.

so ist: $$\frac{\partial A}{\partial \pi} = - \frac{\pi q h v_0}{s} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h}.$$

Ist σ das specifische Gewicht der Lösung, so ist:

$$\sigma v_0 = w + s = s(1 + h),$$

also endlich:

(3) $$\frac{\partial A}{\partial \pi} = - \frac{\pi q h (1 + h)}{\sigma} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h}.$$

Durch Integration folgt aus (3), wenn noch A_0 die electromotorische Kraft beim Druck Null ist:

(4) $$A = A_0 - \frac{\pi^2 q h (1 + h)}{2\sigma} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial h}.$$

Die Aenderung der electromotorischen Kraft ist also dem Quadrate des Druckes proportional.

Um wenigstens die Grössenordnung der Aenderung festzustellen, benutzen wir die Angabe, dass bei einer Lösung von gleichen Gewichtstheilen Wasser und Schwefelsäure $(h = 1)\, \partial \mu / \partial h$ etwa $= 10^{-5}$ ist, wenn der Druck in Atmosphären angegeben wird. Rechnen wir aber mit absoluten Maassen unter Zugrundelegung der Einheiten Millimeter, Milligramm, Secunde, und ist der Druck gleich P Atmosphären, so ist: $\pi = 1{,}033 \,.\, 9811 \,.\, 10^6 \,.\, 10^{-2}\, P$ oder:

$\pi = 1{,}013 \,.\, 10^8\, P$, demnach ist:

$\frac{\partial \mu}{\partial h} = \frac{10^{-5}}{1{,}013 \,.\, 10^8}$, nehmen wir $q = \frac{1}{10}$ mg an und $\sigma = 1$,

so ist die Abnahme gleich $100\, P^2$, und in Daniell ausgedrückt etwa gleich $P^2/10^9$.

Da man nach der Angabe von Hrn. Helmholtz mit einem sehr empfindlichen Galvanometer noch Unterschiede von einem Milliontel der Kraft eines Daniell'schen Elementes nachweisen kann, so würde sich die Abnahme der Kraft bei einem Druck von 30 bis 40 Atmosphären zeigen.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine reversible Kette mit einer Flüssigkeit, deren Electroden aus gleichem Metall bestehen, demselben, welches auch in der Flüssigkeit aufgelöst ist. (Kupferplatten in Kupfersulfat). An der Anode sei die Lösung verdünnter als an der Kathode. Dann geht

nach Helmholtz[1]) ein Strom durch die Flüssigkeit von der verdünnten Lösung zur concentrirten.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die beiden Electroden sich in Bechern A und K befinden, welche durch einen Heber verbunden sind. F_a sei die freie Energie der verdünnten Lösung im Becher A, $F_\varkappa$ die der concentrirten Lösung in K. Ferner nehmen wir an, dass die Ueberführungszahl n des Kations von der Concentration unabhängig sei; geht dann in der Zeiteinheit die Stromeinheit durch das Element, so bleibt im Heber die Concentration ungeändert, die Salzlösung in A wird um $q(1-n)$ mg Salz reicher, während ebensoviel Salz aus K entfernt wird.

$$-\frac{\partial F_a}{\partial s}q(1-n)+\frac{\partial F_\varkappa}{\partial s}q(1-n)$$

ist die äussere Arbeit, welche die Lösungen in beiden Bechern leisten, wenn die Electricitätsmenge Eins übergeht. Andererseits wird diese Arbeit gemessen durch die electromotorische Kraft des Elements, woraus die Gleichung folgt:

$$(5)\qquad A=q\,(1-n)\left(\frac{\partial F_a}{\partial s}-\frac{\partial F_\varkappa}{\partial s}\right).$$

Beide Energien sind noch Functionen des Druckes π. Nach (1) ist $\partial F/\partial v=-\pi$, also ist $\partial F/\partial\pi=\partial F/\partial v\,.\,\partial v/\partial\pi=-\pi\cdot-\mu v_0=\mu\pi v_0$; die Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{\partial F}{\partial\pi}=\mu\pi v_0$$

gilt für jede der beiden Flüssigkeiten.

Differenziren wir (5) nach π und benutzen (6) zur Elimination von F, so folgt:

$$(7)\qquad \frac{\partial A}{\partial\pi}=-\pi q\,(1-n)\left\{\frac{h(1+h)}{\sigma}\cdot\frac{\partial h}{\partial\pi}\right\}_\varkappa^a;$$

in dieser Formel ist die eingeklammerte Grösse für beide Lösungen zu bilden und die Differenz zu nehmen.

Ist die Ueberführungszahl n von der Concentration abhängig, so ist:

$$(8)\qquad \frac{\partial A}{\partial\pi}=-\pi q\int_\varkappa^a(1-n)\frac{d}{dh}\left(\frac{h(1+h)}{\sigma}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial h}\right)dh,$$

1) Helmholtz, Wied. Ann. 3. p. 201. 1878.

wie man findet, wenn man die Energie der Lösung in dem die Gläser verbindenden Heber mit in Rechnung zieht.

Hat das reversible Element zwei verschiedene Flüssigkeiten, wie z. B. in der Combination: (Zn, $ZnSO_4$|$CuSO_4$, Cu), so gilt die Formel:

$$(9) \qquad \frac{1}{n}\frac{\partial A}{\partial n} = \varphi_x - \varphi'_a - \varphi_m + \varphi'_m,$$

wenn φ den Ausdruck $[q(1-n)h(1+h)] / \sigma . \partial\mu / \partial h$ für die Flüssigkeit an der Kathode und φ' denselben Ausdruck für die Flüssigkeit an der Anode, m aber die Stelle bezeichnet, wo die Flüssigkeiten aneinander grenzen.

Leipzig, im November 1882.

V. *Zur Bestimmung der Windungsfläche einer Drahtspule; von F. Himstedt.*

(Aus den Berichten über die Verhandl. d. naturforsch. Ges. zu Freiburg i. B. 8. 2 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Hr. F. Kohlrausch hat kürzlich[1]) eine sehr einfache Methode angegeben, die Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege zu bestimmen, und zugleich die Brauchbarkeit derselben durch angestellte Messungen erwiesen.

Die Wichtigkeit einer solchen Methode liegt auf der Hand. Abgesehen von manchen anderen Aufgaben erfordern alle Methoden, welche für die Bestimmung der absoluten Widerstandseinheit vorgeschlagen sind, die Auswerthung einer Windungsfläche. Dass diese auf dem Wege der directen Messung etwa der Drahtlänge oder der Radien der einzelnen Windungslagen nicht mit jener Genauigkeit erfolgen kann, deren die übrigen Theile einer absoluten Widerstandsmessung fähig sind, ist allgemein anerkannt[2]), dagegen darf man wohl hoffen, auf dem von Hrn. Kohlrausch eingeschlagenen Wege[3]) eine solche Genauigkeit zu erreichen.

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 6. Sept. 1882. p. 654.

2) Vgl. die Angaben hierüber bei Kohlrausch l. c. p. 654.

3) Bosscha hat schon früher das Gegeneinanderschalten zweier Spu-

Es wird deshalb nicht überflüssig erscheinen, wenn ich hier eine ähnliche Methode kurz beschreibe, die ich gelegentlich einer früheren Arbeit[1]) schon anzuwenden versucht, damals aber nicht veröffentlicht habe, weil für die definitiven Messungen eines homogen magnetischen Feldes, um die es sich handelte, eine einfachere Methode gefunden wurde.

Die zu beschreibende Methode stimmt mit der von Hrn. F. Kohlrausch gegebenen darin überein, dass die Auswerthung der Windungsfläche durch die Vergleichung mit der Fläche eines einfachen Kreisringes geschieht, verdient aber vor dieser vielleicht insofern den Vorzug, als bei ihr nur Winkelmessungen mit Fernrohr und Spiegelablesung nöthig sind.

Hängt man die Drahtspule bifilar so auf, dass in der Ruhelage ihre Axe horizontal und senkrecht zum magnetischen Meridian ist, so bewirkt ein hindurch geleiteter Strom eine Ablenkung, und bezeichnet:

J die Intensität des Stromes,
F die gesuchte Windungsfläche,
T die Horizontalintensität des Erdmagnetismus,
D die Directionskraft der bifilaren Suspension,
Φ den Ablenkungswinkel, so besteht die Gleichung:

(1) $$JFT \cos \Phi = D \sin \Phi.$$

Wird ein einfacher Drahtkreis ebenfalls bifilar aufgehängt, so gilt bei analoger Bezeichnung:

(2) $$ifT \cos \varphi = d \sin \varphi,$$ woraus folgt:

(3) $$\frac{F}{f} = \frac{i}{J} \cdot \frac{D}{d} \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} \varphi},$$

vorausgesetzt, dass T in beiden Fällen dasselbe ist. Misst man die Stromintensitäten mit demselben Galvanometer, und ist auch hier wieder beide mal T dasselbe, so wird:

len in ihrer Wirkung auf denselben Magnet benutzt, um die von den Spulen auf den Magnet ausgeübten Drehungsmomente miteinander zu vergleichen. Wiedemann, Galv. **2.** (1) p. 282. Pogg. Ann. **93.** p. 392. 1854. Dieselbe Methode für die Bestimmung des Drehungsmomentes einer Spule durch Vergleichung derselben mit einer solchen von bekanntem Drehungsmomente (standard coil) findet sich Maxwell, Treatise etc. II. Art. p. 754. 1873.

1) Himstedt, Wied. Ann. **11.** p. 812. 1880.

$$\frac{i}{J} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} A},$$

α und A die Ausschläge des Galvanometers. Es bleibt dann also nur die Grösse D/d zu bestimmen.

Selbstverständlich kann dies in der Weise geschehen, dass D und d jedes für sich entweder durch directe Messung und Wägung gefunden werden oder durch Bestimmung der Trägheitsmomente und der Schwingungsdauern ohne Strom, allein auf diese Weise entstehen so viele neue Fehlerquellen, dass sich dies Verfahren kaum empfehlen dürfte.

Man kann aber leicht zwei Anordnungen der Versuche angeben, durch welche die Directionskräfte eliminirt werden.

Erstens. Man macht das Gewicht der Drahtspule gleich dem des Drahtkreises und richtet die Bifilarsuspensionen so ein, dass man leicht die Spule und den Drahtkreis abhängen und sie miteinander vertauschen kann, sodass dann die Spule an den Suspensionsdrähten hängt, an welchen vorher der Drahtkreis war und umgekehrt. Bezeichnen Φ und φ wieder die Ablenkungswinkel bei der ersten Aufhängung, Ψ und ψ dieselben nach dem Umhängen, so erhält man die folgenden Gleichungen:

(1) $JFD\cos\Phi = D\sin\Phi$, (3) $ift\cos\varphi = d\sin\varphi$,

(2) $JFT\cos\Psi = d\sin\Psi$, (4) $ift\cos\psi = D\sin\psi$,

aus denen leicht ersichtlicher Weise gefunden wird:

$$\frac{F^2}{f^2} = \frac{j^2}{J^2}\frac{\operatorname{tg}\Phi\operatorname{tg}\Psi}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}; \tag{5}$$

Als specieller Fall steckt hierin der, dass man nur eine Drahtsuspension benutzt und abwechselnd die Spule und den Ring anhängt.

Zweitens. Man hängt die Spule und den Drahtkreis beide zusammen zu gleicher Zeit an dieselben Suspensionsdrähte und leitet denselben Strom durch beide hintereinander, und zwar das eine mal in Spule und Ring gleichgerichtet, das andere mal entgegengesetzt gerichtet.

Die Gleichungen werden dann:

$$J(F+f)\,T\cos\Phi = D\sin\Phi, \tag{1}$$

$$J'(F-f)\,T\cos\Phi' = D\sin\Phi \tag{2}$$

und hieraus:

$$\frac{F+f}{F-f} = \frac{J' \operatorname{tg} \Phi}{J \operatorname{tg} \Phi'} = \frac{\operatorname{tg} A' \operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} \Phi'}, \tag{3}$$

wenn wieder angenommen wird, dass die Stromintensität beide mal mit demselben Galvanometer gemessen wird und die beiden Ablesungen so schnell hintereinander gemacht werden, dass T inzwischen sich nicht ändert.

Diese zweite Methode scheint mir besonders einfach und empfehlenswerth. Man ist vollständig unabhängig von der Suspension und hat im ganzen nur vier Winkel zu messen, eine Aufgabe, die bekanntlich mit sehr grosser Genauigkeit gelöst werden kann.

Beobachtungen.

Um die zweite Methode durch den Versuch erproben zu können, habe ich nach ihr die Windungsfläche einer Drahtspule bestimmt, die nur eine Windungslage besass, also auch durch directe Messung mit grösserer Genauigkeit ermittelt werden konnte. Ich liess aus Hartholz zwei Cylinder drehen, beide von gleicher Höhe, den einen aber von nahezu doppeltem Radius als den anderen. Der erstere wurde ferner so zu einem Hohlcylinder ausgebohrt, dass der zweite bequem in jenen hineingeschoben werden konnte. Wurden dann auf die Grundflächen gut ebene Bretter geschraubt, so waren damit beide Cylinder zu einem unveränderlichen System vereinigt, und man war zugleich sicher, dass die Drahtwindungen beider stets in parallelen Ebenen sich befanden.[1]) In die Mitte des Mantels des Cylinders von kleinerem Radius wurde eine Nute von 10 mm Breite und circa 2 mm Tiefe gedreht, sodass genau zwanzig Windungen eines übersponnenen Drahtes von 0,5 mm Durchmesser hineinpassten. Ehe der Draht aufgewickelt wurde, wurden auf der Fläche der Nute in gleichen Abständen neun

1) Eine kleine Neigung der Windungsebene der Spule gegen die des Ringes zieht übrigens nur einen sehr kleinen Fehler nach sich, denn das wahre Verhältniss F/f geht dann über in $F/f . \cos \nu$, wenn ν der Neigungswinkel, und beträgt der Fehler für $\nu = 2\frac{1}{2}{}^0$ erst 0,0001 des ganzen Werthes. Dieselbe Fehlerquelle kann übrigens auch bei der Kohlrausch'schen Methode auftreten.

feine Touchestriche gezogen, indem die Rolle dabei mittelst der Drehbank gedreht wurde. Dann der Umfang dieser neun Kreisringe einzeln bestimmt in ähnlicher Weise wie bei H. Weber[1]), nur wurde statt der Papierstreifen Messingdraht von $^1/_{10}$ mm Durchmesser benutzt, der über leicht bewegliche Rollen laufend stets durch dasselbe Gewicht gespannt gehalten wurde. War der Draht um einen Toucherring einmal herum gelegt, so wurde ein feiner Messerstrich über zwei neben einander liegende Stellen gemacht, die Spule wieder rückwärts gedreht und der Abstand der beiden Marken auf dem Drahte mit dem Kathetometer gemessen. Jede Messung wurde zweimal gemacht, und ergaben sich für die Umfänge die Werthe in Millimetern:

369,9 370,0 370,1 370,1 370,0 370,0 370,0 370,2 370,2
Mittel: 370,06.

Da der übersponnene Draht einen Durchmesser von 0,5 mm hatte und in zwanzig Windungen umgelegt war, so ergibt sich die Windungsfläche:

$$F = 219810 \text{ qmm}.$$

In derselben Weise wurde die Fläche eines einmal um den grösseren Cylinder gelegten Drahtringes gefunden:

$$f = 46322 \text{ qmm}.$$

Um das Hinter-, resp. Gegeneinanderschalten der Spule und des Drahtringes leicht bewerkstelligen zu können, und um beide ausschalten zu können, um den Einfluss des Stromes in den Zuleitungsdrähten (Bifilarsuspension und Verbindungsstücke) zu messen, waren in dem Holze der Rollen im ganzen sechs Quecksilbernäpfchen angebracht, und das Umschalten geschah in sehr leichter Weise durch das Umlegen kleiner Drahtverbindungsstücke, was bei einiger Vorsicht ausgeführt werden konnte, ohne dass der Apparat dadurch merklich erschüttert wurde. Bezeichne ich die von den Zuleitungsdrähten umschlossene wirksame Stromfläche mit d, so gelten, je nachdem die Spule und der Drahtring hinter oder gegen einander oder aber ausgeschaltet sind, die Gleichungen:

1) H. Weber, Der Rotationsinductor, seine Theorie und Anwendung zur Bestimmung des Ohms in absolutem Maasse, Teubner, Leipzig 1882.

$$J\,(F+f+d)\,T\cos\Phi = D\sin\Phi$$
$$J'(F-f+d)\,T\cos\Phi' = D\sin\Phi'$$
$$J''\,d\,T\cos\Phi'' = D\sin\Phi''$$

Wird $J = R\ \mathrm{tg}\ A$ gesetzt, so erhalten wir:

$$F+f:F-f=\frac{\mathrm{tg}\,\Phi}{\mathrm{tg}\,A}-\frac{\mathrm{tg}\,\Phi''}{\mathrm{tg}\,A''}:\frac{\mathrm{tg}\,\Phi'}{\mathrm{tg}\,A'}-\frac{\mathrm{tg}\,\Phi''}{\mathrm{tg}\,A''}.$$

Als Stromquelle wurde bei den Versuchen ein Bunsen'sches Element benutzt. Ein in den Stromkreis eingeschalteter Widerstandssatz und ein Neumann'scher Rheostat ermöglichten es, mit genügender Genauigkeit für die zusammengehörenden Beobachtungen $A = A' = A''$ zu machen, und wegen der geringen Grösse von Φ'' konnte dann für die Berechnung gesetzt werden:

$$F+f:F-f=\mathrm{tg}\,(\Phi-\Phi''):\mathrm{tg}\,(\Phi'-\Phi'').$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass Spule und Galvanometer einen solchen Abstand voneinander besassen (circa 7 m), dass sie sich nicht gegenseitig beeinflussten.

Die Ablenkungen der Spule wurden durch Beobachtung der Umkehrpunkte des schwingenden Apparates gewonnen. Die Schwingungsdauer betrug circa 20 Sec., und konnte zwischen zwei Umkehrpunkten jedesmal bequem die Einstellung am Galvanometer abgelesen werden. Ich theile im Folgenden die Einzelbeobachtungen eines Versuches mit. Der Scalenabstand bei der Spule betrug 3138 mm, bei dem Galvanometer 1630 mm. Die Mitte der Scala des bei der Spule benutzten Fernrohrs war mit 0 bezeichnet, die des vor dem Galvanometer stehenden mit 500, beide hatten Millimetertheilung.

$9^{h}\,5^{min}$ der Strom in Spule und Ring gleich gerichtet:

Spule und Ring				Galvanometer	
Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
+378,1					
	+326,9	+352,22		161,7	
+377,0		+352,23		161,7	
	+328,0	+352,22	+352,21	161,7	161,72
+375,9		+352,20		161,7	
	+329,0	+352,18		161,7	
+374,8				161,8	

Commutirt.

Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
−377,7					
	−333,7	−355,42		798,4	
−376,6		−355,40		798,3	
	−334,7	−355,40	−355,40	798,3	798,33
−375,6		−355,40		798,4	
	−335,7	−355,40		798,3	
−374,6				798,3	
		Commutirt.			
+319,0					
	+384,7	+355,15		161,8	
+320,2		+355,15		161,7	
	+383,5	+355,12	+352,13	? nicht beob.	161,75
+321,3		+355,12		161,8	
	+382,4	+355,12		161,7	
+322,4				161,8	

$9^h\ 18^{min}$ der Strom in Spule und Ring entgegengesetzt gerichtet.

Spule und Ring				Galvanometer	
Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
+185,6					
	+271,6	+228,90		161,8	
+186,8		+228,87		161,8	
	+270,3	+228,88	+228,88	161,7	161,74
+188,1		+228,90		161,7	
	+269,0	+228,85		161,7	
+189,3				? nicht beob.	
		Commutirt.			
−260,8					
	−204,1	−232,15		798,2	
−259,6		−232,15		798,1	
	−205,3	−232,17	−232,16	798,2	798,13
−258,5		−232,18		798,1	
	−206,4	−232,17		798,1	
−257,4				798,1	
		Commutirt.			
+259,4					
	+198,4	+228,60		161,9	
+258,2		+228,60		161,9	
	+199,6	+228,60	+228,59	161,9	161,9
+257,0		+228,57		161,9	
	+200,7	+228,57		161,9	
+255,9				161,9	

$9^h\ 32^{min}$ der Strom in Spule und Ring gleich gerichtet:

Spule und Ring				Galvanometer	
Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
+385,1					
	+319,5	+352,0		161,9	
+383,9		+351,97		161,9	
	+320,6	+351,95	+351,97	161,9	161,92
+382,7		+351,95		162,0	
	+321,8	+351,97		? nicht beob.	
+381,6				161,9	
Commutirt.					
−320,9					
	−379,3	−355,37		798,3	
−322,0		−355,38		798,4	
	−378,2	−355,42	−355,4	? nicht beob.	798,38
−323,2		−355,40		798,4	
	−377,1	−355,42		798,4	
−324,3				798,4	
Commutirt.					
+331,2					
	+372,3	+352,00		161,9	
+332,2		+352,02		161,9	
	+371,4	+352,03	+353,02	161,9	161,87
+333,1		+352,02		161,8	
	+370,5	+352,05		161,8	
+324,1				161,9	

$9^h\ 48^{min}$ Spule und Ring ausgeschaltet:

Spule und Ring				Galvanometer	
Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
+25,3					
	−24,7	+0,05		161,0	
+24,3		+0,02			
	−23,8	+0,03	−0,03	161,1	161,07
+23,4		+0,02			
	−22,9	+0,03		161,1	
+22,5					
Commutirt.					
+21,0					
	−27,1	−3,27		799,2	
+20,1		−3,27			
	−26,2	−3,27	−3,27	799,1	799,13
+19,2		−3,27			
	−25,3	−3,27		799,1	
+18,3					

Commutirt.

Umkehrpunkte		Einstellung	Mittel	Einstellung	Mittel
+42,2					
	−41,2	+0,20		161,1	
+41,0		+0,22			
	−39,9	+0,25	+0,22	161,1	161,1
+39,8		+0,22			
	−38,8	+0,20		161,1	
+38,6					

Aus den vorstehenden Zahlen berechnet sich:

$$\frac{F+f}{F-f} = 1{,}5362.$$

Im ganzen sind vier Versuche angestellt, und ist bei diesen die Stromintensität in möglichst weiten Grenzen variirt. Sie haben für $F+f / F-f$ die Werthe ergeben:

I.	II.	III.	IV.	
1,5362	1,5366	1,5364	1,5363	Mittel: 1,5364.

Hieraus findet sich:

	Beobachtet				Mittel	Berechnet
	I.	II.	III.	IV.	I—IV.	V.
$\frac{F}{f}$ =	4,7299	4,7272	4,7286	4,7294	4,7288	4,743.

Unter V ist der aus den p. 437 mitgetheilten directen Ausmessungen berechnete Werth verzeichnet.

Die Uebereinstimmung unter den Werthen I bis IV muss als eine ausserordentlich gute bezeichnet werden. Die Abweichung des unter V gegebenen Werthes hat ihren Grund zweifelsohne in den Fehlern bei der directen Ausmessung, denn sie übersteigt den aus den möglichen Fehlern sich ergebenden Betrag nicht, und man wird wohl keinen Augenblick darüber im Zweifel sein können, dass die Werthe I bis IV dem wahren Werthe näher liegen, als Nr. V dies thut.

Physik. Inst. Freiburg i. B., November 1882.

VI. *Magnetische Experimentaluntersuchungen; von Carl Fromme.*

(Aus dem 22. Ber. d. Oberh. Ges. für Natur- u. Heilkunde mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. IV.)

Vierte Abhandlung[1]).

In einer früheren Abhandlung, der dritten über magnetische Experimentaluntersuchungen, habe ich bewiesen, dass die Geschwindigkeit, mit welcher eine magnetisirende Kraft von Null an bis zu ihrem constanten Werth wächst, oder mit welcher sie von diesem bis Null abnimmt, von wesentlichem Einfluss auf das von der Kraft inducirte Moment ist, indem einestheils und hauptsächlich die Grösse, anderentheils aber auch der Zustand des Moments von dieser Geschwindigkeit abhängt.

Für die Ursache dieser Erscheinung ergab sich aus der Gesammtheit aller Versuche das Resultat, dass dieselbe jedenfalls nicht Folge von Inductionsströmen ist, welche bei dem Ansteigen oder Abfallen der magnetisirenden Kraft in der Masse des zu magnetisirenden Körpers entstehen; dass dagegen einer Erklärung direct aus der Hypothese der drehbaren Molecularmagnete die Mehrzahl der beobachteten Thatsachen sich sehr gut fügte.

Doch blieb auch noch eine nicht geringe Zahl von Thatsachen übrig, für welche eine Erklärung aus dieser Hypothese ohne weiteres nicht gegeben werden konnte, und auf der anderen Seite konnte man noch eine ganze Reihe von Fragen aufwerfen, welche in der früheren Untersuchung nicht oder nicht genügend durchs Experiment beantwortet waren.

Die vorliegende Arbeit wird versuchen, die frühere namentlich in letzterer Beziehung zu vervollständigen, sie soll sich jedoch beschränken auf die Mittheilung der Resultate,

1) Die 1. Abh. findet sich in Pogg. Ann. Ergbd. **7.** p. 390—430. 1876; die 2. Abh. in Wied. Ann. **4.** p. 76—107. 1878; die 3. Abh. in Wied. Ann. **5.** p. 345—388. 1878.

welche die Beobachtung der permanenten Momente (PM) geliefert hat.

Die Methode der Untersuchung war die früher angewandte: Ein langsames Absinken der magnetisirenden Kraft wurde erzielt durch langsames Ausziehen des Körpers aus der Spirale, während dieselbe von einem constanten Strom durchflossen wurde, oder auch durch allmähliche Einschaltung von Widerstand bis $W = 10000$ S.-E. und Unterbrechung des hierdurch unmerklich gewordenen Stroms. In beiden Fällen erhält man das gleiche permanente Moment (PM_a), falls nur im ersten Fall das Ausziehen des Körpers aus der Spirale mit Vermeidung aller Erschütterungen und im zweiten Fall die Vermehrung des Widerstandes ohne grosse Sprünge stattfindet.

Ein rasches Absinken der magnetisirenden Kraft auf Null wurde hervorgebracht durch Unterbrechung des Stroms an Quecksilber, während sich der Körper in der Mitte der vom constanten Strome durchflossenen Magnetisirungsspirale befand. Das permanente Moment ist dann bezeichnet mit PM_f.

Als Magnetisirungsspirale diente die in der dritten Abhandlung beschriebene, auf ein Papprohr gewickelte Spirale von 1859 Windungen, als Compensationsspirale die an demselben Ort beschriebene, auf ein Messingrohr gewickelte Spirale von 1382 Windungen. Die Batterie bestand aus zwei bis fünf Bunsen'schen Elementen, mit immer möglichst concentrirter Salpetersäure. Alle Angaben der permanenten Momente sind in Scalentheilen der 1800 mm vom Magnetometer entfernten Scala gemacht. Die Stromintensität wurde vor und nach einer Beobachtungsreihe gemessen durch die Ablenkung, welche das Magnetometer durch die sich nicht compensirend eingestellten beiden Spiralen erfuhr. Die Angaben der Stromintensität in den verschiedenen Tabellen sind meist nicht miteinander vergleichbar.

1. Einfluss der Zahl der Drähte in einem Bündel.

In der früheren Untersuchung wurde mit Bündeln von Drähten experimentirt, deren Zahl in jedem einzelnen wenigstens 16, und höchstens 40 betrug, und deren Dicke in ver-

schiedenen Bündeln gleich 0,5 bis 1,2 mm war. Es änderte sich von Bündel zu Bündel sowohl die Zahl, als die Dicke, als auch die moleculare Beschaffenheit der Drähte. Es soll nun zuerst die Frage beantwortet werden, wie sich cet. par. die Differenz $PM_a - PM_f$ mit der Zahl der Drähte in dem Bündel ändert? Denn nach den früher gemachten Erfahrungen (p. 380 a. E.) war es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass ein Einfluss der Dicke des Bündels und damit der Zahl seiner Drähte bestand.

Die folgenden Versuche wurden mit Eisendrähten angestellt, welche, obwohl von Bündel zu Bündel in ihrer Dicke variirend, doch sämmtlich dem gleichen dicksten Drahte entstammten, aus dem sie durch Ziehen gewonnen waren. Vor der Magnetisirung wurden sie ausgeglüht, die Oxydschicht wurde nicht entfernt. Die magnetisirende Kraft war so gross (fünf Bunsen mit dem Rheostatenwiderstand $W = 0$), dass nicht allein der einzelne Draht, sondern auch das Drahtbündel mit permanentem Magnetismus gesättigt war, — was bei einer Kraft von unzureichender Stärke nicht immer zutrifft.

Die Versuche wurden nun in der Weise ausgeführt, dass zuerst ein einzelner Draht der Wirkung der Kraft ausgesetzt und sein PM_a und PM_f bestimmt wurde. Sodann verband man mit dem ersten einen zweiten ihm gleichen Draht, indem man beide nebeneinander liegende Drähte zu möglichst inniger Berührung fest mit Zwirn bewickelte. Beide wurden zusammen magnetisirt und ihr Moment bestimmt. Zu den beiden Drähten trat dann noch ein dritter u. s. f.

Tab. 1. Drähte von 170 mm Länge und 1,13 mm Dicke, also Dimensionsverhältniss $L/D = 150$. Curventafel Fig. 1:

Zahl der Drähte	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14
PM_a	240	380	458	495	525	556	607	636	678	694
$PM_a - PM_f$.	4,7	15,3	30,5	44,5	55,2	68,1	85,0	98,5	113,2	125,0
$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	2,0	4,0	6,7	9,0	10,5	12,2	14,0	15,5	16,7	18,0

Tab. 2. Drähte von 136 mm Länge und 0,89 mm Dicke, also $L/D = 150$. Curventafel Fig. 2:

Zahl der Drähte	1	4	8	15	22	27	32
PM_a	125	253	296	347	382	418	441
$PM_a - PM_f$ . .	3,4	23,2	40,2	62,0	75,8	89,0	106,8
$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	2,4	9,2	13,6	17,6	19,8	21,3	24,2

Tab. 3. Drähte von 200 mm Länge und 2,12 mm Dicke, $L/D = 94$:

Zahl der Drähte	1	2	3	4
PM_a	348	396	423	473
$PM_a - PM_f$	22,3	34,8	46,2	66,0
$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	6,4	8,8	10,9	14,0

Aus den Tabellen 1 bis 3 ziehen wir vorläufig nur folgendes Resultat:

$PM_a - PM_f$ nimmt mit wachsender Zahl der Drähte in einem Bündel zu, und zwar bei den beiden dünneren Drähten zuerst rascher, später langsamer als diese, während bei dem dicken Draht das anfänglich raschere Wachsen nicht zu bemerken ist. Es nimmt ferner zu mit wachsendem PM_a, nämlich durchaus schneller als dieses, sodass $(PM_a - PM_f / PM_a)$ mit wachsender Zahl der Drähte fortwährend wächst: $PM_a - PM_f$, ausgedrückt in Procenten von PM_a, ist bei einem einzelnen Draht der Tabelle 1 oder 2 klein, erreicht aber mit wachsender Zahl der Drähte sehr hohe Werthe, welche eine Annäherung an ein Maximum selbst bei 32 Drähten nicht erkennen lassen.

Zugleich mit der eben entschiedenen Frage wurde noch die folgende beantwortet: In welcher Weise ändert sich bei einem Drahtbündel das von einer Kraft inducirte permanente und temporäre Moment mit der Zahl der Drähte, und welchen Einfluss üben dabei die Dimensionen der Drähte aus?

Die Kraft, welche das permanente Moment erzeugte,

war wieder von solcher Grösse, dass sie das Bündel sättigte; während die temporären Momente *TM* von einer kleineren Kraft erzeugt wurden, welche jedesmal auf die mit *PM* gesättigten Drähte wirkte.

Aus der Tab. 1 ergibt sich, dass bei:

1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	Drähten

auf einen Draht entfällt ein PM_a gleich:

240	190	153	124	105	93	76	64	56	50

Aus der Tab. 2 ergibt sich, dass bei:

1	4	8	15	22	27	32	Drähten

das PM_a eines jeden einzelnen Drahtes gleich ist:

125	63	37	23	17	15	14

Tab. 4. 1,13 mm dicke Drähte von 106 mm Länge ($L/D = 94$) ergaben, dass ein Draht erhält:

allein	ein $PM_a = 370,0$	
		: = 1,596
wenn in Verbindung mit einem zweiten	„ = 231,8	
		: = 1,353
und dritten	„ = 171,3	
		: = 1,224.
und vierten	„ = 140,0	

Nachdem diese Drähte auf eine Länge von 64 mm gekürzt und nochmals geglüht waren ($L/D = 57$), zeigte:

ein Draht allein	ein $PM_a = 113,4$	
		: = 1,628
in Verbindung mit einem zweiten	„ = 69,7	
		: = 1,348
und dritten	„ = 51,7	
		: = 1,225.
und vierten	„ = 42,2	

Tab. 5. 2,12 mm dicke Drähte von 120 mm Länge ($L/D = 57$) ergaben folgende PM_a eines Drahtes:

allein	188,9	
		: 1,676
wenn verbunden mit einem zweiten	112,7	
		: 1,355
und dritten	83,2	
		: 1,249.
und vierten	66,6	

Tab. 6. Eisendrähte von 0,3 mm Dicke. Dieselben entstammen nicht dem dickeren Drahte, welchem alle vorhergehenden entnommen waren.

Das PM_a eines Drahtes ist	L=200 mm		L=100 mm		L=50 mm	
Draht allein	85,5	: 1,048	63,7	: 1,164		
„ in Verbindung mit einem anderen	81,5	: 1,023	54,7	: 1,081		
„ „ „ „ zwei „	78,9		50,6			
„ „ „ „ drei „	77,2	: 1,022	45,5	: 1,112	10,9	: 1,56
„ „ „ „ sieben „	75,6	: 1,022	33,4	: 1,363	7,0	

Tab. 7. 0,89 mm dicke Drähte von 136 mm Länge. (Curventafel Fig. 3 und 4):

Zahl der Drähte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	18
PM_a	132	192	227	240	265	282	290	306	323	344	386
Auf einen Draht entfällt ein PM_a von	132	96	76	60	53	47	41	38	36	29	22
TM	24	77	136	183	210	237	247	255	269	303	376
Auf einen Draht entfällt ein TM von	24	38	45	46	42	40	35	32	30	25	21

Die gestellte Frage beantwortet sich nach diesen und anderen Versuchsresultaten folgendermassen:

Bei der Vereinigung mehrerer Drähte zu einem Bündel wächst das permanente Moment PM langsamer als die Zahl der Drähte, aber die Grösse des schwächenden Einflusses, welchen die einzelnen Drähte auf einander ausüben, ist von den Dimensionen der Drähte abhängig, und es ist wahrscheinlich, dass nicht die Dicke und nicht die Länge der Drähte für sich allein bestimmend ist, sondern dass es vorzugsweise auf das Verhältniss beider, das Dimensionsverhältniss, ankommt. Ist dasselbe klein, so tritt sein Einfluss ganz zurück, ist es grösser, so wächst das permanente Moment eines Bündels desto mehr proportional der Zahl seiner Drähte an, je gestreckter dieselben sind. Der schwächende Einfluss der einzelnen Drähte aufeinander ist bei dem Bündel, für dessen Drähte $L/D = 200/0{,}3 = 670$ ist, ausserordentlich gering. Dies ist für die Herstellung sehr starker permanenter Magnete zn berücksichtigen.

Hiermit ist das Resultat Lamont's[1]) in Einklang, welcher fand, dass die Schwächung des Magnetismus eines Uhrfederabschnitts durch einen anderen, anliegenden, dem ersten gleichen mit zunehmender Breite und abnehmender Länge derselben wuchs.

Die Beobachtungen der temporären Momente ergaben, dass das von einer constanten Kraft erzeugte TM continuirlich, aber zuerst rascher, später langsamer als die Zahl der Drähte zunimmt. Das auf je einen Draht entfallende TM

1) Lamont, Handbuch des Magnetismus p. 112—113.

nimmt zuerst bis zu einem Maximum zu und darauf bis unter den Werth, den es bei einem isolirten Draht besass, ab.

Da mit abnehmender Zahl der Drähte das *PM* jedes einzelnen Drahtes continuirlich wächst, so lässt sich der obige Satz auch dahin formuliren, dass mit zunehmendem *PM* eines Drahtes sein *TM* zuerst zu- und später abnimmt.

In dieser Form ist er identisch mit dem Gesetz, welches ich früher (2. Abh. p. 92) für die Abhängigkeit des temporären Magnetismus vom permanenten aufgestellt habe.

2. Einfluss der Länge und Dicke der Drähte.

Von den aus dem gleichen dicksten Drahte gezogenen Drähten 1 bis 4 wurden folgende Längen (mm) abgeschnitten:

Draht 1.	$D = 2{,}12$	$L = 50$	79	119	199	—
„ 2.	$D = 1{,}51$	$L =$ —	—	85	140	200
„ 3.	$D = 1{,}13$	$L =$ —	—	—	105	148
„ 4.	$D = 0{,}89$	$L =$ —	—	—	84	115
		$\frac{L}{D} = 24$	38	57	94	132

Diese Drähte wurden sämmtlich den gleichen beiden Kräften, nämlich fünf Bunsen mit $W = 5$ und $W = 0$, unterworfen und die Grösse der Differenz $PM_a - PM_f$ ermittelt. Im Folgenden sind die Werthe derselben in Procenten von PM_a, sowie die PM_a selbst angegeben. Man sieht, dass schon bei $W = 5$ sämmtliche Drähte mit alleiniger Ausnahme von Draht 1) $L/D = 24$ gesättigt sind. Die Drähte 1) $L/D = 94$ und 2) $L/D = 132$ befanden sich in einer grösseren Entfernung vom Magnetometer, als alle übrigen, bei denen die Entfernung die gleiche war.

Tabelle 8.

	$\frac{L}{D}$	24	38	57	94	132
	Draht 1.					
$W = 5$	PM_a	66,0	238,2	652,5	602,0	—
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$	35,8	19,9	14,1	8,6	—
$W = 0$	PM_a	73,7	240,0	651,5	600,5	—
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$	29,2	17,7	13,5	8,4	—

		$\frac{L}{D}$	24	38	57	94	132
		Draht 2.					
$W=5$	PM_a		—	—	204,8	643,0	405,0
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	16,5	11,1	6,0
$W=0$	PM_a		—	—	204,5	638,5	402,5
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	15,6	10,5	5,7
		Draht 3.					
$W=5$	PM_a		—	—	—	362,3	660,3
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	—	6,9	3,0
$W=0$	PM_a		—	—	—	362,5	662,5
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	—	6,9	2,8
		Draht 4.					
$W=5$	PM_a		—	—	—	169,0	321,0
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	—	7,7	3,4
$W=0$	PM_a		—	—	—	169,0	324,0
	$\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot 100$		—	—	—	8,0	3,5

Aus Tab. 8, sowie auch aus Tab. 1, 2 und 3 schliessen wir, dass die (in Procenten von PM_a ausgedrückte) Differenz $PM_a - PM_f$ sowohl von der Länge als von der Dicke des Drahtes abhängt: Bei gleichbleibender Dicke wächst sie mit abnehmender Länge, und bei gleichbleibender Länge nimmt sie mit zunehmender Dicke ebenfalls zu.

Wir bilden die Producte aus $PM_a - PM_f$ (ausgedrückt in Procenten von PM_a) und dem Dimensionsverhältniss L/D:

$\frac{L}{D}$	$\frac{L}{D}(PM_a - PM_f)$			
	Draht 1	Draht 2	Draht 3	Draht 4
24	78	—	—	—
38	71	—	—	—
57	79	91	—	—
94	80	101	65	73
132	—	77	38	45

Hieraus geht hervor, dass sich bei jedem der beiden dickeren Drähte $PM_a - PM_f$ umgekehrt proportional dem Dimensionsverhältniss, also bei gleichbleibender Dicke umgekehrt proportional der Länge ändert[1]), dass dagegen bei einem jeden der beiden dünneren Drähte $PM_a - PM_f$ rascher abnimmt, als die Länge wächst; ein Resultat, welches sich auch bei anderen Versuchsreihen ergeben hat. Angenähert wird man $(PM_a - PM_f)/PM_a$ dem Dimensionsverhältniss des Drahtes umgekehrt proportional setzen können, auch bei Bündeln von Drähten, wie eine Vergleichung der Tab. 1 und 2 lehrt.

3. Abhängigkeit der Erscheinung von der Grösse der magnetisirenden Kraft.

a) Bei wachsendem permanenten Moment PM_a. — Bei den in der 3. Abhandlung beschriebenen Versuchen war die magnetisirende Kraft fast durchweg von beschränkter Grösse, indem selten mehr als zwei Bunsen'sche Elemente benutzt wurden. Es schien nun der Mühe werth, den Verlauf der Erscheinung auch bei grösseren Kräften zu untersuchen. Es hatte ferner die Erscheinung nicht den gleichen Verlauf bei Eisenstäben, Stahlstäben und Drahtbündeln genommen. Auch diesen Unterschieden sollte durch weitere Beobachtungen näher getreten werden.

In die folgenden Tabellen sind — der Raumersparniss wegen — auch gleich einige Zahlenreihen aufgenommen, nämlich die bei constantem PM_a sich ergebenden Werthe von $PM_a - PM_f$, welche erst unter 3_b besprochen werden sollen.

1) Tab. 21 liefert folgende Werthe von $\frac{PM_a - PM_f}{PM_a} \cdot \frac{L}{D}$:

$\frac{L}{D}$:	24	38	57
$W = 20$:	7,4	7,1	5,7
$W = 10$:	9,2	6,3	5,7
$W = 0$:	6,2	4,9	5,7

Tab. 9. Bündel aus 20 Drähten eines 1 mm dicken Eisendrathes; Länge = 150 mm.

W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 500$
150	20	37	3,5	9,5	22,8
100	29	53	7,8	14,7	39,8
70	40	81	5,1	6,3	17,8
50	54	124	9,5	7,7	31,0
30	86	221	32,5	14,7	61,0
20	119	298	44,7	15,0	77,7
15	148	346	70,2	20,2	81,4
11	184	385	87,9	22,0	112,5
8	224	413	95,6	23,1	138,0
5	285	446	105,6	23,7	152,5
3	351	467	111,2	23,8	150,3
1,5	422	484	114,2	23,6	128,7
0	533	500	114,2	22,8	114,7

Tab. 10. Bündel aus 0,89 mm dicken und 160 mm langen Eisendrähten. Fünf Bunsen.

W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 500$
300	12	21	0	0	16,0
200	19	42	1,6	4,0	31,5
150	25	70	0	0	41,5
100	37	138	1,9	1,4	1,0
70	52	220	6,5	3,0	9,7
50	71	307	16,3	5,3	12,0
30	110	416	44,6	10,7	42,5
20	152	478	67,1	14,0	76,5
15	189	512	78,8	15,4	102,8
11	231	547	92,0	16,8	107,8
8	279	566	94,6	16,7	104,5
5	351	583	91,7	15,7	93,8
3	427	587	90,5	15,4	93,5
1,5	507	587	83,0	—	82,5
0	626	587	80,0	—	80,0

Tab. 11. Eisendrahtbündel aus 0,3 mm dicken und 200 mm langen Drähten. Fünf Bunsen:

W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 881$
200	24	59	2,5	4,2	19,3
150	31	113	4,5	4,0	27,5
100	46	—	—	—	0
85	—	—	—	—	−2,0
70	63	—	—	—	4,5
50	85	659	6,0	0,9	28,0
30	132	802	38,0	4,7	56,0
20	181	850	64,0	7,5	75,0
15	224	868	76,5	8,8	78,0
11	275	876	81,0	9,2	76,0
8	330	881	88,5	10,0	78,5
5	418	882	86,5	9,8	81,0
3	508	881	87,5	9,8	83,5
1,5	602	—	—	—	80,5
0	744	881	89,0	10,1	84,0

Tab. 12. Zwei Stäbe von 200 mm Länge und 6 mm Dicke, der eine von Eisen, der andere von Stahl, beide geglüht. Die Entfernung vom Magnetometer ist bei dem Stahlstab grösser als bei dem Eisenstab. Curventafel Fig. 5.

		Stahlstab				Eisenstab			
W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 625$	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 320$
200	—	—	—	—	—	—	—	—	7,0
150	—	—	—	—	—	—	—	—	13,0
100	43	5,9	0	0	0,7	28	3,3	11,8	21,2
70	59	6,8	0	0	2,4	47	9,4	20,0	36,0
50	81	8,9	0	0	2,5	74	18,6	25,1	48,5
30	128	17,2	0	0	3,2	132	47,0	35,6	70,2
20	178	34,7	0,2	0,7	5,1	169	65,6	38,8	94,5
15	220	58,7	0,4	0,6	6,6	199	89,7	45,1	115,0
11	271	98,1	0,9	1,0	9,3	215	97,1	45,2	126,8
8	330	153,2	2,3	1,5	11,7	236	104,5	44,3	132,4
5	421	257,0	5,7	2,2	17,4	253	106,0	41,9	140,2
3	517	368,5	13,5	3,7	22,0	277	118,0	42,6	135,8
1,5	624	475,5	24,6	5,2	30,0	288	112,6	39,1	123,6
0	791	625,0	40,9	6,5	39,8	311	118,1	38,1	124,3

Mit drei Bunsen erhielt man bei dem Stahlstab folgende Werthe:

W	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. v. PM_a
2	680	52,3	7,7
1	750	66,2	8,8
0	827	79,4	9,6

Tab. 13. Der Eisenstab wurde ausgeglüht und mit vier Bunsen magnetisirt. Curventafel Fig. 7.

W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 282$
100	31	104	44,0	40,2	−3,7
50	60	180	106,1	59,0	2,5
30	93	221	126,7	57,3	17,5
20	128	239	123,1	51,5	43,2
15	159	251	118,5	47,2	60,0
11	197	261	109,2	41,8	76,7
8	241	274	105,6	38,5	81,7
5	308	281	98,9	35,2	82,1
3	380	281	96,3	—	89,1
1,5	461	282	99,2	—	97,3
0	585	282	100,1	—	104,2

Ferner wurde beobachtet bei constantem $PM_a = 282$:

$W =$	500	250	150	100	70	50
$PM_a - PM_f =$	+0,5	−3,8	−4,0	−0,5	+1,5	+8,8.

Aus den Tab. 9—13 folgt für das Verhalten von $PM_a - PM_f$, wenn mit wachsender magnetisirender Kraft zugleich PM_a wächst:

Nur bei dem Stahlstab nimmt mit wachsender Kraft auch $PM_a - PM_f$ continuirlich zu, nämlich zuerst rascher als die Kraft, später ihr proportional.

Bei dem Eisenstab wächst $PM_a - PM_f$ bis zu hohen Kräften proportional an, erreicht ein Maximum, nimmt ab und wieder zu.

Bei einem Eisendrahtbündel endlich erreicht $PM_a - PM_f$ bei kleinen Kräften ein Maximum, fällt rasch auf ein Minimum, steigt bis zu einem zweiten, viel höheren Maximum und nimmt nochmals ab.

Nur die Abnahme nach dem zweiten Maximum zeigt nicht ein jedes Drahtbündel, und ich habe Grund, zu glauben, dass diese Abnahme desto seltener eintritt, je gestrecktere Form die Drähte besitzen. Bei dem Drahtbündel Tab. 11 blieb $PM_a - PM_f$ auf dem einmal erreichten Maximum stehen, wie hoch auch die magnetisirende Kraft gesteigert wurde. Bei diesem Bündel tritt das zweite Maximum gleichzeitig, bei dem in Tab. 10 etwas vor, und bei dem Eisenstab lange vor erreichter Sättigung mit PM_a ein.

Die in Proc. von PM_a ausgedrückte Differenz $PM_a - PM_f$ nimmt bei dem Stahlstab continuirlich zu, wächst bei dem Eisenstab bis zu einem Maximum und nimmt dann ab, und verhält sich bei einem Drahtbündel ebenso unter der Wirkung grösserer Kräfte, während sie bei kleinen Kräften noch ein Maximum und Minimum aufweist, welche mit dem Maximum und Minimum des absoluten Werthes von $PM_a - PM_f$ zusammenfallen.

Nur das am meisten gestreckte Bündel Tab. 11 zeigt die Abnahme von $(PM_a - PM_f) / PM_a$ nach dem zweiten Maximum nicht.

b) Bei constantem permanenten Moment PM_a. Dieser Fall ist der einfachere; denn eine jede Kraft findet die Molecularmagnete in derselben Lagerung vor, welche bestimmt ist durch das gleiche permanente Moment, das immer nahezu oder ganz der Sättigung mit PM_a entsprach. Der Verlauf der Differenz $PM_a - PM_f$ mit wachsender Kraft gibt uns also ein Bild von dem Einfluss des temporären Moments, er veranschaulicht, in welcher Weise die durch temporäre Aenderungen der Gleichgewichtslage der Molecularmagnete verursachte permanente Aenderung $PM_a - PM_f$ von der Grösse der ersteren abhängt.

Tab. 14. Stahlstab der Tab. 12. Eisendrahtbündel aus 0.3 mm dicken und 100 mm langen Drähten. Die Drähte sind von gleicher Beschaffenheit wie die in Tab. 11 erwähnten. Fünf Bunsen:

W	i	Drahtbündel		Stahlstab			
			$PM_a - PM_f$		$PM_a - PM_f$	Temporäres Moment TM reducirt auf Bogen	$\frac{PM_a - PM_f}{TM}$
250	—	PM_a const. = 206. $PM_a - PM_f$ = 21,9 Proc. von PM_a bei $W = 0$	8,5	PM_a const. = 707. $PM_a - PM_f$ = 10,4 Proc. von PM_a bei $W = 0$	2,3	9	0,26
200	24		13,0		3,0	12	0,25
150	31		2,0		2,8	15	0,19
100	46		2,4		4,1	23	0,18
70	63		2,7		5,8	32	0,18
50	85		5,0		8,0	45	0,18
30	132		17,5		14,3	76	0,19
20	181		42,5		19,3	115	0,17
15	224		42,0		25,0	156	0,16
11	275		45,3		32,3	213	0,15
8	330		47,0		41,7	272	0,15
5	418		45,2		52,0	356	0,15
3	508		44,7		62,5	424	0,15
1,5	602		45,0		67,7	485	0,14
0	744		43,5		73,5	553	0,13

Tab. 15. Eisenstab. $PM_a = 316$. Fünf Bunsen. Curventafel Fig. 8:

W	700	500	300	200	150	100	70	50	
i	5	7	12	19	25	37	52	71	
$PM_a - PM_f$	6,3	15,5	32,5	51,0	66,0	89,3	110,0	129,0	
W	30	20	15	11	8	5	3	1,5	0
i	110	152	189	231	279	351	427	507	626
$PM_a - PM_f$	149,5	153,7	154,3	147,3	138,4	139,0	142,4	146,5	149,5.

Tab. 16. Eisendraht von 2,12 mm Dicke und 79 mm Länge. $L/D = 38$. Drei Bunsen. $PM_a = 238$:

W	200	150	100	80	60	40	25	15	8	3	0
$PM_a - PM_f$	3,9	6,0	10,3	4,8	6,7	13,5	20,3	33,4	46,9	50,4	46,9.

Tab. 17. Eisendrahtbündel aus 1 mm dicken und 40 mm langen Drähten. Fünf Bunsen. $PM_a = 83$:

W	300	200	150	100	70	50	30	20	. . . .	0
$PM_a - PM_f$	3,4	5,3	2,2	2,4	2,9	4,0	4,9	7,5	. . . .	18,2.

Aus den Tab. 14 und 17, sowie aus den Tab. 9—13 ergibt sich folgender Schluss auf das Verhalten von $PM_a - PM_f$ bei Kräften, welche kleiner sind als diejenige, durch welche PM_a erzeugt wurde:

Die einfachsten Verhältnisse bietet der Stahlstab; bei

ihm wächst die Differenz $PM_a - PM_f$ continuirlich mit der Kraft selbst; sie ist ihr proportional, wenn dieselbe von mittlerer Grösse ist; sie wächst langsamer als die Kraft, wenn diese gross ist; bei kleinen Kräften findet sich die Andeutung eines Maximums.

Von den kleinsten Kräften an wächst $PM_a - PM_f$ langsamer als TM.

Der Eisenstab zeigte in verschiedenen Versuchsreihen, zwischen welchen er ausgeglüht wurde, ein abweichendes Verhalten: Entweder (Tab. 12 und 15) nahm $PM_a - PM_f$ bis zu hohen Werthen der Kraft mit dieser zu, erreichte ein Maximum, nahm ab bis zu einem Minimum und nahm nochmals zu. Während der ersten Periode der Zunahme wuchs $PM_a - PM_f$ anfangs rascher, dann langsamer als das temporäre Moment. Oder (Tab. 13) es nahm $PM_a - PM_f$ bei den kleinsten Kräften ab, wobei $PM_f > PM_a$ war, und nach Erreichung eines (negativen) Minimums zu. Die Zunahme war zuerst rasch und der Kraft proportional, dann einige Zeit verschwindend klein und schliesslich bei den grössten Kräften wieder von merklicher Grösse.

Bei einem Drahtbündel wächst $PM_a - PM_f$ zuerst mit wachsender Kraft, erreicht ein Maximum von bedeutender Grösse, sinkt von diesem sehr schnell ab bis zu einem Minimum, welches zuweilen im Negativen liegt, steigt wieder an bis zu einem zweiten Maximum und nimmt nochmals ab. Die letzte Abnahme tritt allein nicht auf bei den beiden Bündeln mit den am meisten gestreckten Drähten (Tab. 11. $L/D = 670$. Tab. 14. $L/D = 330$).

Der Eintritt des Maximums und Minimums bei kleinen Kräften ist unabhängig von der Dicke der Drähte und von ihrem Dimensionsverhältniss, denn es fand sich sowohl bei den dünnsten (0,3 mm dicken) Drähten, als auch bei einem Bündel, dessen Drähte (nur vier an Zahl) eine Dicke von 2,12 mm besassen, es trat ferner auch ein bei dem Bündel (Tab. 17), für dessen 1 mm dicke Drähte das Dimensionsverhältniss $L/D = 40$ war.

Ebenso aber, wie bei einem Drahtbündel, verhält sich (Tab. 16) $PM_a - PM_f$ bei einem einzelnen Draht, dessen

Dicke von 1,13 bis 2,12 mm beträgt, und dessen Länge bis zu 50 mm abnehmend variirt wurde:

Stets wird bei kleinen Kräften ein Maximum und Minimum beobachtet.

4. Wirkung der gleichen Kraft bei verschiedener Grösse von PM_a.

In dem vorhergehenden Abschnitt wurde unter a) gezeigt, welches der Verlauf von $PM_a - PM_f$ unter der Wirkung von Kräften ist, deren jede das PM_a, welches sie um $PM_a - PM_f$ reducirt, selbst erzeugte, während unter b) die Wirkung der gleichen Kräfte auf ein PM_a untersucht wurde, welches durch eine grössere Kraft erzeugt war. Eine Vergleichung der in 3_a) und in 3_b) erhaltenen Resultate lässt also erkennen, wie sich die Wirkung einer Reihe von Kräften ändert, wenn PM_a von dem einer jeden zugehörigen auf einen gewissen grössten Werth gesteigert wird.

Eine solche Vergleichung ergibt, dass die Zunahme von PM_a auf einen grössten Werth fast immer eine Zunahme von $PM_a - PM_f$, und zwar theilweise eine sehr bedeutende, zur Folge hat, indem nur bei dem Eisenstabe — und auch bei diesem nur bei einem Theile der Beobachtungsreihen — die reducirende Wirkung aller Kräfte mit steigendem PM_a sich stark verringerte. Ferner wird durch die Zunahme von PM_a die Bildung neuer Maxima und Minima von $PM_a - PM_f$ begünstigt — Stahlstab in Tab. 14 bei kleinen Kräften. Eisenstab in Tab. 13 bei kleinen Kräften. Drahtbündel in Tab. 9 bei grossen Kräften — und die Deutlichkeit der schon vorhandenen erhöht — Drahtbündel in Tab. 9, 10 und 11 bei kleinen, in Tab. 10 auch bei grossen Kräften. — Letzteres bestätigte nur der Eisenstab nicht durchweg. (Vgl. Tab. 13).

Auffällig ist besonders die Höhe des ersten Maximums bei grossem PM_a, welches in Tab. 10 z. B. etwa 40 Proc. des grössten vorkommenden Werthes von $PM_a - PM_f$ beträgt, während es bei der ersten Magnetisirung nicht 2 Proc. erreichte.

Die Beobachtung, dass eine Zunahme von PM_a die Diffe-

renz $PM_a - PM_f$ bei constant bleibender Kraft nicht immer — wie früher allein gefunden — vergrössert, sondern manchmal — bei dem Eisenstab Tab. 13 durchaus, bei dem Drahtbündel Tab. 10 unter Wirkung von $W = 50$ und 30 — auch verringert, wurde Veranlassung, den einer Kraft zugehörigen Werth von $PM_a - PM_f$ nicht nur für zwei, wie bisher geschehen, sondern für eine grössere Reihe von Werthen von PM_a zu suchen.

Tab. 18. Eisenstab. Vier Bunsen.

Der Stab wurde durch aufsteigende Kräfte ($W = 150$ bis $W = 4$) zum ersten mal magnetisirt und der jeder zugehörige Werth von $PM_a - PM_f$ beobachtet. Bevor eine grössere Kraft zur Wirkung gelangte, wurde der Stab allen schon vorher angewandten kleineren Kräften unterworfen und bei einer jeden PM_f beobachtet, während PM_a das gleiche, durch die bis dahin grösste Kraft inducirte, war.

Curventafel Fig. 9.

W	150	100	70	50	30	20	15	8	4
i	21	32	44	60	94	129	159	238	331
PM_a	57	94	137	175	218	237	249	272	287
$PM_a - PM_f$	21,7	—	—	—	—	—	—	—	—
	29,0	45,0	—	—	—	—	—	—	—
	37,0	57,5	80,0	—	—	—	—	—	—
	33,5	58,5	82,5	107,0	—	—	—	—	—
	24,5	49,2	75,2	101,5	131,5	—	—	—	—
	16,0	36,3	57,7	82,0	112,5	128,3	—	—	—
	7,3	24,3	43,8	64,5	92,5	112,0	123,5	—	—
	2,0	12,0	28,5	42,5	73,5	94,0	103,5	117,5	—
	−0,3	8,0	19,0	33,5	59,0	80,5	98,0	101,0	112,5

Für die in derselben Horizontalreihe stehenden Werthe von $PM_a - PM_f$ ist PM_a constant, nämlich für die erste $PM_a = 57$, für die zweite $PM_a = 94$ u. s. f., und die Kraft besitzt die darüber in der zweiten Horizontalreihe stehenden Werthe.

Eine Verticalreihe enthält die der gleichen Kraft bei wachsendem PM_a entsprechenden Werthe von $PM_a - PM_f$.

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich nun, dass bei der gleichen Kraft $PM_a - PM_f$ mit PM_a zuerst wächst und dann abnimmt. Die Periode der Zunahme wird kleiner mit wachsender Kraft, bis endlich nur noch eine Abnahme beobachtet wird.

Bei dem grössten PM_a war die Wirkung sämmtlicher Kräfte kleiner als bei der ersten Magnetisirung.

Nicht immer gelingt es aber, eine Zunahme und darauf folgende Abnahme von $PM_a - PM_f$ zu beobachten, meist überwiegt die Zunahme, und nur selten tritt wohl eine so ausgesprochene und ausschliessliche Abnahme ein, wie bei den grösseren Kräften in Tab. 18.

Sogar derselbe Eisenstab zeigte, nachdem er ausgeglüht war, bei allen Kräften von $W = 200$ bis $W = 30$ nur die Zunahme von $PM_a - PM_f$ mit wachsendem PM_a. Bei der letzteren Versuchsreihe wurden zugleich auch die temporären Momente TM beobachtet und gefunden, dass bei allen Kräften TM mit wachsendem PM_a abnahm, aber nicht bedeutend, nämlich um höchstens 11 Proc., während die Zunahme von $PM_a - PM_f$ bis zu 240 Proc. betrug.

5. Einfluss des Extrastromes.

Bei den folgenden Beobachtungen wurde ebenso, wie in der dritten Abhandlung beschrieben, verfahren: Entweder liess man den Extrastrom zu möglichst geringer Entwicklung gelangen durch Unterbrechung des Stromkreises, oder man brachte den Strom in den Spiralen zuerst sehr nahe auf Null durch Verbindung der Endigungen der Batteriedrähte mittelst eines kurzen dicken Kupferdrahtes, und unterbrach darauf erst die Leitung der Spiralen.

In diesem Falle durchfloss der ganze Extrastrom die geschlossene Leitung.

Die so erhaltenen permanenten Momente sind mit PM_{fN} (N = Nebenschliessung) bezeichnet.

Tab. 19. Eisenstab. Drei Bunsen. PM_a constant = 342. Curventafel Fig. 10.

W	500	300	200	150	100	70	50	30
$PM_a - PM_f$	1,2	8,5	16,2	25,2	40,6	58,5	79,5	113,5
$PM_a - PM_{fN}$	0	4,7	11,9	14,2	24,4	32,0	44,0	60,5
W	20	15	11	8	5	3	1,5	0
$PM_a - PM_f$	136,0	141,5	150,5	153,5	141,0	131,0	127,3	131,7
$PM_a - PM_{fN}$	69,0	84,0	97,8	109,5	113,5	106,5	101,5	94,8.

Mit fünf Bunsen wurde gefunden, dass sich $PM_a - PM_{fN}$ einem kleinsten Werthe annäherte, den es aber selbst bei $W = 0$ noch nicht erreichte, während $PM_a - PM_f$ bei dieser Kraft sich auf dem zweiten Maximum befand.

Tab. 20. Drahtbündel aus 0,3 mm dicken und 200 mm langen Eisendrähten. Drei Bunsen. PM_a constant = 586.

W	100	70	50	30	20
$PM_a - PM_f$	+2,0	+3,5	+1,5	−2,5	+2,0
$PM_a - PM_{fN}$	+3,3	+1,5	+1,3	−2,7	−8,2
W	12	8	5	2	0
$PM_a - PM_f$	+57,7	+96,7	+97,0	+102,7	+101,6
$PM_a - PM_{fN}$	− 9,0	− 7,3	− 4,0	− 0,7	+ 4,5.

Tab. 21. Drei Drähte, 2,12 mm dick und 50, 79, 119 mm lang (vgl. Tab. 8). L/D war also = 24, 38 und 57. Fünf Bunsen. Bei wachsendem PM_a ergab sich:

	$\frac{L}{D} = 24$			$\frac{L}{D} = 38$			$\frac{L}{D} = 57$		
W	20	10	0	20	10	0	20	10	0
PM_a . . .	46	58	73	196	222	239	622	657	660
$PM_a - PM_f$.	24,0	28,6	22,7	62,7	55,5	44,0	108,0	100,0	92,5
$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a . . .	52	49	31	32	25	18	17	15	14
$PM_a - PM_{fN}$	0,15	0,4	0,5	4,3	5,5	2,3	16,3	17,2	0

Sodann wurde der Draht, für welchen $L/D = 57$, bei constantem $PM_a = 660$ untersucht. Es wurde gefunden:

W	300	200	150	100	70	50
$PM_a - PM_{fN}$	+3,3	+3,7	+4,3	+1,5	−2,8	−7,0
W	30	25	20	15	11	8
$PM_a - PM_{fN}$	−10,8	−3,0	+6,5	+9,0	+10,0	+8,8
W	5	3	1,5	0		
$PM_a - PM_{fN}$	+ 6,7	+4,2	−0,7	+2,3.		

Bei dem Stahlstab war PM_{fN} dem PM_a sehr merklich gleich.

Hieraus geht hervor, dass der Extrastrom, wenn er einen geschlossenen Weg findet, den Werth von PM_f in jedem Falle, am wenigsten aber bei dem Eisenstab vergrössert.

Bei dem Stahlstab wird durch den Extrastrom der Unterschied von PM_a und PM_f überhaupt aufgehoben, während bei dem Eisenstab das Qualitative der Erscheinung, abgesehen von dem späteren Eintritt des Maximums, unverändert bleibt. Bei dem Drahtbündel und dem 2,12 mm dicken und 119 mm langen Eisendraht wird zwar durch die Wirkung des Extrastroms der Unterschied von PM_a und PM_f gering, aber doch ist zu erkennen, dass er von der Grösse der Kraft abhängt, und zwar in der gleichen Weise, wie ohne Anwendung der Nebenschliessung: mit wachsender Kraft zeigt sich zuerst Zunahme, dann Abnahme, wieder Zunahme und (bei dem Eisendraht) nochmals Abnahme.

Ein Unterschied liegt nur darin, dass die Periode der ersten Abnahme ausgedehnter wird, und dass häufiger $PM_f > PM_a$ ausfällt. (Bei dem Eisendraht war ohne Nebenschliessung niemals $PM_f > PM_a$).

Am geringsten ist der Einfluss des Extrastromes bei kleinen Kräften, bei welchen PM_{fN} dem PM_f merklich gleich ist.

6. Wirkung eines Inductionsstromes.

Die drei obersten von den acht Windungslagen der Magnetisirungsspirale wurden aus dem Kreise des magnetisirenden Stromes entfernt. Ihre Enden blieben entweder getrennt, oder sie wurden verbunden, in welchem Falle im Augenblick der Stromunterbrechung ein Inductionsstrom die Magnetisirungsspirale umkreiste. Die so erhaltenen PM_f sind durch PM_{fI} bezeichnet.

Tab. 22. Ein Drahtbündel aus 0,3 mm dicken und 200 mm langen Eisendrähten. Vier Bunsen. PM_a constant = 700.

W	100	70	50	30	20
$PM_a - PM_f$	+1,0	+ 3,8	+ 5,8	+ 5,9	+ 1,6
$PM_a - PM_{fI}$	+2,7	+ 1,8	+ 5,0	+ 5,3	+ 2,4
W	12	8	5	2	0
$PM_a - PM_f$	+1,3	+20,2	+29,8	+50,3	+59,6
$PM_a - PM_{fI}$	−4,7	− 5,6	− 7,0	− 4,7	+ 0,3.

Hier wie in anderen Versuchsreihen übte also ein inducirter, die Magnetisirungsspirale umlaufender Strom dieselbe Wirkung auf das PM_f eines Drahtbündels aus, wie der Extra-

strom. Bei kleinen Kräften ist $PM_f = PM_{fI}$, der Inductionsstrom ist also nicht von merklichem Einfluss; bei grösseren übersteigt PM_{fI} bedeutend PM_f und ist grösser als PM_a; bei den grössten wird es wieder kleiner als PM_a.

7. Einfluss der in der Masse des Eisens inducirten Ströme.

Aus der Beobachtung, dass ein Unterschied zwischen PM_a und PM_f auch bei Bündeln dünner voneinander isolirter Drähte besteht, wurde schon in der dritten Abhandlung der Schluss gezogen, dass die Ursache der Erscheinung nicht in dem Auftreten von Inductionsströmen in der Masse des Eisens gesucht werden kann. Indess war die Frage berechtigt, ob nicht diese inducirten Ströme, wenn sie auch nicht die Ursache der Erscheinung sind, doch irgend welchen Einfluss auf ihre Intensität oder ihren Verlauf ausüben?

Diese Frage ist durch eine Vergleichung der Resultate, welche erhalten wurden einerseits mit einem Eisenstab, in welchem sich inducirte Ströme bilden, andererseits mit einem Bündel dünner voneinander isolirter Eisendrähte, in welchem solche Ströme nicht auftreten, nicht zu entscheiden, nachdem wir wissen, dass auch das Dimensionsverhältniss des Stabes oder Drahtes und die Zahl der Drähte die Erscheinung beeinflussen.

Man kann vielmehr nur in der Weise verfahren, dass man die Drähte eines Bündels bei einer Beobachtungsreihe voneinander isolirt, bei einer zweiten leitend miteinander verbindet. Zeigen beide Reihen Unterschiede, so ist in der That ein Einfluss inducirter Ströme, unabhängig von einem Einfluss der äusseren Form des Körpers nachgewiesen.[1])

1) Das gleiche Verfahren ist zu befolgen, wenn es sich darum handelt, den Einfluss innerer Ströme auf die Geschwindigkeit des Entstehens oder Verschwindens des Magnetismus zu bestimmen. Die Beobachtung, dass der Magnetismus eines Eisenstabes langsamer verschwindet, als der eines Bündels voneinander isolirter Drähte, berechtigt meines Erachtens nicht zu dem Schluss, dass dies eine Folge der im Eisenstab auftretenden, im Drahtbündel fehlenden inneren Ströme sei. Denn auch die Form des Körpers ist möglicherweise bestimmend für die Geschwindigkeit, mit welcher der Magnetismus in ihm entsteht oder verschwindet (s. die 3. Abh. p. 380). Diese Frage durch neue Versuche zu entscheiden, ist gewiss angezeigt. Ich hoffe, bald dazu im Stande zu sein.

Auf solche Weise gelingt es dann, die Wirkungen inducirter Ströme von dem Einfluss der Form des Körpers zu trennen.

Tab. 23. Eine Anzahl (16) Eisendrähte von 1 mm Dicke und 150 mm Länge wurden geglüht, blank gerieben, verkupfert und amalgamirt. Sie wurden dann, als Bündel gefasst, in eine sie eng umschliessende Glasröhre gesteckt, die noch übrig gebliebenen Zwischenräume zwischen den Drähten mit Quecksilber ausgefüllt und die Glasröhre verschlossen. Drei Bunsen.

Curventafel Fig. 11.

W	i	PM_a	$PM_a - PM_f$	$PM_a - PM_f$ in Proc. von PM_a	$PM_a - PM_f$ bei const. $PM_a = 493$
150	20	28	0,15	0,5	3,2
100	29	45	0,2	0,5	4,0
70	40	73	0,5	0,7	4,5
50	55	120	1,7	1,4	4,0
30	86	234	10,0	4,3	9,7
20	119	319	29,4	9,2	25,0
15	148	361	46,2	12,8	41,0
11	183	394	63,0	16,0	61,7
8	222	419	75,7	18,0	87,5
5	284	446	93,7	21,0	124,5
3	349	469	107,0	22,8	130,0
1,5	422	484	116,8	24,1	127,0
0	535	493	124,0	25,1	128,7

Dieselben Drähte (wozu noch vier, ihnen im übrigen ganz gleiche gefügt waren) wurden auch untersucht, während sie durch Oxydoxydul voneinander isolirt waren. Diese Beobachtungen sind in Tab. 9, Curventafel Fig. 6 enthalten.

Tab. 24. Ebenfalls 1 mm dicke und 150 mm lange Drähte wurden in der oben beschriebenen Weise in leitende Verbindung miteinander gebracht und durch fünf Bunsen bei $W = 0$ magnetisirt. Auf das erhaltene $PM_a = 502$ liess man dann den Strom der fünf Bunsen bei grösseren Widerständen einwirken. Später wurde das die Zwischenräume der Drähte ausfüllende Quecksilber durch Schütteln entfernt. sodass die absichtlich nicht ganz gerade gestreckten Drähte sich in der Mehrzahl der Punkte nicht mehr berührten.

Curventafel Fig. 12.

W	i	$PM_a - PM_f$ Drähte verbunden	Drähte isolirt	W	i	$PM_a - PM_f$ Drähte verbunden	Drähte isolirt
30	72	—	94,0	5	237	112,7	95,6
20	100	—	118,2	3	291	113,3	91,6
15	124	100,0	120,6	1,5	351	115,1	91,5
11	154	106,1	112,6	0	440	119,5	92,8
8	187	110,4	98,6				

Aus den Tabellen 22 (und 9) und 23 ziehen wir folgende Schlüsse:

1) Bei der ersten Magnetisirung eines Bündels, dessen Drähte leitend verbunden sind, wächst $PM_a - PM_f$ continuirlich mit wachsender Kraft. Wirkt dagegen eine jede Kraft auf das gleiche (grösste) PM_a, so zeigt $PM_a - PM_f$ bei kleinen Kräften Andeutungen eines Maximums und Minimums und wächst darauf continuirlich, indem es sich einem Maximum annähert, welches in der Beobachtungsreihe Tab. 23 schon vor Eintritt der grössten Kraft erreicht ist.

2) Die in Procenten von PM_a ausgedrückte Differenz $PM_a - PM_f$ nimmt mit wachsender Kraft continuirlich zu.

3) Das Bündel leitend verbundener Drähte liefert bei kleinen und mittleren Kräfte kleinere, bei grossen Kräften grössere Werthe von $PM_a - PM_f$ als das Bündel voneinander isolirter Drähte.

Hiernach beeinflussen die Inductionsströme, welche bei der Unterbrechung des magnetisirenden Stromes in der Masse des Eisens circuliren, thatsächlich die Grösse und den Verlauf von $PM_a - PM_f$. Vor allem interessant ist das Resultat, dass sie die zwei Maxima und das Minimum, welche bei Bündeln voneinander isolirter Drähte stets beobachtet wurden, nahezu, resp. völlig zum Verschwinden bringen. Denn es beweist, dass die Ursache der Maxima und des Minimums, welche ein Eisenstab unter der Wirkung grosser Kräfte zeigt, nicht in den in dem Stab auftretenden Inductionsströmen liegen kann, da diese ihrer Bildung ja nur hinderlich sind; und es macht andererseits wahrscheinlich, dass gerade in diesen Strömen der Grund für das Fehlen des Maximums und Minimums bei einem Eisenstab liegt, welche unter

Wirkung kleiner Kräfte bei einem Bündel isolirter Drähte stets beobachtet wurden.

8. Zusammenfassung der Hauptresultate und Schlussfolgerungen.

Die Resultate des ersten und zweiten Abschnitts haben einen Schluss bestätigt, welcher schon in der dritten Abhandlung p. 380, freilich auf Grund nur weniger Versuchsreihen, gezogen war: dass der Unterschied von PM_a und PM_f desto grösser sein müsse, je mehr in dem Körper die Querwirkung der Molecularmagnete ihre Längswirkung überwiegt, wobei es vorzugsweise auf das Verhältniss beider zu einander ankommt. Wenn die Länge des Körpers sehr gross im Vergleich zu seiner Dicke ist, so verschwindet der Unterschied von PM_a und PM_f gänzlich: er erreichte bei dem Eisendraht vom Dimensionsverhältniss 670 unter den stärksten Kräften nicht ein Proc. von PM_a.

Eine Vergrösserung der Querwirkung im Vergleich zur Längswirkung wurde durch eine Vergrösserung der Dicke und Verminderung der Länge des Stabes erreicht, aber denselben Erfolg hatte auch eine Nebeneinanderreihung mehrerer Stäbe oder Drähte. Das letztere beweist, dass eine Wechselwirkung der Molecularmagnete auch noch in endlichen Entfernungen stattfindet.

Am kleinsten ist der Unterschied zwischen PM_a und PM_f c. p. stets bei Stahl, wofür der Grund p. 380 der dritten Abhandlung schon genannt ist. Der Stahl zeigt die einfachsten Verhältnisse: ein continuirliches Anwachsen von $PM_a - PM_f$ mit der Kraft, mag nun mit dieser PM_a selbst sich ändern (wachsen), oder mag es constant sein. Beim Eisen dagegen hängt $PM_a - PM_f$ in complicirter Weise von der Grösse der Kraft ab, in welcher Form auch das Eisen zur Untersuchung gelangen mag, sei es als Stab, als Draht oder als Bündel von Drähten. Dabei wechselt das Verhalten von $PM_a - PM_f$ mit dem Dimensionsverhältniss des Eisenkörpers, aber es ist nicht allein von diesem abhängig.

Ein Einfluss des Dimensionsverhältnisses gibt sich bei grossen Kräften zu erkennen: dicke Eisenstäbe zeigen hier

ein Maximum von $PM_a - PM_f$, bei weiter wachsender Kraft ein Minimum und weiter eine Annäherung an ein zweites Maximum. Dasselbe ergaben dünne Eisendrähte von kleinem Dimensionverhältniss. Dagegen zeigten Drahtbündel, für deren Drähte das Dimensionsverhältniss zwischen 100 und 200 lag, bei grossen Kräften nur ein Maximum mit nachfolgender Abnahme, und bei Drahtbündeln mit sehr grossem Dimensionsverhältniss verliess $PM_a - PM_f$ das einmal erreichte Maximum nicht.

Es vermindert sich also mit steigendem Dimensionsverhältniss die Zahl der Maxima und Minima bei grossen Kräften.

Umgekehrt scheint es auf den ersten Blick bei kleinen Kräften zu sein: denn das Maximum und Minimum, welches bei einem Drahtbündel stets beobachtet wird, fällt bei einem Eisenstab fast immer aus. Der Grund dafür liegt aber nicht in dem gewöhnlich kleinen Dimensionsverhältniss des Stabes gegenüber dem gewöhnlich grossen des Drahtbündels. Denn das Maximum und Minimum tritt auch bei Eisendrähten von kleinem Dimensionsverhältniss und geringer Dicke und bei einem Bündel kurzer Eisendrähte von kleinem Dimensionsverhältniss auf.

Vielmehr sind zur Erklärung die bei der Stromöffnung in der Masse des Eisens inducirten Ströme herbeizuziehen, welche sich besser in dicken als in dünnen Körpern ausbilden können. Denn wie im siebenten Abschnitt bewiesen wurde, verdecken diese Ströme das Maximum und Minimum bei einem Drahtbündel, sobald für ihr Zustandekommen durch leitende Verbindung der Drähte Sorge getragen wird.

Auch wenn man $PM_a - PM_f$ in Procenten von PM_a ausdrückte, gaben sich zwischen den verschiedenen untersuchten Körpern charakteristische Unterschiede zu erkennen: Sehen wir von dem Maximum und Minimum, welches bei kleinen Drähten als Folge des Maximums und Minimums von $PM_a - PM_f$ selbst auftritt, ab, so wuchs $(PM_a - PM_f) / PM_a . 100$ bei Stahl continuirlich mit wachsender Kraft, bei dem Eisenstab und bei einem kurzen dicken Draht nahm es zuerst zu und dann lange vor erreichtem Maximum von PM_a

ab, und bei einem Bündel langer und dünner Drähte nahm es zu und dann manchmal ab, aber erst unmittelbar vor erreichter Sättigung mit PM_a.

Die Abnahme von $PM_a - PM_f$ [in Proc. von PM_a] schon bei mittleren Kräften ist charakteristisch für Eisenkörper von kleinem Dimensionsverhältniss, sie ist nicht bedingt durch Inductionsströme in der Masse des Eisens, denn ein kurzer Eisendraht von nur 2,12 mm Dicke zeigte sie (Tab. 21), und ein Bündel leitend verbundener Drähte von 7 mm Dicke zeigte sie nicht, obwohl im ersten Fall der Einfluss inducirter Ströme klein, im zweiten gross sein muss. Die in der Masse des Körpers sich bildenden Inductionsströme verhindern nicht nur bei kleinen, sondern auch bei grossen Kräften die Bildung von Maximis und Minimis von $PM_a - PM_f$, woraus folgt, dass die einem Eisenstab von kleinem Dimensionsverhältniss charakteristischen Maxima und Minima noch intensiver auftreten müssen, wenn die Inductionsströme vermieden werden könnten.

Die Grösse von $PM_a - PM_f$ hängt sowohl von der Grösse von PM_a als auch von der Intensität der Kraft oder, besser gesagt wohl, von der Grösse des verschwindenden (temporären) Magnetismus (TM) ab. Die Abhängigkeit von TM zeigen die Beobachtungen, bei welchen PM_a constant blieb und sich nur die Intensität der Kraft, also TM änderte. Der Einfluss der Grösse von PM_a aber muss erschlossen werden aus Beobachtungen, bei welchen die gleiche Kraft auf verschieden grosse PM_a, welche grösser (oder höchstens gleich) sind als das von der Kraft selbst erzeugte, einwirkte.

Nun ändert sich aber mit PM_a auch das TM der Kraft (zweite Abhandl. p. 92—98), und deshalb kann man einwenden, dass, wenn die gleiche Kraft auf verschiedene PM_a einwirkt, sich ergebende Unterschiede von $PM_a - PM_f$ nur indirect durch die Verschiedenheit der PM_a, direct aber durch die der TM hervorgerufen seien. In den meisten Fällen variirt jedoch TM zu wenig, um hierdurch die grossen Variationen von $PM_a - PM_f$ erklären zu können, man wird vielmehr in der Hauptsache TM als constant ansehen können, wenn die Intensität der Kraft die gleiche ist, und die Varia-

tionen von $PM_a - PM_f$ zum grösten Theil auf Rechnung der Verschiedenheit von PM_a setzen. Da aber immerhin TM sich mit PM_a ändert, und da, wie bewiesen, die Grösse von TM wieder auf $PM_a - PM_f$ in complicirter Weise influirt, so ist es thatsächlich nicht möglich, sich eine vollkommen klare Vorstellung von dem Gesetz zu verschaffen, nach welchem $PM_a - PM_f$ von PM_a selbst abhängt. Man muss sich mit dem direct aus den Beobachtungen hervorgehenden Resultat begnügen, dass $PM_a - PM_f$ mit wachsendem PM_a zuerst zu-, dann abnimmt, wobei aber entweder die Zunahme oder die Abnahme auch ganz ausfallen kann. Ferner ergibt sich, dass grössere Werthe von PM_a die Bildung von Maximis und Minimis von $PM_a - PM_f$ begünstigen. Nur bei dem Eisenstab erschienen sie unter Wirkung grosser Kräfte manchmal weniger deutlich, wenn PM_a einen grösseren Werth besass; dafür trat dann aber ein neues (negatives) Minimum bei kleinen Kräften auf.

Schon in der dritten Abhandlung wurde bemerkt, dass PM_f zuweilen grösser als PM_a ist, nämlich dann, wenn der Körper während der Stromöffnung von einer geschlossenen metallischen Röhre umgeben ist. In diesem Falle nahm $PM_a - PM_f$, wenn der Körper durch aufsteigende Kräfte zum ersten mal magnetisirt wurde, zuerst bis zu einem negativen Minimum ab und darauf zu, indem es durch Null ins Positive ging. Die vorliegenden Beobachtungen beweisen nun, dass $PM_a - PM_f$ auch negativ werden kann, wenn der Körper von einer geschlossenen Inductionsspirale umgeben ist — was nach dem früheren Resultat zu erwarten war —, ferner wenn der Strom durch eine Nebenschliessung erst nahe auf Null gebracht wird, ehe man ihn unterbricht, und endlich (bei dem Bündel gestrecktester Drähte) auch schon bei einfacher Stromunterbrechung.

Diese Beobachtungen sind meist bei constantem PM_a angestellt, auf welches kleinere Kräfte, als die, durch welche es erzeugt wurde, wirkten; denn dann waren die negativen Werthe besonders gross und ihr Gang am leichtesten zu verfolgen.

Die bez. Tabellen zeigen nun, dass bei den kleinsten

Kräften $PM_a - PM_f$ positiv ist und wächst, nach Erreichung eines Maximums abnimmt und negativ wird, ein Minimum erreicht und darauf wieder ins Positive wächst, um nochmals ein Maximum zu erreichen und dann abermals abzunehmen. Die Abnahme nach dem zweiten Maximum wurde nur bei dem kurzen Eisendraht Tab. 21 beobachtet.

Ist schon das schroff zum ersten Minimum abfallende Maximum eine interessante Erscheinung (vergl. die dritte Abhandl. p. 381—382), so verdienen die um das erste Minimum liegenden negativen Werthe in nicht geringerem Grade unsere Aufmerksamkeit. Sie wären weniger auffällig, wenn sie nur bei der ersten Magnetisirung durch aufsteigende Kräfte aufträten, denn dann liessen sie sich vielleicht durch die Annahme erklären, dass PM_f in anderer Weise mit der Kraft wächst als PM_a, nämlich zuerst langsamer als dieses, dann rascher — wobei $PM_f > PM_a$ werden kann — und endlich wieder langsamer mit wachsender Kraft zunimmt. So aber bewirkt in Tab. 21 z. B. eine Kraft, welche nur ein Viertel so gross ist, als diejenige, durch welche PM_a erzeugt wurde, dass dieses noch um fast zwei Proc. steigt.

Die nächstliegende Erklärung hierfür, welche ich auch früher einmal gelegentlich einer ersten kurzen Mittheilung der in der dritten Abhandlung enthaltenen Resultate in den Göttinger Nachrichten erwähnt habe, wäre, dass PM_a deshalb durch eine selbst viel kleinere Kraft gesteigert werden konnte, weil es vorher durch unvermeidliche Erschütterungen geschwächt worden sei.

Diese Erklärung ist nicht statthaft, weil negative Werthe auch dann vorkommen, wenn der Körper bei der Bildung des PM_a ruhig in der Spirale bleibt, und der Strom durch allmähliche Einschaltung von Widerstand bis zu einem unmerklich kleinen Werthe geschwächt wird, ehe man ihn unterbricht.

Deshalb werden die negativen Werthe von $PM_a - PM_f$ in derselben Weise zu erklären sein, wie überhaupt die Maxima und Minima, nämlich durch die Annahme (vergl. die dritte Abhandl.), dass die Molecularmagnete nach einer plötzlichen Aenderung der sie richtenden Kraft im allgemeinen nicht

sogleich neue Gleichgewichtslagen einnehmen, sondern erst nachdem sie eine oder mehrere Oscillationen ausgeführt haben.

Es wäre endlich noch der Einfluss des Extrastromes zu erörtern.

Nachdem schon früher bewiesen worden ist, dass in der Masse des Körpers inducirte Ströme als die Ursache der Erscheinung nicht angesehen werden können, könnte man die Frage aufwerfen, ob nicht der Extrastrom als deren Ursache betrachtet werden darf. Diese Frage hat nur dann eine Berechtigung, wenn man einen alternirenden Verlauf des Extrastromes annimmt. Es würde dann vorzugsweise die zweite Oscillation sein, welche PM_a zu PM_f verminderte. Nun hatte bei der grossen Windungszahl meiner Spiralen der Extrastrom jedenfalls einen alternirenden Verlauf, aber es scheint doch fraglich, einmal ob die zweite Oscillation überhaupt noch während der Dauer des Funkens zu Stande kam, also einen geschlossenen Weg fand, und dann, wenn dies nicht der Fall war, ob sie überhaupt eine electromagnetische Wirkung ausübte.

Ganz hinfällig wird aber die Vermuthung, dass der Unterschied von PM_a und PM_f durch den Extrastrom hervorgerufen sei, durch die Beobachtung, dass er auch noch fortbesteht, wenn dem Extrastrom (durch Anwendung einer Nebenschliessung) ein geschlossener Weg geboten wird. Dann treten nämlich nach Bernstein Oscillationen und Alternationen des Extrastromes überhaupt nicht ein, er fliesst in constanter, dem primären Strom gleicher Richtung, und seine Wirkung kann nur in einer Annäherung des PM_f an PM_a bestehen, wie auch die Beobachtungen ergaben.

Man kann aber weiter die Frage aufwerfen, ob nicht die Maxima und Minima von $PM_a - PM_f$ eine Folge des Extrastromes seien? Dieselbe beantwortet sich durch eine Vergleichung der Werthe, welche mit und ohne Benutzung der Nebenschliessung erhalten wurden. (Tab. 20.)

Die beiderseitigen Werthe sind bei kleinen Kräften, bei welchen das erste Maximum und Minimum eintritt, nicht merklich voneinander verschieden, obwohl doch im einen Fall der ganze Extrastrom, im anderen nur ein sehr kleiner Theil

einen geschlossenen Weg einschlug. Daraus folgt, dass bei kleinen Kräften der Extrastrom überhaupt ohne merklichen Einfluss ist, folglich, dass er auch nicht als Ursache der bei kleinen Kräften auftretenden Maxima und Minima betrachtet werden kann. Dann wird er aber auch bei der Entstehung der bei grösseren Kräften beobachteten Maxima und Minima unbetheiligt sein.

Dagegen ist bewiesen, dass er sowohl die Höhe der Maxima und Minima als ihre Lage beeinflusst, am wenigsten von allen untersuchten Körpern bei dem dicken Eisenstabe. Es ist diese geringere Wirkung bei dem Stab nicht allein auf die gleichzeitig in dem Eisen selbst inducirten Ströme zurückzuführen, denn bei einem Eisendrahtbündel blieb die Wirkung des Extrastromes bei Benutzung einer Nebenschliessung immer bedeutend, d. h. $PM_a - PM_f$ klein, auch wenn die Drähte des Bündels sich in leitender Verbindung befanden. Ich glaube, dass die Wirkung des Extrastromes auch durch das Dimensionsverhältniss und namentlich durch die moleculare Beschaffenheit des Körpers bestimmt wird.

Giessen, November 1882.

VII. *Ueber Schallstärkemessung;*
von Karl Vierordt.

Als ich vor einigen Jahren an die früher vollständig vernachlässigte, experimentelle Prüfung der Messung der Schallstärke herantrat, fand ich, dass die Thatsachen mit der allgemein gültigen Theorie durchaus nicht stimmen. Um messbare Schalle herzustellen, wurden schwingungsfähige Platten durch herabfallende Kugeln erschüttert und die Schallstärke aus dem Kugelgewicht und der Fallhöhe berechnet. Ich fand, dass die Schallstärke nichts weniger als proportional ist der Fallhöhe h, sondern mehr der Wurzel von h sich nähert; man hätte also annähernd $h^{0,5}$ als Schallstärkemaass. Mittelst seines objectiven Phonometers kam

später Oberbeck im wesentlichen zu demselben Ergebniss. Bei ihm wirken Luftschalle auf das Mikrophon, sodass die Beobachtung durch das Ohr ohne weiteres mit der Beobachtung am Phonometer vergleichbar ist. Auch Oberbeck erhielt niedere Exponenten (ε), die ein wenig über 0,6 hin- und herschwanken, und zwar bei Schallen verschiedener Schallquellen und bei Verwendung verschiedener, bis zu einigen Grammen steigenden Gewichte von verschiedenem Material. Jedenfalls war sowohl objectiv als subjectiv der Beweis hergestellt, dass das übliche, auf rein theoretischem Argument begründete Schallmaass falsch ist, d. h. dass die lebendige Kraft des Stosses bei unseren Versuchsbedingungen bei weitem nicht vollständig in akustisch wirksame Bewegung umgesetzt wird.[1])

Innerhalb der mässigen Variationen der Schallstärke, die ich zu meinen Messungen verwendete, stellten sich keine erheblichen Unterschiede der ε-Werthe heraus; dasselbe ist in Oberbeck's Versuchen der Fall. Ich hatte bei meinen noch nicht publicirten experimentellen Studien über die Schwächung, welche der Schall bei seiner Fortpflanzung durch Medien der verschiedenen Aggregatformen erleidet, in der Regel nur mit verhältnissmässig schwachen ursprünglichen Schallen zu thun, die successiv so abgeschwächt werden mussten, dass sie nach ihrer Durchleitung durch die zu prüfenden Medien jeweils nur eine eben noch hörbare Empfindung ergaben.

Zur Bestimmung des ε, d. h. des Exponenten der Fallhöhe, hat man eine Fallkugel von stärkerem Gewicht P

1) Die Verwendung von anderweitig hergestellten Schallen und Tönen wird insofern mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein, weil sich die zur Tonerzeugung aufgewandte Energie nicht leicht messen und berechnen lässt. Die Erschütterung von Saiten durch Fallpendel verschiedenen Gewichtes, wobei die Aufschlagstelle des Hämmerchens auf die Saite mit einer dünnen Lage von Leder zu überziehen ist, dürfte zunächst zu empfehlen sein, obschon freilich die Bedingungen der Tonerzeugung nicht wesentlich von dem bisherigen Verfahren verschieden wären. Oberbeck deutet auf die Möglichkeit hin, messbare Töne mit einfachen Flötenwerken herzustellen; es wäre sehr zu wünschen, dass diese Methode weiter ausgebildet würde.

durch einen beliebigen, aber jeweils constanten Fallraum h auf die schwingungsfähige Platte fallen zu lassen und die grössere Fallhöhe H eines schwächeren Gewichtes p, das auf dieselbe Platte aufschlägt, so lange abzuändern, bis die letztere Schallstärke der ersteren (constanten) Schallstärke gleich geworden ist. Nach der von Oberbeck aufgestellten empirischen Formel ist:

$$\varepsilon = \frac{\log \frac{P}{p}}{\log \frac{H}{h}}.$$

Die Vergleichung beider Hörempfindungen bietet aber insofern Schwierigkeiten, als dieselben — mögen es Schalle sein oder Töne — immer verschiedene Timbres haben. Diese Verschiedenheit stört wenig bei schwächeren Schallen, bei starken aber (schwere Fallkugeln und grosse Fallräume) wird die praktische Durchführung der Aufgabe in der That schwer. Aus diesem Grund dürfen die zur Messung der ε verwendeten P- und p-Paare keine zu grossen Gewichtsunterschiede bieten und nicht viel mehr als um etwa das Doppelte ihres Gewichts differiren; unter allen Umständen ist aber das Ohr nur nach längerer Uebung im Stande, der delicaten Aufgabe vollkommen genügen zu können. Die meisten Schallstärkemessungen bieten, selbst dem weniger Geübten, keine erheblichen Schwierigkeiten; an grundlegende Bestimmungen, wie die des ε-Werthes kann aber nicht Jeder ohne weiteres herantreten. Der von der Controle zahlreicher Beobachter zu erhoffende Vortheil einer von individuellen Einflüssen vermeintlich unabhängigen, genaueren Auswerthung des ε ist somit ein rein illusorischer, wenn die Beobachter nicht durch vorausgegangene ernstliche Uebung sich für ihre Aufgabe vollkommen befähigt gemacht haben.

In einer unter Wundt's Leitung ausgearbeiteten, unlängst in Leipzig erschienenen Dissertation schliesst Dr. Tischer, auf Grund von Experimenten, dass ein allgemeines Schallmaass nicht existire.

Für schwache Schalle (Fallgewicht bis zu 1 g) und zum Theil viel grössere Fallhöhen (bis zu 80 cm) als ihre Vor-

gänger angewandt hatten, erhielten Wundt und Tischer, wie sie ausdrücklich hervorheben, dieselben niederen ε-Werthe — um 0,6 etwas nach aufwärts und abwärts schwankend — wie ich und Oberbeck. Bei Verwendung stärkerer und sehr starker Schalle (es wurden Fallkugeln bis zu 200 g Gewicht und Fallhöhen zwischen 10 cm bis fast 1 m benutzt) änderten sich die ε-Werthe erheblich. Wir dürfen übrigens von den Tischer'schen Versuchen den grösseren Theil nicht ohne weiteres benutzen und müssen namentlich auf diejenigen verzichten, welche von mehreren Beobachtern zugleich angestellt wurden, da die letzteren, wie Tischer selbst bemerkt, sich gegenseitig in ihren Urtheilen zu influiren schienen. Ausserdem wären auch diejenigen Versuche nur mit Vorsicht zu verwenden, bei welchen, was häufig vorkam, ein einmaliges, oder sogar mehrfaches Zurückprallen und Wiederaufschlagen der Fallkugeln vorkam. Dass diejenigen ε-Bestimmungen, die zu Werthen grösser als die Einheit führten, gar nicht in Frage kommen dürfen, ist selbstverständlich; Werthe der Art kommen aber sehr häufig vor bei Tischer, und zwar so, dass sie in einzelnen Fällen sogar über 1,2 steigen und somit ungefähr innerhalb eines vollen Dritttheils der ganzen Breite der von demselben berechneten Exponentenwerthe sich bewegen. Wir müssen uns deshalb vorzugsweise auf die an einer einzigen Schallquelle (Eisenplatte) angestellten ε-Messungen Tischer's beschränken, bei welchen die Kugeln nicht von der Platte zurückgeworfen wurden, und vor allem keine ε-Werthe über Eins angetroffen werden. Die Zahl der an sich schon nicht umfänglichen Versuchsreihen wird dadurch freilich eine äusserst beschränkte.

Wundt und Tischer folgern aus ihren Versuchen: 1) die H/h-Werthe nehmen ab, oder ε wächst, wenn die absoluten Werthe von h und H zunehmen und 2) die H/h-Werthe nehmen ab, oder ε wächst, wenn die absoluten Werthe von p und P zunehmen.

Tab. IV Tischer's (Schallquelle: ein mit Tuchzeug überzogenes Holzbrett) enthält drei Versuchsreihen. Für das Gewichtspaar 20 und 8 g (also P/p constant 2,5) ergab sich mit zunehmenden absoluten Werthen von h und H keine

Abnahme, sondern eher eine kleine Zunahme von H/h. Für das Gewichtspaar 50 und 125 g (also wiederum $P/p = 2{,}5$) bleibt bei den geprüften zwei Fallhöhenpaaren H/h, also auch ε, gleich. Für das Gewichtspaar 20 und 50 g zeigt von zwei geprüften Fallhöhen das stärkere Fallhöhenpaar ein erheblich grösseres H/h. Alle Messungen der Tab. IV zeigen also eine Zunahme der H/h-Werthe bei Zunahme der absoluten Werthe von h und H, also das Gegentheil von der oben ausgesprochenen Norm.

In Tab. V (Versuchsperson Tr.) bieten zwei Gewichtspaare immer ein Sinken des H/h mit zunehmenden absoluten Werthen von H und h, ein Gewichtspaar dagegen zweimal unter fünf Fällen ein Steigen.

In Tab. VI (Versuchsperson C. Wf.) bietet das Gewichtspaar 8 und 20 g ein kleines Steigen der H/h bei zunehmendem absoluten H und h; das zweite Gewichtspaar 20 und 50 g zweimal ein Steigen, zweimal ein Fallen der H/h; das dritte Gewichtspaar einmal ein Steigen, einmal ein Fallen der H/h u. s. w.

In Tab. XI (Eisenplatte als Schallquelle) bieten zwei Gewichtspaare je einmal ein Sinken, ein Gewichtspaar aber ein Steigen der H/h mit zunehmenden absoluten h und H.

Die grösste Versuchsreihe Tab. XII enthält Messungen an zehn Gewichtspaaren. Zahlen über Eins, also unmögliche Werthe von ε, kamen in dieser Tabelle nicht vor. An einem Gewichtspaar wurde blos mit einem Fallhöhenpaar experimentirt; drei Gewichtspaare wurden auf zwei verschiedene Fallhöhen geprüft: zweimal kam eine Abnahme, einmal eine Zunahme der H/h bei zunehmenden absoluten h und H vor. Sechs Gewichtspaare endlich wurden bei je drei verschiedenen Fallhöhen geprüft; blos bei einem Gewichtspaar nahm, wenn wir je von den kleinsten h und H ausgehen, der Werth von H/h bei den beiden grösseren Fallhöhenpaaren ab; bei den fünf übrigen Gewichtspaaren sank der Werth H/h bei der mittleren Fallhöhe, um aber wieder zu steigen bei der dritten (grössten) Fallhöhe.

Der Ausspruch **Wundt's** und **Tischer's**: „Die H/h-Werthe nehmen ab, oder ε wächst, wenn die absoluten Werthe

von h und H zunehmen", lässt sich somit aus ihren eigenen Versuchen nicht rechtfertigen.

Die sehr beträchtlichen Unterschiede, welche die für verschiedene Individuen bei einer und derselben Schallquelle und objectiv ganz gleichen sonstigen Versuchsbedingungen erhaltenen ε-Werthe boten, sowie die hohen Beträge dieser Werthe überhaupt, erklären Wundt und Tischer dadurch, dass die miteinander verglichenen Schalle qualitativ nicht gleich waren, „der Schall der kleineren Kugel ist spitzer und höher, der der grösseren breiter und tiefer." Die häufig vorkommenden geradezu unmöglichen Werthe von ε, welche die Einheit zum Theil bedeutend überschritten, werden „unserer Neigung" zugeschrieben, „von zwei gleich starken Schallen von verschiedener Höhe dem höheren eine grössere Intensität beizulegen."

Der letzteren richtigen Erklärung ist noch als zweite, viel eingreifender wirkende Ursache hinzuzufügen, dass objectiv schwächere Reize, die aber rasch anschwellen (und zwar in allen Sinnesgebieten), häufig einen stärkeren Eindruck machen, als objectiv stärkere Reize, die etwas langsamer anschwellen. Die Verfasser bezeichnen die respectiven Schalle, wie oben bemerkt, als „spitze" und „breite." Nun mussten aber offenbar diese Einflüsse sich nicht erst dann geltend machen, wenn die Experimentirenden Schalle zu hören hatten, deren P/p und H/h zu Werthen = Eins und noch erheblich darüber führten, sondern schon sehr viel früher. Bei schwachen Schallen greifen diese Störungen auch bei dem wenig Geübten nur mässig ein. Die ε-Werthe über Null sind also sozusagen objective Beweise, dass auch die meisten übrigen ε-Bestimmungen zu hoch sind.

Man darf übrigens aus den so schwankenden Tischer'schen ε-Werthen nicht etwa schliessen, dass das genaue Vergleichen zweier im Timbre u. s. w. nicht befriedigend übereinstimmenden Schalle geradezu eine Unmöglichkeit wäre und zu den grössten „individuellen" Differenzen nothwendig bringen müsse. Eine gehörige Uebung muss zur Ueberzeugung führen, dass der Schall der kleineren Kugel, die durch eine grössere Höhe fällt, der in der Zeit der Vorstudien dem

Schall der grösseren Kugel bei bestimmter Fallhöhe unbedenklich gleichgesetzt worden ist, dem geschulten Ohr erheblich dünner und schwächer vorkommt, als der Schall der grösseren Kugel. Jede Erziehung des Sinnes muss mit Nothwendigkeit zu einer Minderung der aus den Versuchen erhaltenen ε-Werthe führen. Ich kann nur wiederholen, dass die grundlegenden ε-Bestimmungen nicht einer Vielheit wenig erfahrener Beobachter, sondern nur ad hoc vollkommen geübten Experimentatoren anvertraut werden können; diesen Grundsatz müssen wir ja auch in der Spectrophotometrie, die uns bei der Vergleichung, resp. Gleichmachung zweier Lichtstärken viel leichtere Aufgaben bietet, strenge festhalten. Hier wie in der Akustik handelt es sich um Sinnesreize, deren objective Intensität entweder schon a priori durch die Versuchsbedingungen gegeben ist, oder aus den letzteren mit Hülfe des betreffenden Sinnes gefunden werden kann.

Bei den Bestimmungen der ε-Werthe dürfen wir uns selbstverständlich nicht mit etwa zwei oder höchstens drei verschiedenen Fallhöhen begnügen. In den nachfolgenden Versuchsreihen habe ich die P und p, sowie die H und h möglichst zu variiren gesucht. Die Versuche beziehen sich ohne Ausnahme auf das Hören in der Luft, das eine Ohr war 50 cm entfernt von dem Aufschlagungspunkt der Fallkugel auf die Schallquelle (vibrationsfähige Platte). Die Manipulationen besorgte mein Institutsdiener Nagel, der seit einer langen Reihe von Jahren bei Experimenten über Unterscheidungsempfindlichkeit in den verschiedenen Sinnesgebieten assistirt und eine Erfahrung in den betreffenden Technicismen gewonnen hatte, die nichts zu wünschen übrig lässt. Jede Einzelzahl (d. h. H/h, resp. ε) der nachfolgenden Tabellen beruht als Mittelwerth auf mindestens vier, (häufig aber auf noch mehr) besonderen Versuchsreihen, die zu verschiedenen Tagen, resp. Tageszeiten in der Art angestellt wurden, dass in jeder Reihe so lange hin- und herprobirt wurde, bis die zwei Schalle, welche gleiche Stärke erhalten sollten, für die Empfindung gleich stark ausfielen, oder richtiger gesagt (da es sich immer um nicht wegzu-

bringende Qualitätsunterschiede handelt) die unter sich die geringste Empfindungsdifferenz boten, geringer als die durch ihre Nachbarschalle nach auf- und abwärts erhaltenen Empfindungsdifferenzen. Ein solches Tatonnement verlangte durchschnittlich etwa 20—30, unter Umständen aber noch mehr Einzelversuche. Mehr als höchstens 20 solcher Versuchsreihen wurden in derselben Versuchszeit nicht angestellt, um den Sinn nicht zu ermüden. Versuche, die man über erheblich mehr als eine Stunde ausgedehnt, werden zunehmend unzuverlässiger. Bei Tischer kommen Versuchsreihen vor, die bis $2^1/_2$ Stunden ausgedehnt wurden, die ausführliche Versuchsreihe Tab. XIV beruht ausschliesslich auf volle drei Stunden hindurch fortgesetzten Versuchen. Ich kann gegen ein solches Verfahren nicht dringend genug warnen.

In der nachfolgenden ersten Versuchsreihe wurde eine viereckige Zinnplatte von 222 mm Länge, 172 mm Breite, 8,2 mm Dicke und 2406 g Gewicht angewandt. Zwischen derselben und dem Tisch lag eine doppelte Schicht von Baumwollbiber, die etwa 2 mm dick war. Die Fallkugeln waren von Blei. Blos in den Versuchen ad VIII wurden zur Vergleichung mit den eben erwähnten Versuchsbedingungen auch die Schalle geprüft, welche bei der Lagerung der Platte unmittelbar auf dem Tisch entstehen. Im letzteren Falle erhält man leere Schalle; bei der Verwendung der Tuchunterlage aber Töne, deren Höhe ohne Anstand der Messung zugänglich wäre.

Erste Versuchsreihe.

Schallerzeugung durch Herabfallen von Bleikugeln auf eine Zinkplatte.

Fallhöhe in Millimetern: der schwereren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε	Fallhöhe in Millimetern: der schwereren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
I. Fallgewichte:		$P = 180\,100$ mg.		II. Fallgewichte:		$P = 89204$ mg.	
$p = 89204$ mg.		$P/p = 2{,}019$.		$p = 45368$ mg.		$P/p = 1{,}966$.	
5	12,1	2,42	0,795	5	12,1	2,4	0,765
10	26,1	2,61	0,732	10	23,6	2,36	0,787
15	33,7	2,23	0,876	15	38,9	2,59	0,713
20	47,8	2,39	0,806	20	52,3	2,61	0,704
25	60,8	2,43	0,791	25	60,4	2,42	0,765
		Mittel:	0,800			Mittel:	0,7468

Fallhöhe in Millimetern: der schwereren Kugel h	der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
III. Fallgewichte: $P = 45368$ mg. $p = 23626$ mg. $P/p = 1{,}920$.			
5	11,35	2,27	0,796
10	23,9	2,39	0,748
15	36,6	2,51	0,708
20	52,2	2,61	0,680
25	66,9	2,67	0,664
		Mittel:	0,7192
IV. Fallgewichte: $P = 23626$ mg. $p = 11096$ mg. $P/p = 2{,}129$.			
5	14,3	2,86	0,719
10	26,8	2,68	0,760
15	40,9	2,73	0,752
20	53,3	2,66	0,772
25	66,8	2,67	0,760
		Mittel:	0,7495
V. Fallgewichte: $P = 11096{,}5$ mg. $p = 4513$ mg. $P/p = 2{,}459$.			
5	18,5	3,75	0,682
10	35,2	3,52	0,715
15	54,0	3,60	0,702
20	74,0	3,70	0,687
25	94,7	3,79	0,675
30	117,0	3,733	0,683
35	136,1	3,887	0,663
		Mittel:	0,6874
VI. Fallgewichte: $P = 4513$ mg. $p = 2073$ mg. $P/p = 2{,}277$.			
5	18	3,60	0,642
10	32,9	3,29	0,691
15	53,1	3,54	0,651
20	75,1	3,75	0,620
25	85,2	3,40	0,672
30	106,9	3,56	0,644
		Mittel:	0,6533

Fallhöhe in Millimetern: der schwereren Kugel h	der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
VII. Fallgewichte: $P = 2073$ mg. $p = 888$ mg. $P/p = 2{,}334$.			
5	20	4,0	0,611
10	38,4	3,84	0,630
15	60,2	4,01	0,613
20	81,7	4,08	0,603
25	96,0	3,84	0,630
30	111,5	3,83	0,631
		Mittel:	0,6196
VIII. Fallgewichte: $P = 613$ mg. $p = 295$ mg. $P/p = 2{,}078$.			
5	18,1	3,62	0,568
10	34,4	3,44	0,592
15	57,6	3,84	0,544
20	74,7	3,73	0,555
25	85,7	3,43	0,593
30	103,8	3,46	0,589
35	120,6	3,446	0,591
		Mittel:	0,5760
IX. Fallgewichte: $P = 295$ mg. $p = 141$ mg. $P/p = 2{,}092$.			
10	35,9	3,59	0,577
20	71,5	3,62	0,573
25	89,8	3,57	0,580
30	103,3	3,44	0,597
		Mittel:	0,5817
X. Fallgewichte: $P = 141$ mg. $p = 74$ mg. $P/p = 1{,}905$.			
10	31,5	3,15	0,561
15	49,8	3,32	0,537
		Mittel:	0,549
XI. Fallgewichte: $P = 74$ mg. $p = 36{,}5$ mg. $P/p = 2{,}028$.			
5	15,6	3,1	0,625
10	35,0	3,5	0,564
15	50,1	3,34	0,586
20	71,6	3,58	0,554
		Mittel:	0,582

In der zweiten Versuchsreihe wurde eine auf dem Tisch unmittelbar aufliegende, viereckige Eisenplatte verwendet, die durch Bleikugeln erschüttert wurde. Die Dimensionen

der Platte sind 204—167 und $5^1/_2$ mm, das Gewicht beträgt 1461 g.

Zweite Versuchsreihe.

Schallerzeugung durch Herabfallen von Bleikugeln auf eine Eisenplatte.

I. Fallgewichte: $P = 351\,750$ mg. $p = 180\,100$ mg. $P/p = 1,953$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	13,9	2,78	0,655
10	27,8	2,78	0,655
15	43,1	2,87	0,635
20	57,9	2,89	0,631
25	68,6	2,74	0,664
		Mittel:	0,648

II. Fallgewichte: $P = 180\,100$ mg. $p = 89200$ mg. $P/p = 2,019$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	14,9	2,98	0,643
10	26,9	2,69	0,710
15	44,4	2,96	0,647
20	54,5	2,72	0,702
25	69,2	2,77	0,689
30	77,4	2,58	0,741
		Mittel:	0,688

III. Fallgewichte: $P = 45368$ mg. $p = 23626$ mg. $P/p = 1,920$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	17,5	3,5	0,527
10	32,7	3,27	0,556
15	49,8	3,32	0,543
20	62,8	3,14	0,570
25	80,0	3,20	0,561
40	120,3	3,01	0,592
60	184,3	3,07	0,582
80	267,5	3,34	0,541
100	303,9	3,04	0,587
130	398,0	3,06	0,583
		Mittel:	0,564

IV. Fallgewichte: $P = 23626$ mg. $p = 11096$ mg. $P/p = 2,029$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
10	37,9	3,79	0,567
20	72,6	3,63	0,586
40	154,0	3,85	0,559
60	212,0	3,54	0,598
80	280	3,50	0,599
100	344	3,44	0,611
130	430	3,31	0,629
		Mittel:	0,607

V. Fallgewichte: $P = 11096$ mg. $p = 4513$ mg. $P/p = 2,459$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	22,0	4,4	0,607
10	39,3	3,93	0,658
15	65,9	4,39	0,608
20	87,6	4,38	0,609
25	106,8	4,27	0,620
		Mittel:	0,620

VI. Fallgewichte: $P = 4513$ mg. $p = 2073$ mg. $P/p = 2,277$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	20,0	4,00	0,592
10	34,9	3,49	0,657
15	51,2	3,41	0,669
20	68,6	3,43	0,666
25	86,6	3,46	0,663
30	100,4	3,35	0,698
		Mittel:	0,657

VII. Fallgewichte: $P = 2073$ mg. $p = 888$ mg. $P/p = 2,334$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	19,5	3,90	0,624
10	37,7	3,77	0,639
15	53,4	3,56	0,667
20	69,7	3,48	0,681
25	91,9	3,68	0,651
30	110,9	3,66	0,653
		Mittel:	0,652

VIII. Fallgewichte: $P = 295$ mg. $p = 141$ mg. $P/p = 2,092$.

Fallhöhe in Millimetern: der schweren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
5	14,2	2,84	0,707
10	29,7	2,97	0,678
15	42,4	2,83	0,709
20	63,8	3,19	0,636
25	82,8	3,31	0,616
30	101,3	3,37	0,607
		Mittel:	0,659

In der dritten Versuchsreihe liess ich Eisenkugeln auf die Eisenplatte fallen, die ebenso wie in der zweiten Reihe gelagert war. Es wurde, wie man sieht, mit relativ sehr schweren Eisenkugeln (bis zu 238 g) experimentirt. Die schwere Eisenplatte würde leichte Gewichte, die auch nur von mässiger Höhe herabfallen, zu mehrfachem Rückprallen veranlassen. Die Kugel von annähernd 15 g begann, bei 211 mm Fallhöhe in sehr geringem Grad zurückzuprallen.

Dritte Versuchsreihe.

Schallerzeugung durch Herabfallen von Eisenkugeln auf eine Eisenplatte.

Fallhöhe in Millimetern: der schwereren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern: der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
I. Fallgewicht: $P = 29993$ mg.	$p = 15331$ mg.	$P/p = 1,956$.	
10	33,0	3,30	0,562
20	66,2	3,31	0,561
40	143,5	3,50	0,536
60	211,0	3,51	0,534
		Mittel:	0,5482
II. Fallgewicht: $P = 119\,405$ mg.	$p = 60015$ mg.	$P/p = 1,989$.	
10	36,0	3,60	0,552
20	73,6	3,68	0,528
40	150,7	3,77	0,518
60	223,0	3,71	0,525
80	289,5	3,62	0,535
100	356,5	3,56	0,541
120	418,0	3,48	0,551
140	502,0	3,58	0,539
		Mittel:	0,5361
III. Fallgewicht: $P = 234\,000$ mg.	$p = 119\,405$ mg.	$P/p = 1,960$.	
10	33,5	3,35	0,556
20	66,9	3,34	0,558
40	129,5	3,24	0,572
60	203,0	3,38	0,552
80	261,5	3,27	0,568
		Mittel:	0,5612

Bei der vierten Versuchsreihe fielen Eisenkugeln auf eine gewöhnliche Schieferschreibtafel; dieselbe ist von einem 25 mm breiten und 9 mm dicken Rahmen von Tannenholz eingefasst. Die freie Schieferoberfläche ist 229 mm lang und 157 mm breit. Die Dicke der Tafel beträgt 4 mm; ihre Unterfläche steht, wenn die Tafel auf den Tisch gelegt wird, von der Tischfläche um $2^1/_2$ mm ab, sodass die Schwingungen der Tafel nicht beeinträchtigt werden. Schwere Kugeln waren bei dieser Schallquelle von selbst ausgeschlossen.

Vierte Versuchsreihe.

Schallerzeugung durch Herabfallen von Eisenkugeln auf eine Schiefertafel.

Fallhöhe in Millimetern der schwereren Kugel h	Fallhöhe in Millimetern der leichteren Kugel H	$\frac{H}{h}$	ε
I. Fallgewichte: $P = 1748$ mg. $p = 790$ mg. $P/p = 2{,}213$.			
5	18,9	3,76	0,606
10	36,1	3,61	0,619
		Mittel:	0,612
II. Fallgewichte: $P = 3170$ mg. $p = 1748$. $P/p = 1{,}813$.			
5	15,2	3,02	0,538
10	27,8	2,78	0,582
20	57,1	2,85	0,568
		Mittel:	0,563
III. Fallgewichte: $P = 5463$ mg. $p = 3170$ mg. $P/p = 1{,}723$.			
5	13,5	2,50	0,592
10	26,1	2,61	0,567
20	54,0	2,70	0,548
30	79,9	2,66	0,556
		Mittel:	0,566
IV. Fallgewichte: $P = 15331$ mg. $p = 5463$ mg. $P/p = 2{,}814$.			
5	32,3	6,46	0,554
10	62,4	6,24	0,565
20	132,6	6,63	0,547
		Mittel:	0,555

Um auch eine nach Form und Material von den übrigen ganz besonders abweichende Schallquelle zu prüfen, benutzte ich zwei Cylinder von Tannenholz, die in der Längsrichtung der Fasern gedreht waren.[1]) Jeder der zwei Cylinder wurde jeweils nur von einer Fallkugel erschüttert. Sie waren 11 cm lang und hatten einen Durchmesser von 5 cm. Zwischen Tisch und unterem Cylinderende befand sich eine einfache Lage Baumwollbiber. Als Fallkörper dienten grosse Eisenkugeln. Für $P = 234\,000$ mg und $p = 119\,405$ mg, also $P/p = 1{,}959$ erhielt ich bei sechs verschiedenen Fallhöhen die zwischen 5 und 40 mm schwankten, für ε den Mittelwerth 0,697, bei dem Gewichtspaare 119 405 und 60015 mg (also $P/p = 1{,}989$) war ε im Mittel = 0,739. Die ε der einzelnen Fallhöhen schwankten nur wenig und in keinem einseitigen Sinn. Ich konnte diese Versuche nicht fortsetzen, weil die Anwendung schwacher Gewichte sich von selbst

1) Holzcylinder der Art veranlassen viel weniger ein Rückprallen der Fallkugeln, als wenn dieselben nach der Querrichtung gedreht sind. Ich habe — nebenbei bemerkt — gefunden, dass das Holz den Schall besser in der Querrichtung leitet, als in der Längsrichtung.

verbot; die Jahresringe stehen nämlich bei diesen Cylindern weit auseinander, und man erhält einen deutlich stärkeren Schall, wenn zufällig eine Stelle eines Jahresringes getroffen wird, als beim Aufschlagen auf die weichere Zwischenmasse.

Von sonstigen Versuchsreihen, die ich bisher angestellt habe, will ich nur noch eine hervorheben, die unter besonders abweichenden Versuchsbedingungen ausgeführt worden ist. Als Schallquellen für die beiden Vergleichsschalle dienten zwei kleine, vollkommen gleiche, runde Zinkscheiben von fast 4 cm Durchmesser und 42 g Gewicht, die nebeneinander auf den Tisch gelegt wurden; es sind dieselben, welche ich bei den Versuchen der Tabelle IV meines in der Zeitschrift für Biologie unlängst erschienenen Artikels „über das Gesetz der Schwächung des Schalles bei seiner Fortpflanzung in der freien Luft" benutzt habe. Die Bleikugel *P* war 23626, *p* 11045 mg schwer, also ist $P/p = 2{,}139$.

Fallhöhe der Kugeln in Millimetern		$\frac{H}{h}$	ε
d. schwereren Kugel	der leichteren Kugel		
8	28,3	3,54	0,600
20	75,0	3,77	0,575
40	144,2	3,60	0,593
60	222,0	3,66	0,586
		Mittel:	0,589

In obigen fünf Versuchsreihen wurde für grösstmöglichste qualitative und quantitative Verschiedenheit sowohl der schallenden Platten, als der Fallkugeln gesorgt; auch habe ich theilweise Schallstärken (Fallgewichte und Fallhöhen) zur Beobachtung gebracht, die bedeutend über diejenigen hinausgehen, welche auch bei den weitgehendsten phonometrischen Aufgaben bei der Messung des Schallleitungsvermögens der Körper und der Stärke von gegebenen, in ihren Ursachen nicht messbaren Schallen irgend noch in Betracht kommen können.

Sämmtliche unter den denkbar verschiedensten Bedingungen angestellten Versuche beweisen aufs neue, das, wenigstens bei allen krustischen Apparaten, mit denen wir vor-

läufig allein messend experimentiren können, ein sehr ansehnlicher Theil der lebendigen Kraft des Anstosses nicht in — man gestatte diesen Ausdruck — akustische Bewegung umgesetzt wird. Der Exponent 1, welcher von der bisher gültigen Theorie gefordert wird, kommt niemals vor; um zur ersten Orientirung beiläufige Mittelwerthe aufzustellen, ist das mittlere ε:

in der	ersten Versuchsreihe	0,660
„ „	zweiten „	0,633
„ „	dritten „	0,574
„ „	vierten „	0,548

Das Endmittel dieser Exponenten wäre somit 0,6037, eine Zahl, die meiner früheren Angabe 0,59 und den Oberbeck'schen Werthen (etwas über 0,6) sehr nahe steht. Eine wirkliche Gleichheit der Exponenten bei verschiedenem Material und verschiedenen Grössen der Schallquellen, sowie bei allen möglichen Variationen des Materiales und der Grösse der Fallkugeln habe ich auch früher nicht annehmen können; wohl aber wird es begreiflich erscheinen, wenn bei der Auswerthung der Schallstärken auf dem noch ganz unbekannten Gebiete eine Mittelzahl der Exponenten vorläufig zu Grunde gelegt wurde.

Die erste Versuchsreihe (Erschütterung einer schweren Zinnplatte durch Bleikugeln, deren extremste Gewichtsunterschiede sich auf das Fünfhundertfache belaufen) zeigt die verhältnissmässig grössten Differenzen der ε bei den verschiedenen Gewichten. ε ist im Maximum (0,800) bei dem stärksten Gewicht der Bleikugel, von da ab sinkt der Werth von ε, um von $P = 613$ mg an bis $P = 36$ mg zwischen 0,5820 und 0,549 unregelmässig hin- und herzuschwanken. Dass das oben erwähnte Sinken kein genau stetiges ist, versteht sich bei der Schwierigkeit dieser Messungen oder, richtiger gesagt, bei der zur genauen Feststellung der Endwerthe immer noch nicht hinreichenden Zahl von Einzelmessungen von selbst. Ich darf die Bemerkung nicht unterlassen, dass für die meisten Aufgaben der praktischen Phonometrie bei Anwendung dieser Schallquelle Fallgewichte von 613 bis zu 36 mg herab vollkommen hinreichen, die, wie aus der Tabelle

sich ergibt, ε-Werthe aufweisen, die vorläufige Abweichungen bieten, welche fast nur innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler sich bewegen, wenn die Anzahl der Versuche eine relativ beschränkte ist.

In der zweiten Versuchsreihe (Erschütterung einer schweren Eisenplatte durch Bleikugeln, deren Gewichte bis auf das Zweitausendfünfhundertfache differirten) stellte sich vom Maximalgewicht an eine Abnahme des ε-Werthes von 0,648, resp. 0,688 bis auf 0,564 und dann wieder eine mässige Zunahme bis auf 0,659 heraus. Der vorläufige Minimalwerth 0,564, jenseits welches die ε wieder etwas ansteigen, (irgend ein Nachbargewicht könnte wohl zu einem noch etwas geringeren ε führen) gibt uns in diesem noch so dunkeln Gebiete eine neue Erscheinung, deren Richtigkeit, wie ich glaube, durch eine genügende Zahl von Einzelversuchen garantirt ist. Aber auch hier wieder begegnen wir in derjenigen ziemlich breiten Region mässiger Schallstärken, mit denen wir es allein zu thun haben bei den phonometrischen Messungen, ganz übereinstimmenden ε-Werthen, d. h. für:

4,513	bis	2,073	g	ist	$\varepsilon = 0,657$
2,073	„	0,888	„	„	$\varepsilon = 0,652$
0,295	„	0,141	„	„	$\varepsilon = 0,659$.

In der dritten Versuchsreihe (Erschütterung einer Eisenplatte durch schwere Bleikugeln, deren Gewicht blos um das Funfzehnfache differiren) haben wir ε-Werthe, die so wenig voneinander abweichen, dass die Differenzen vorerst (bis die Zahl der Einzelmessungen sich gehörig wird vermehrt haben) vernachlässigt werden können.

In der vierten Versuchsreihe (Erschütterung einer Schieferplatte durch Eisenkugeln) war die Versuchsbreite durch die Beschaffenheit der Schallquelle beschränkt. Fallkugeln über 15 g Gewicht konnte ich nicht verwenden (vielleicht verändern schon die verwendeten schwersten Kugeln das Gefüge der Schieferplatte ein wenig), andererseits konnte mit leichten Kügelchen nicht experimentirt werden, weil sie von der Platte bei auch nur mässigen Fallhöhen zurückgeworfen werden. Mit Ausnahme der schwächsten Fallkugeln ($\varepsilon = 0.612$)

sind die ε-Werthe den übrigen schweren Kugeln vorläufig als so gut wie identisch (0,566 bis zu 0,555) zu betrachten.

Untersuchen wir die zweite Hauptfrage: wie verändert sich der Werth von ε, wenn bei demselben Paar von Fallkugeln die absolute Fallhöhe abgeändert wird. Ich habe mich in der Regel auf Fallräume zwischen 0,5 bis 3,0 cm beschränkt, weil diese allein bei fast allen phonometrischen Messungen in Frage kommen; doch bin ich in einzelnen Versuchsgebieten auch weit hinauf gegangen, bis zu 140 cm.

Man sieht aus den Tabellen, dass mit zunehmenden absoluten Fallhöhen die ε-Werthe um mässige Beträge ganz unregelmässig zu- und wieder abnehmen. Nur eine ausserordentlich viel grössere Zahl von Versuchen, als der einzelne Beobachter sie auch beim besten Willen aufbringen kann, wird eine Regel im An-, resp. Absteigen der ε-Werthe bei Veränderung der absoluten Fallhöhen nachweisen können. Stellen wir die Endmittel der ε-Werthe zusammen, welche bei demselben Material der Fallkugeln und derselben Schallplatte an die einzelnen Fallhöhen gebunden sind, so muss natürlich von denjenigen Fallhöhen grösstentheils abstrahirt werden, die nicht in sämmtlichen Unterreihen der Versuche geprüft wurden. Die Durchsicht der Tabellen wird aber zeigen, dass auch bei extremen Fallhöhen die ε-Werthe sich innerhalb der bei den geringen Fallhöhen gefundenen Grenzen bewegen.

Wir erhalten dann folgende ε-Werthe im Endmittel:

	Fallhöhe der schwereren Kugel in Millimet.					
	5	10	15	20	25	30
Erste Versuchsreihe: Bleikugeln. Zinntafel	0,6733	0,6964	0,6714	0,6596	0,6743	—
Zweite Versuchsreihe: Bleikugeln. Eisenplatte	0,6380	0,6662	0,6558	0,6542	0,6505	0,6747
Dritte Versuchsreihe: Eisenkugeln. Eisenplatte	—	0,5567	—	0,5490	—	—
Vierte Versuchsreihe: Eisenkugeln. Schieferplatte	0,561	0,571	—	0,554	—	(0,556)

	Fallhöhe der schwereren Kugel in Millimet.					
	40	60	80	100	120	140
Erste Versuchsreihe: Bleikugeln. Zinntafel . .	—	—	—	—	—	—
Zweite Versuchsreihe: Bleikugeln. Eisenplatte .		—	—	—	—	—
Dritte Versuchsreihe: Eisenkugeln. Eisenplatte .	0,5420	0,5370	0,5515	0,541	0,551	0,539
Vierte Versuchsreihe: Eisenkugeln. Schieferplatte	—	—	—	—	—	—

Aus obigen Erfahrungen folgt: Es gibt ein allgemeines Schallmaass. Bei Fallkugeln desselben Materials und einer schwingungsfähigen Platte von bestimmtem Material und bestimmter Grösse (Gewicht) verändert sich mit zunehmendem Gewicht der Fallkugeln der Werth von ε entweder nur mässig oder in anderen Fällen nicht merklich, während er sich andererseits unter allen Umständen nicht (merklich) verändert bei variablen Fallhöhen. Aber auch in den Fällen, wo der ε-Werth sich etwas ändert mit veränderlichem Gewicht der Fallkugeln, bleibt ε constant innerhalb jener hinlänglich grossen Schwankungsbreite der Gewichte der Fallkugeln, welche allein in Anwendung gezogen werden können bei den meisten specielleren Untersuchungen der Phonometrie über das Schallleitungsvermögen der Körper jedweder Aggregatform und über die Stärke derjenigen Schalle, deren Ursprung entweder unbekannt ist, oder deren Bedingungsursachen der Messung wenigstens nicht zugänglich sind. Auf diese letzte Frage, die mich zu weit führen würde, kann und darf ich aber bei dieser Gelegenheit nicht eingehen.

Meine früheren und jetzigen Versuche sind ausschliesslich zu dem praktischen Zweck angestellt worden, die der Messung der Schallstärken zu Grunde liegenden Normen aufzufinden. Von diesem Standpunkt aus braucht das Deficit an akustischer Wirkung bei unseren krustischen Apparaten nicht weiter untersucht zu werden.

Es würde sich hier je nach Umständen, d. h. nach dem

Material der Kugel und der Schallplatte handeln: 1) um Temperaturerhöhungen der Fallkugel und der Schallplatte. 2) um bleibende kleine Formveränderungen der weicheren Kugeln, z. B. von Blei, resp. der weicheren Schallplatte, z. B. dem Zinn an der Aufschlagstelle der Kugeln, 3) um blos momentane, der Messung übrigens zugängliche Formveränderungen der letzteren Art, z. B. bei Eisenkugeln und 4) um ein öfters vorkommendes Rollen der Kugel von der Aufschlagsfläche aus. Versuchsanordnungen, die zu einem stärkeren Rückprall der Kugel führen, sind ohnedies durchaus zu vermeiden.

VIII. *Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper; von A. Ritter in Aachen.*

Fünfzehnte Abtheilung.

---

§ 61. Weitere Ausbildung der in § 58 aufgestellten Hypothese über die Constitution der Sonnenflecken.

Dass die Temperatur der Sonnenmasse von der Oberfläche nach dem Inneren zunimmt, bis zu einer gewissen Tiefe wenigstens, darf als eine feststehende Thatsache betrachtet werden. Denn die in der Oberflächenschicht unzweifelhaft stattfindenden Verticalströmungen müssen nothwendig eine Annäherung an die adiabatische Form der Zustandslinie herbeiführen, und der adiabatischen Zustandslinie entspricht unter allen Umständen ein Wachsen der Temperatur mit zunehmendem Drucke.

Als mindestens in hohem Grade wahrscheinlich darf ferner angenommen werden, dass die Temperatur der Sonnensubstanz in dem Kerne eines Sonnenflecks niedriger ist als in der Umgebung desselben. Wenn zwar die Möglichkeit nicht in Abrede gestellt werden kann, dass die durch Beobachtungen constatirte geringere Wärmeausstrahlung des Flecks auch in dem geringeren Emissionsvermögen der Fleckenmasse ihren Grund haben könnte, so scheint doch die näher lie-

gende Hypothese den Vorzug zu verdienen, nach welcher eine Temperaturdifferenz als Ursache dieser Ausstrahlungsdifferenz zu betrachten ist.

Die Schwierigkeit, welche der Erklärung der Sonnenflecken entgegensteht, liegt hiernach in der Beantwortung der Frage: „Wie ist es zu erklären, dass kalte dunkle Massen in eine Tiefe von mehreren hundert Meilen unter der Oberfläche der Photosphäre gelangen und Wochen oder Monate lang daselbst inmitten einer heisseren Umgebung existiren können?“

In § 58 wurde bereits der Versuch gemacht, diese Schwierigkeit zu überwinden mittelst einer Hypothese, nach welcher der Kern eines Sonnenflecks zu deuten ist als ein längere Zeit hindurch stetig sich erneuernder Vorrath von verdichteter Masse, welche von der Oberfläche in beschleunigter Bewegung herabstürzend zunächst eine gewisse lebendige Kraft erlangt und dieselbe später in den tiefer liegenden dichteren Schichten allmählich wieder verliert, wobei die vorher erzeugte lebendige Kraft in Wärme umgewandelt wird. Im Anschlusse an diesen Erklärungsversuch wurde die fernere Hypothese aufgestellt: dass jenes Maximum der lebendigen Kraft ungefähr mit der Region des Kernes zusammenfällt, und dass die Umwandlung der lebendigen Kraft in Wärme erst in tiefer liegenden Schichten erfolgt, aus welchen eine directe Ausstrahlung in den leeren Raum nicht mehr stattfindet.

Aus der nachfolgenden specielleren Untersuchung der Zustandsänderung, welche die sinkende Masse erleidet, wird sich ergeben, dass diese letztere Hypothese zur Erklärung der Erscheinung des Sonnenflecks nicht unbedingt nothwendig ist, dass vielmehr eine infolge ihrer grösseren Dichtigkeit herabsinkende Masse von grossem Volumen bei genügendem Verdichtungsgrade unter allen Umständen dem Beobachter als dunkler Fleck auf hellem Untergrunde sich darstellen muss — auch dann, wenn jener Umwandlungsprocess in geringerer Tiefe sich vollzieht in einer Schicht, aus welcher noch directe Strahlen in das Auge des Beobachters gelangen.

Am einfachsten gestaltet sich diese Untersuchung, wenn

zunächst die sinkende Masse als starr und unzusammendrückbar vorausgesetzt wird, was z. B. annäherungsweise zulässig sein würde, wenn die sinkende Masse im festen Aggregatzustande sich befände. Denkt man sich eine Kugel von der Grösse und Masse der Sonne umgeben von einer mehrere tausend Meilen hohen Wasserdampfatmosphäre, so kann es nach § 47 keinen Zweifel unterliegen, dass bei hinlänglich grosser Entropie dieser Atmosphäre, d. h. bei hoher Temperatur und geringer Dichtigkeit derselben, die ganze Masse dieser Atmosphäre mit Ausnahme einer verhältnissmässig dünnen Oberflächenschicht die Zustandsform des Knallgases annehmen würde, wenn dieselbe auf irgend eine Weise — z. B. durch die bei fortwährendem Durcheinanderrühren stattfindende Vermischung der oberen mit den unteren Schichten — in den adiabatischen oder indifferenten Gleichgewichtszustand versetzt würde. Während des Durcheinanderrührens findet ein abwechselndes Sinken und Steigen der Massen statt, und da der totale Wärmeinhalt eines sinkenden Massenkilogramms (nach § 47) jedesmal um 480 Wärmeeinheiten zunimmt, während dasselbe um eine Meile tiefer herabsinkt, so wird dieser Wärmeinhalt in einer verhältnissmässig geringen Tiefe unter der Oberfläche schon eine Grösse erreichen, bei welcher eine Dissociation der sinkenden Dampfmasse eintreten muss. Während dieselbe das Dissociationsgebiet durchsinkt, welches nach § 47 ebenfalls eine Schicht von verhältnissmässig geringer Höhe bildet, geht die Zustandsform des Wasserdampfes allmählich in die des Knallgases über, und weiter unten wird die Atmosphäre ausschliesslich in der letzteren Zustandsform sich befinden.

Da der totale Wärmeinhalt eines Massenkilogramms in der Tiefe von 1000 Meilen schon etwa 480 000 Wärmeeinheiten beträgt, so werden höchst wahrscheinlich in den unteren Schichten dieser Atmosphäre bei der hier vorausgesetzten geringen Dichtigkeit derselben, die beiden Dissociationsproducte Wasserstoff und Sauerstoff ihrerseits wiederum eine Dissociation erleiden. Jedoch soll auf die Möglichkeit einer solchen abermaligen Dissociation hier keine Rücksicht genommen werden; vielmehr soll vorläufig vorausgesetzt wer-

den, dass die ganze unterhalb des ersten Dissociationsgebietes befindliche Masse die Zustandsform des Knallgases stets beibehält, und dass dieses letztere die Eigenschaften eines idealen Gases besitzt.

Wenn in einer solchen Atmosphäre, welche in ihrem oberen Theile aus Wasserdampf, in ihrem unteren Theile aus Knallgas besteht, eine Eiskugel herabsinkt — also eine Masse, welche aus demselben Stoffe bestehend eine dritte Zustandsform desselben repräsentirt — so wird die Geschwindigkeit der sinkenden Bewegung anfangs bis zu einem gewissen Maximalwerthe zunehmen und später nach Ueberschreitung der Stelle, an welcher der Widerstand gleich dem Ueberschusse des Gewichts über den Auftrieb wurde, allmählich wieder abnehmen. Die Geschwindigkeit des Sinkens wird gleich Null werden, nachdem die Eismasse diejenige Schicht erreicht hat, deren Dichtigkeit dieselbe Grösse besitzt wie die (hier als constant vorausgesetzte) Dichtigkeit des Eises.

Nach dem Aufhören der sinkenden Bewegung wird die gesammte von dem Ueberschusse des Gewichts über den Auftrieb verrichtete Arbeit in Wärme umgewandelt worden sein, auch derjenige Theil, welcher anfangs in lebendige Kraft umgewandelt wurde. Die erzeugte Wärmequantität setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine auf die in der Umgebung der Bahn befindlichen atmosphärischen Massen übertragen wird, während der andere Theil, von der Eiskugel selbst aufgenommen, zum Schmelzen und zum Verdampfen, resp. zur Dissociation ihrer Oberflächenschicht verwendet wird, deren Massentheile nach und nach mit der umgebenden Atmosphäre sich vermischen. Dieser letztere Vorgang bedingt einen stetig fortschreitenden Massenverlust der sinkenden Eiskugel, welcher jedoch verhältnissmässig um so kleiner sein wird, je grösser das anfängliche Volumen der Eiskugel war. Bei sehr grossem Volumen der Eiskugel würde die ganze Dauer der sinkenden Bewegung nur wenige tausend Secunden betragen (vgl. § 57), und man darf annehmen, während dieser kurzen Zeit nur eine dünne Oberflächenschicht sich auflösen wird, deren Masse im Ver-

hältniss zur Masse der ganzen Kugel als verschwindend klein vernachlässigt werden darf.

Da die Temperatur des Eises nicht über Null Grad Celsius steigen kann, so wird die sinkende Eiskugel ihre schliessliche Ruhelage ohne wesentliche Temperaturerhöhung erreichen. Die zur Ruhe gelangte Eiskugel würde daher von oben gesehen auch dann als dunkler Fleck erscheinen müssen, wenn dieselbe in einer Schicht sich befindet, aus welcher noch eine directe Ausstrahlung in den leeren Raum stattfindet. Die ganze während des Fallens erzeugte Wärme wird nach Beendigung der Fallbewegung in der umgebenden Atmosphäre aufgespeichert worden sein und nach irgend einem Gesetze längs der durchlaufenen Fallbahn sich vertheilt haben.

Als Argumente für die Zulässigkeit dieser Schlussfolgerungen können die bei fallenden Meteoriten beobachteten Erscheinungen gelten, nach welchen es keinem Zweifel unterliegen kann, dass die Bahn eines als Meteorit niederfallenden Eisblocks, welcher mit einer Geschwindigkeit von mehreren Meilen pro Secunde in die Erdatmosphäre eintrat, einen hellglühenden Streifen bilden würde, obwohl die Temperatur des Eisblocks selbst dabei nicht über Null Grad Celsius steigen würde.

Nachdem die sinkende Eiskugel vorläufig zur Ruhe gelangte in derjenigen Knallgasschicht, deren Dichtigkeit gleich der des Eises ist, wird infolge des von Seiten der wärmeren Umgebung auf dieselbe stattfindenden Wärmeüberganges die Eismasse nach und nach in die Zustandsform des Dampfes und hernach in die Zustandsform des Knallgases übergeführt werden, wobei die Verdampfungswärme und die Dissociationswärme latent werden. Bei dem hier vorausgesetzten grossen Volumen der Eismasse wird dieser verhältnissmässig langsam sich vollziehende Umwandlungsprozess Wochen oder Monate lang fortdauern können, wobei der Umgebung beträchtliche Wärmequantitäten entzogen werden, und eine locale Temperaturerniedrigung in dieser Region hervorgebracht wird.

Da die gasförmigen Auflösungsproducte unmittelbar nach Beendigung des Auflösungsprocesses zunächst noch eine ver-

hältnissmässig niedrige Temperatur besitzen, so werden dieselben — in ähnlicher Weise wie bei einer auf heissem Wasser schwimmenden Eismasse das herabrinnende Schmelzwasser — eine Tendenz zum Sinken auch ferner noch beibehalten, und wenn die Masse des ganzen Weltkörpers dieselbe Zusammensetzung hat, wie die hier angenommene Atmosphäre, so ist es bei hinreichend grossem Anfangsvolumen der sinkenden Masse möglich, dass ein Theil derselben bis zum Mittelpunkte herabsinkt und denselben erreicht mit einer Temperatur, welche immer noch niedriger ist als die vorher daselbst herrschende Temperatur. Das Endresultat wird alsdann genau dasselbe sein, wie wenn dem Kerne des Weltkörpers eine bestimmte Wärmequantität entzogen und dieselbe auf die weiter aussenliegenden Massentheile übertragen worden wäre. Ein wiederholtes Herabsinken von grossen Eismassen würde daher eine dauernde Erniedrigung der Mittelpunktstemperatur und eine Annäherung an die isothermische Zustandslinie zur Folge haben können (vergl. § 54 und § 55).

Beim Herabsinken einer unzusammendrückbaren flüssigen Masse würde die ganze entwickelte Reibungswärme aus zwei Theilen sich zusammensetzen, von denen der eine durch äussere, der andere durch innere Reibung erzeugt wird. In Bezug auf den ersteren Theil darf man unter den oben gemachten Voraussetzungen wiederum annehmen, dass derselbe auf die Umgebung der sinkenden Masse übergeht. Die durch innere Reibung erzeugte Wärme dagegen wird von der sinkenden Masse selbst aufgenommen.

Wenn die sinkende Masse im gasförmigen Aggregatzustande sich befindet, so wird ausser der von dem Ueberschusse des Gewichts über den Auftrieb verrichteten Arbeit, welche in Reibungswärme umgewandelt wird, auch die von dem zunehmenden Drucke verrichtete Compressionsarbeit in Wärme umgewandelt, und diese letztere Wärmequantität, welche abkürzungsweise die Compressionswärme genannt werden kann, wird ganz von der sinkenden Masse aufgenommen.

Die Geschwindigkeit des Sinkens wird allmählich bis

auf Null abnehmen, während die sinkende dichtere Gasmasse nach dem Erreichen ihrer oberen Dichtigkeitsgrenze derjenigen Schicht sich nähert, welche die gleiche Dichtigkeit besitzt. Wenn mit Q die innere Wärme eines Massenkilogramms dieser Schicht bezeichnet wird, mit C die während des Sinkens pro Massenkilogramm der sinkenden Masse erzeugte Compressionswärme, und mit W die pro Massenkilogramm derselben entwickelte Reibungswärme, in welche die von dem Ueberschusse des Gewichts über den Auftrieb verrichtete Arbeit umgewandelt wurde, so ist die Summe der beiden Wärmequantitäten C und W gleich Q zu setzen, wie die beistehende Figur erläutert, in welcher die Linie AD die Zustandsänderung der sinkenden Masse, und die Linie AB die adiabatische Zustandslinie der umgebenden Atmosphäre darstellt. Diese beiden Linien treffen in einem Punkte A zusammen, dessen Coordinaten p und v resp. den Druck und das spec. Volumen für diejenige Schicht darstellen, in welcher die sinkende Masse zur Ruhe gelangt. Die in Meterkilogrammen ausgedrückten Wärmequantitäten C und W sind durch die beiden schraffirten Flächentheile dargestellt, deren Summe das mechanische Aequivalent der dem Zustandspunkte A entsprechenden inneren Wärme Q repräsentirt.

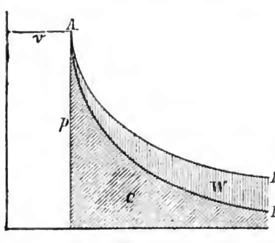


Fig. 24.

Wenn die sinkende Masse stets dieselbe Dichtigkeit wie die Umgebung besass, so wird $W = 0$ und $C = Q$. Wenn dagegen die Dichtigkeit der sinkenden Masse vor dem Herabsinken bereits ihren oberen Grenzwerth erreicht hatte, so wird $C = 0$ und $W = Q$. Da von der Reibungswärme unter allen Umständen ein beträchtlicher Theil, nämlich der durch äussere Reibung erzeugte Theil, auf die Umgebung übertragen wird, so ergibt sich für das Wärmedeficit der herabgesunkenen Masse ein um so grösserer Werth, je grösser die Dichtigkeit war, welche die sinkende Masse vor dem Herabsinken bereits besass. Wenn man also annimmt, dass

in einer bestimmten Tiefe unter der Oberfläche der Photosphäre die Dichtigkeit der Sonnenmasse eine Grenze erreicht, bei welcher das Wachsen der Dichtigkeit mit zunehmender Tiefe nahezu aufhört, so würde man nach der Hypothese des § 58 den Bildungsprocess eines Sonnenflecks etwa auf folgende Weise sich vorzustellen haben.

Die in der Region des Flecks als continuirlicher Strom herabsinkende Masse, welche vor dem Beginne des Sinkens infolge der vorausgegangenen Wärmeentziehung bereits in verdichtetem Zustande sich befand, wird beim Erreichen jener Tiefengrenze in ihrer Bewegung gehemmt, und infolge der dadurch bedingten Stauung des Stromes wird die herabgesunkene Masse daselbst scheibenartig sich ausbreiten, wobei theils durch innere, theils durch äussere Reibung ihre lebendige Kraft allmählich in Wärme umgewandelt wird. Von der ganzen während des Herabsinkens entwickelten Reibungswärme wird derjenige Theil, welcher durch äussere Reibung erzeugt wurde, auf die heissere Umgebung übertragen, während die herabgesunkene Masse selbst, mit dem entsprechenden Wärmedeficit behaftet, in relativ kaltem Zustande ihre Ruhelage erreicht und einstweilen in diesem Zustande daselbst verharrt.

Infolge jener Wärmeübertragung auf die heissere Umgebung werden rings umher aufsteigende Ströme sich bilden, und zwar in einer gewissen Entfernung vom Fleck, da in unmittelbarer Nähe desselben die Entstehung von aufsteigenden Strömen durch die mechanische Wirkung der herabstürzenden Massen verhindert wird. Die auf solche Weise entstehenden aufsteigenden Ströme werden in der Umgebung des Flecks die Erscheinung der Fackeln und Protuberanzen hervorbringen. Die zu grösserer Höhe emporsteigenden Massen erleiden — durch die kalte Fleckenmasse zum Theil geschützt vor der Wärmezustrahlung von unten her — in ihrer der Ausstrahlung stärker exponirten Lage einen mehr oder weniger beträchtlichen Entropieverlust und sinken infolge der hierdurch bedingten Dichtigkeitszunahme nachher wieder herab, indem sie der über dem Fleckenkerne bereits vorhandenen vertical abwärts gerichteten Strömung sich an-

schliessend, der Fleckenmasse neue Vorräthe zuführen. Während unten die Fleckenmasse langsam sich auflöst und allmählich tiefer herabsinkt, findet eine beständige Neubildung von oben her statt, und dieser Neubildungsprocess kann unter günstigen Umständen jenem Auflösungsprocesse längere Zeit hindurch die Wage halten, bis schliesslich durch das Ueberhandnehmen des letzteren ein allmähliches Verschwinden des Flecks herbeigeführt wird.

§ 62. Ableitung eines Annäherungswerthes für den Circulationscoëfficienten der Sonnenatmosphäre.

Nach der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie der Sonnenflecken würde die herabsinkende Masse dem Beobachter nur dann als dunkler Fleck erscheinen können, wenn dieselbe vor dem Herabsinken bereits, infolge der vorausgegangenen Wärmeausstrahlung an der Oberfläche, einen genügenden Verdichtungsgrad erreicht hatte. Je grösser aber der Dichtigkeitsunterschied zwischen der sinkenden Masse und ihrer Umgebung ist, um so rascher wird das Sinken erfolgen, und um so grösser wird die pro Secunde herabsinkende Massenquantität sein müssen, um die Erscheinung des Flecks hervorzubringen. Hiernach entsteht die Frage: ob durch die an der Sonnenoberfläche stattfindende Wärmeausstrahlung in der That eine genügende Quantität von verdichteter Substanz producirt wird, um für die in den Flecken und dunklen Poren beständig herabstürzenden Ströme verdichteter Massen die erforderliche Massenzufuhr zu liefern.

Zur Beantwortung dieser Frage würde in erster Linie eine genauere numerische Bestimmung des in § 56 mit μ bezeichneten Circulationscoëfficienten erforderlich sein, oder derjenigen Massenquantität, welche durchschnittlich in jeder Secunde, nach aussen sowohl als nach innen, durch jede Flächeneinheit derjenigen Kugelfläche F hindurchgeht, in welcher die Circulation das Maximum ihrer Intensität erreicht. Einer Bestimmung dieses Coëfficienten auf theoretischem Wege scheinen zur Zeit noch unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenzustehen. Solange keine anderweitige Anhaltepunkte vorliegen, wird daher eine Vergleichung des Cir-

culationscoëfficienten der Sonnenatmosphäre mit dem annähernd bekannten Circulationscoëfficienten der Erdatmosphäre als der einzige Weg anzusehen sein, auf welchem wenigstens vorläufige Anhaltepunkte für eine Schätzung der Grösse jenes Coëfficienten gewonnen werden können.

Da als Ursache der Circulation die Wärmeausstrahlung an der Oberfläche zu betrachten ist, so wird man in erster Annäherung, indem man die Wirkung als proportional der Ursache voraussetzt, den Circulationscoëfficienten unter sonst gleichen Umständen als proportional derjenigen Wärmequantität anzunehmen haben, welche pro Secunde von jeder Flächeneinheit der Oberfläche ausgestrahlt wird, woraus z. B. in Bezug auf die Sonne folgen würde, dass der Circulationscoëfficient auf die Hälfte seines Werthes sich reduciren würde, wenn statt 14000 nur 7000 Wärmeeinheiten pro Secunde von jeder Flächeneinheit ihrer Oberfläche ausgestrahlt würden. Nach dieser Hypothese würden also der Circulationscoëfficient der Sonnenatmosphäre und der Circulationscoëfficient der Erdatmosphäre zu einander sich verhalten müssen wie die beiden Wärmequantitäten, welche pro Flächeneinheit in jeder Secunde, resp. von der Sonnenatmosphäre und von der Erdatmosphäre ausgestrahlt werden.

Die von der Erde ausgestrahlte Wärmequantität, zu welcher die eigene Wärme des Erdkörpers nur einen verschwindend kleinen Beitrag liefert, ist jedenfalls kleiner als diejenige Wärmequantität, welche der Erde von der Sonne zugestrahlt wird, da ein Theil der zugestrahlten Wärme reflectirt wird. Die ganze von der Erde ausgestrahlte Wärmequantität setzt sich zusammen aus dem Theile, welcher von der festen Erdkugel selbst, und dem Theile, welcher von ihrer Atmosphäre ausgestrahlt wird. Der letztere Theil ist demnach jedenfalls kleiner als die ganze Wärmequantität, welche der Erde von der Sonne zugestrahlt wird. Wenn man also nur darauf ausgeht, für den Circulationscoëfficienten der Sonnenatmosphäre einen unteren Grenzwerth zu finden, d. h. einen Werth, welcher jedenfalls kleiner ist als der wirkliche, so wird man der Berechnung desselben die Annahme zu Grunde legen dürfen, dass die von der Erdatmo-

sphäre ausgestrahlte Wärmequantität so gross ist, wie die ganze Wärmequantität, welche der Erde von der Sonne zugestrahlt wird.

Da die Entfernung der Erde von der Sonne etwa 215 Sonnenhalbmesser beträgt, so ist die Wärmequantität, welche von der Sonnenoberfläche pro Flächeneinheit ausgestrahlt wird, 215^2- oder 46225 mal so gross als diejenige Wärmequantität, welche durch jede Flächeneinheit einer Kugelfläche hindurchgeht, deren Halbmesser gleich dem Erdbahnhalbmesser ist, und da die Erdoberfläche viermal so gross ist als eine Kreisfläche vom Halbmesser der Erdkugel, so beträgt die Wärmequantität, welche jeder Flächeneinheit ihrer Oberfläche durchschnittlich zugestrahlt wird, den 185000-sten Theil von der Wärmequantität, welche von der Sonnenoberfläche pro Flächeneinheit ausgestrahlt wird. Nach den obigen Voraussetzungen würde man also – unter Vorbehalt später auszuführender Correctionen wegen sonstiger Unterschiede zwischen den Zuständen der beiden Atmosphären — vorläufig anzunehmen haben, dass der Circulationscoëfficient der Sonnenatmosphäre mehr als das 185000-fache von dem Circulationscoëfficienten der Erdatmosphäre beträgt.

Die in der Erdatmosphäre stattfindende Circulation wird bedingt durch die in den Regionen der barometrischen Maxima beständig herabsinkenden und die in den Regionen der barometrischen Minima beständig aufsteigenden Luftströme. Durch jede innerhalb der Atmosphäre liegende mit der Erdoberfläche concentrische Kugelfläche — folglich auch durch diejenige, in welcher die Circulation das Maximum ihrer Intensität erreicht — geht in jeder Secunde ebensoviel Luft in der Richtung nach aussen als in der Richtung nach innen hindurch. Zur Berechnung des Circulationscoëfficienten der Erdatmosphäre genügt daher die Ermittelung derjenigen Luftmasse, welche in aufsteigender Bewegung durch jene Kugelfläche pro Secunde hindurchströmt. Einen unteren Grenzwerth findet man für diese Massenquantität, indem man unter Vernachlässigung aller in den Regionen der übrigen barometrischen Minima gleich-

zeitig aufsteigenden Luftmassen ausschliesslich die in dem permanenten Minimum der Calmenzone des Aequators aufsteigenden Luftmassen berücksichtigt. Die mit dem Wechsel der Jahreszeiten veränderliche Lage und die infolge ungleichmässiger Vertheilung von Land und Meer unregelmässig gestaltete Form der Begrenzungslinie dieser Zone dürfen hierbei als unwesentlich ausser Betracht gelassen werden.

Die gesammte Luftmasse, welche von beiden Seiten her durch die Passatwinde hineingeführt wird, gelangt in der Calmenzone zum Aufsteigen und wird oben durch die Antipassatwinde wieder hinausgeführt. Als meridionale Componente der durchschnittlichen Passatwindgeschwindigkeit kann eine Geschwindigkeit von mindestens 4 m pro Secunde angenommen werden. Die Höhe der unteren Luftschicht, welche an der Strömung des Passatwindes theilnimmt, kann nach den am Pic von Teneriffa und nach den an Rauchsäulen amerikanischer Vulkane gemachten Beobachtungen auf mindestens 3000 m, und das Gewicht derselben auf mindestens 3000 kg pro Quadratmeter der Bodenfläche geschätzt werden. Die von beiden Seiten her in die Calmenzone pro Secunde hineinströmende Luftmasse beträgt hiernach mindestens 12000 kg pro Meter der Begrenzungslinie. Die Peripherie jedes der beiden Parallelkreise, welche die Calmenzone begrenzen, kann wegen geringer Breite der Zone gleich dem Aequatorumfange $2r\pi$ gesetzt werden. Die ganze in die Calmenzone hineinströmende Luftmasse beträgt also mindestens: $2 . 2r\pi . 12000$ kg pro Secunde. Indem man diese Zahl durch die Erdoberfläche $4r^2\pi$ dividirt, erhält man den Werth:

(594) $$\mu' = \frac{12\,000}{r} = \frac{12\,000}{6\,370\,000} = 0{,}0019 \text{ kg},$$

welcher als unterer Grenzwerth für den Circulationscoëfficienten der Erdatmosphäre betrachtet werden darf. Nach der oben aufgestellten Hypothese ergibt sich hieraus für den Circulationscoëfficienten der Sonnenatmosphäre der vorläufige Annäherungswerth:

(5) $$\mu = 185\,000 . \mu' = 350 \text{ kg}.$$

In der Höhe von 3000 m über der Meeresfläche beträgt die mittlere Dichtigkeit der Erdatmosphäre nahezu 1 kg pro Cubikmeter. Der obige Werth würde also der Annahme entsprechen, dass die mittlere Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre ebenfalls etwa 1 kg beträgt in derjenigen Kugelfläche *F*, welche dem Maximum der Circulationsintensität entspricht. Wenn dagegen die Sonnenatmosphäre in dieser Fläche eine Dichtigkeit von γ kg pro Cubikmeter besässe, so würde die obige Zahl noch mit γ zu multipliciren sein, und man erhielte den Werth:

$$\mu = 350 . \gamma. \tag{596}$$

In Bezug auf die Lage der Fläche *F* darf als wahrscheinlich angenommen werden, dass dieselbe annähernd zusammenfällt mit derjenigen Grenzfläche, bis zu welcher die directe Wärmeausstrahlung in den leeren Raum sich erstreckt (vgl. § 56). Denn bei allen oberhalb dieser Fläche befindlichen Massentheilen wird infolge der beständigen Wärmeentziehung eine Tendenz zum Sinken vorhanden sein; bei allen tiefer liegenden dagegen infolge ihrer vor directer Ausstrahlung geschützten Lage eine Tendenz zum Steigen. In jeder höher liegenden Fläche wird die Intensität der Circulation geringer sein, weil die aufsteigenden Massen zum Theil schon vor dem Erreichen derselben aufhören werden zu steigen; in jeder tiefer liegenden Fläche wird die Intensität der Circulation ebenfalls geringer sein, weil die sinkenden Massen zum Theil schon vor dem Erreichen derselben aufhören werden zu sinken.

Da in grossen Sonnenflecken der Kern des Flecks etwa 800 Meilen unter der Oberfläche der Photosphäre liegt, so darf man annehmen, dass jene Grenztiefe, bis zu welcher die directe Ausstrahlung sich erstreckt, ebenfalls mindestens 800 Meilen beträgt. Denn nach der im vorigen Paragraphen entwickelten Theorie ist die Fleckenmasse dichter als ihre Umgebung. Wenn also in der dichteren Fleckenmasse schon Strahlen aus einer Tiefe von 800 Meilen in das Auge des Beobachters gelangen, so darf man vielleicht annehmen, dass in der Umgebung des Flecks Strahlen aus mindestens ebenso

grosser Tiefe ausgesendet werden. Da zur Zeit keine Beobachtungsresultate vorliegen, aus welchen ein zuverlässiger Werth für die Dichtigkeit der Sonnenmasse in dieser Tiefe abgeleitet werden könnte, so wird man auf die Ausführung der oben angedeuteten Correction allerdings vorläufig verzichten und mit dem in Gleichung (596) gefundenen Ausdrucke einstweilen sich begnügen müssen, aus welchem wenigstens für das Verhältniss der beiden Grössen μ und γ ein Annäherungswerth entnommen werden kann.

Gegen die Hypothese, welche der Ableitung dieses Annäherungswerthes oben zu Grunde gelegt wurde, könnte der allerdings berechtigte Einwand erhoben werden: dass die Intensität der Circulation keineswegs lediglich durch die absolute Grösse der ausgestrahlten Wärmequantität, sondern wesentlich auch durch die Ausstrahlungsdifferenz zwischen den verschiedenen Gebieten der Oberfläche bedingt wird. In letzterer Beziehung sind aber für das Zustandekommen einer grossen Ciculationsintensität die Umstände an der Erdoberfläche verhältnissmässig günstiger als an der Sonnenoberfläche. Denn während in Bezug auf die Sonne angenommen werden darf, dass die Wärmeausstrahlung nach aussen hin, sowie die Wärmezuführung von innen her, ziemlich gleichförmig über die ganze Oberfläche sich vertheilt, findet an der Erdoberfläche in dieser Hinsicht ein beträchtlicher Unterschied statt zwischen Aequatorialzone und den Polarregionen. In der ersteren überwiegt die Zustrahlung, in der letzteren die Ausstrahlung. Infolge dessen würde die Temperatur der Atmosphäre in der Aequatorialzone beständig zunehmen und in den Polarregionen beständig abnehmen müssen, wenn nicht infolge der Circulation eine stetige Erneuerung der betreffenden Luftmassen stattfände. Die Berücksichtigung dieses Unterschiedes zwischen den Zuständen der beiden Atmosphären würde daher eine Verkleinerung des für den Coëfficienten μ anzunehmenden Werthes bedingen.

Andererseits ist zu berücksichtigen, dass in der Erdatmosphäre einer Vergrösserung der Circulationsintensität das Vorhandensein der festen Erdoberfläche hemmend entgegenwirkt, während die in der Sonnenmasse stattfindende

Circulation infolge des Nichtvorhandenseins einer solchen hemmenden festen Fläche ungehindert bis zum Mittelpunkte der Sonne sich erstrecken kann. Die Berücksichtigung dieses letzteren Unterschiedes würde also eine Vergrösserung des für den Coëfficienten μ anzunehmenden Werthes bedingen.

Wenn auch die Frage: wie weit die Einflüsse dieser in entgegengesetztem Sinne wirkenden Factoren einander gegenseitig compensiren, vorläufig unentschieden gelassen werden muss, so scheint doch aus den Ergebnissen der obigen Untersuchung der Schluss gezogen werden zu dürfen, dass der provisorischen Annahme des oben gefundenen Werthes: $\mu = 350\gamma$ für den Circulationscoëfficienten der Sonne zur Zeit keine erhebliche Bedenken entgegenstehen. Dieser Werth würde aber vollkommen ausreichen, um in Bezug auf die nach der Theorie des vorigen Paragraphen in den Flecken und dunklen Poren beständig herabstürzenden Ströme die Möglichkeit der erforderlichen Massenzufuhr genügend zu erklären.

Denn unter Voraussetzung eines verhältnissmässig geringen Dichtigkeitsunterschiedes zwischen den sinkenden Massen und ihrer Umgebung würde selbst dann, wenn man annehmen wollte, dass die Querschnittsflächen der herabstürzenden Ströme die ganze eine Hälfte der Fläche F bedecken, für die sinkenden Massen immer noch eine mittlere Geschwindigkeit von nahezu 700 m pro Secunde sich ergeben. Da die durchschnittliche Kernflächensumme der eigentlichen Flecken nur etwa 120 Milliontel der Sonnenoberfläche beträgt, so würde für die letzteren eine Strömungsgeschwindigkeit von einigen Meilen pro Secunde mittelst des obigen Werthes von μ recht wohl erklärt werden können, sobald für die dunklen Poren oder kleinen Flecken eine entsprechend kleinere Geschwindigkeit, nämlich eine Geschwindigkeit von weniger als 700 m pro Secunde angenommen wird (vgl. § 56). Gegen die im vorigen Paragraphen entwickelte Theorie scheint daher von dieser Seite her ein wesentlicher Einwand nicht erhoben werden zu können.

§ 63. Bedenken gegen die auf Annahme eines Condensationsprocesses gegründeten Theorie der photosphärischen Vorgänge.

Nach der oben entwickelten Theorie würde die Erscheinung der Flecken und Fackeln an der Sonnenoberfläche — so weit es sich nur um die „Thatsache“ der Erscheinung handelt — schon genügend erklärt werden können durch die Annahme, dass die ganze Sonnenmasse in rein gasförmigem Aggregatzustande sich befindet. An der Oberfläche einer z. B. ganz aus Wasserstoffgas bestehenden Kugel von der Grösse und Masse der Sonne müsste die infolge der Wärmeausstrahlung stattfindende Circulation ebensowohl wie an der wirklichen Sonnenoberfläche die Erscheinung von dunkleren und helleren Flecken hervorbringen. Hiermit ist jedoch die Frage noch nicht entschieden: ob auch die „Art“ der Erscheinung durch jene Annahme genügend erklärt werden könnte, oder ob nicht vielmehr zur Erklärung der wirklich beobachteten photosphärischen Vorgänge die Annahme eines „Condensationsprocesses“ hinzugezogen werden müsste, und namentlich ist es diese letztere Frage, welche noch in nähere Erwägung zu ziehen sein wird.

Nach dieser letzteren, unter anderen neuerdings von Hastings[1]) vertretenen, Hypothese würde die Photosphäre als ein wolkenartiges Gebilde zu betrachten sein, dessen grössere Leuchtkraft durch das grössere Emissionsvermögen der in dem gasförmigen Medium suspendirten festen oder flüssigen Condensationsproducte bedingt wird. Wenn man sich einstweilen auf den Standpunkt dieser letzteren Hypothese versetzt, so würde man sich die in der Photosphäre beobachteten Erscheinungen etwa auf folgende Art erklären können.

Die aufsteigenden Gasmassen erreichen während ihrer infolge der Druckabnahme stattfindenden adiabatischen Ausdehnung in einer bestimmten Höhe ihre Condensationsgrenze, und da das Emissionsvermögen der Condensationsproducte

1) Charles S. Hastings, Sill. Journ. **20.** p. 33. 1881. Beibl. **5.** p. 188. 1881.

beträchtlich grösser ist als das des umgebenden gasförmigen Mediums, so wird die Leuchtkraft der aufsteigenden Massen beim Ueberschreiten der Condensationsgrenze zunächst zunehmen. Später aber wird die Leuchtkraft wieder abnehmen, weil die Temperatur der aufsteigenden Masse beständig abnimmt, eines Theils infolge der fortgesetzten Ausdehnung, andererseits infolge der durch das grössere Emissionsvermögen der Condensationsproducte verstärkten Wärmeausstrahlung. Da das specifische Gewicht der Condensationsproducte grösser ist als das des gasförmigen Mediums, in welchem dieselben sich bilden, so werden die Condensationsproducte stets eine Tendenz zum Sinken besitzen und infolge dessen hinter den rascher aufsteigenden umgebenden Gasmassen allmählich zurückbleiben. Da von unten her stets neu aufsteigende Gasmassen die Condensationsgrenze überschreiten, so werden oberhalb der letzteren die Condensationsproducte allmählich sich anhäufen. Infolge dessen entsteht über der unteren schwächer leuchtenden rein gasförmigen Masse eine hellleuchtende Wolkenschicht von allmählich zunehmender Höhe und Dichtigkeit. Da an der oberen Grenzfläche dieser Wolkendecke die Condensationsproducte infolge der intensiveren Wärmeausstrahlung ihre Leuchtkraft rasch verlieren, so bildet sich über der hellleuchtenden Wolkenschicht eine dunkle rauchartige Oberflächenschicht, welche eine Zeit lang getragen von dem aufsteigenden Strome infolge ihres wachsenden specifischen Gewichtes schliesslich neben dem aufsteigenden Strome wieder herabstürzt, während in dem letzteren die Wolkenschicht infolge des Zuströmens der Condensationsproducte von unten her beständig sich erneuert. Die in den Lücken zwischen den aufsteigenden Strömen herabstürzenden dunklen rauchartigen Massen bilden die dunklen Poren und Flecken, während die von der dunklen Rauchdecke zeitweilig entblössten Gipfel der aufsteigenden Säulen als hell leuchtende Lichtkörner und Fackeln erscheinen.

Die in dem Fleckentrichter herabsinkenden dunklen Wolkenmassen erleiden durch den mit der Tiefe wachsenden Druck eine adiabatische Compression, und infolge der dadurch bedingten Zunahme ihrer inneren Wärme wird in den un-

teren Regionen eine allmähliche Wiederauflösung der Condensationsproducte stattfinden, während von oben her stets neue dunkle Wolkenmassen nachströmen. Bei der Auflösung der Condensationsproducte wird Wärme gebunden, und hierdurch würde nach obiger Theorie die dauernde Abkühlung sowie die Verminderung der Leuchtkraft in der unteren Region des Fleckentrichters zu erklären sein.

Wenn zwar anscheinend die vorstehend entwickelte Theorie allen Anforderungen genügt, welche an eine Theorie der Sonnenflecken gestellt werden können, so sind doch gegen die Annahme derselben gewichtige Einwände zu erheben.

Nach der obigen Theorie müsste für die photosphärische Wolkenschicht eine Dicke von mindestens 800 Meilen angenommen werden, da diese Schicht mindestens bis zur Region der Fleckenkerne herabreichen müsste. In dieser Tiefe ist aber der totale Wärmeinhalt eines Massenkilogramms um mindestens 800.480 oder 384 000 Wärmeeinheiten grösser als an der Oberfläche der Photosphäre (vergl. § 47). Die Zahl 384 000 entspricht der Annahme des adiabatischen oder indifferenten Gleichgewichtszustandes. Da in der Oberflächenschicht stets eine Abweichung von dem letzteren, nach der Seite des labilen Gleichgewichtszustandes hin stattfindet, und diese Abweichung ein noch rascheres Abnehmen der Temperatur in der Richtung von innen nach aussen bedingt, so würde man mit Berücksichtigung dieser Abweichung einen noch grösseren Werth für jene Wärmedifferenz erhalten.

Wenn also mit T_0 die absolute Temperatur an der Oberfläche der Photosphäre bezeichnet wird, und mit T die Temperatur in der Tiefe von 800 Meilen unterhalb dieser Oberfläche, so würden einem Massenkilogramm der Sonnensubstanz mehr als 384 000 Wärmeeinheiten zugeführt werden müssen, um bei constantem Drucke die Temperatur desselben von T_0 bis T zu erhöhen. Nach der obigen Theorie müsste also in einem aufsteigenden Massenkilogramm die Condensation bereits beginnen bei einem Zustande, in welchem dasselbe noch eine Totalwärme von jedenfalls beträchtlich mehr als 384 000 Wärmeeinheiten enthält. Hiernach müsste entweder angenommen werden, dass die Verdampfungswärme

der Condensationsproducte eine Grösse besitzt, welche die aller bekannten Stoffe weit übersteigt, oder man muss in der Tiefe von 800 Meilen unter der Oberfläche eine so hohe Temperatur voraussetzen, dass die Entstehung und dauernde Existenz von festen oder flüssigen Condensationsproducten bei dieser Temperatur in Rücksicht auf die verhältnissmässig geringe Dichtigkeit der Photosphäre als äusserst unwahrscheinlich angesehen werden müsste.

Bei allen bekannten Gasen kann eine Condensation nur stattfinden entweder infolge einer Temperaturerniedrigung oder infolge einer Dichtigkeitsvergrösserung. Da aber nach den übereinstimmenden Angaben der Beobachter die Temperatur der Photosphäre sehr hoch, und ihre Dichtigkeit sehr gering vorausgesetzt werden muss, so ist die Annahme eines in derselben stattfindenden Condensationsprocesses mindestens als eine sehr gewagte Hypothese zu bezeichnen. Mit besserer Aussicht auf Erfolg würde vielleicht die Behauptung vertheidigt werden können: dass die Sonnenmasse überhaupt keine festen oder tropfbar flüssigen Bestandtheile enthalten kann, dass vielmehr ein festes oder flüssiges Massentheilchen schon ausserhalb der Sonnenkugel infolge seines grossen Absorptionsvermögens durch Wärmezustrahlung fast momentan in Dampf verwandelt werden würde, wenn dasselbe in unmittelbarer Nähe der strahlenden Oberfläche sich befände.

Ein anderer Einwand gegen die Condensationstheorie richtet sich speciell gegen die nach obiger Theorie vorauszusetzende Zustandsänderung der in dem Fleckentrichter herabsinkenden dunklen Wolkenmassen, deren Dichtigkeit jedenfalls grösser ist als die der umgebenden Massen. Die Zustandsänderung der sinkenden Masse kann man sich durch eine adiabatische Curve in der Temperaturfläche veranschaulichen. Die Höhe des Durchschnittspunktes, in welchem die Grenzlinie des Condensationsgebietes in der Temperaturfläche von irgend einer adiabatischen oder isentropischen Curve geschnitten wird, hängt ab von dem Entropiewerthe oder von der Grösse der isentropischen Constanten, welche die Lage jener adiabatischen Curve charakterisirt.

Dieser Durchschnittspunkt wird eine um so höhere Lage annehmen, oder eine um so höhere Temperatur repräsentiren, je kleiner der Entropiewerth, oder je kleiner das Volumen ist, welches jenem Durchschnittspunkte entspricht. Da die Entropie der sinkenden Masse kleiner ist als die der steigenden Masse, so wird die Temperatur, bei welcher die sinkende Masse die Grenze des Condensationsgebietes überschreitet, höher sein als diejenige, bei welcher die steigende Masse die Grenze des Condensationsgebietes überschreitet. Wenn also oben angenommen wurde, dass die steigende Masse beim Ueberschreiten der Condensationsgrenze sogleich in einen hellleuchtenden Zustand übergeht, so wird die Annahme gerechtfertigt sein, dass die sinkende Wolkenmasse, während dieselbe ihrer Wiederauflösung sich nähert, ebenfalls hellleuchtend erscheinen muss, um so mehr als bei gleichem Drucke die Quantität der Condensationsproducte in der sinkenden Masse stets grösser ist als in der steigenden Masse. Nach dieser Annahme würde aber schlechterdings nicht zu erklären sein, weshalb die in dem unteren Theile des Fleckentrichters befindliche Wolkenmasse dem Beobachter in Wirklichkeit nicht hellleuchtend, sondern dunkel erscheint. Denn dass die in dem oberen Theile des Trichters befindliche dunkle Wolkenmasse die Ursache der Verdunkelung nicht sein kann, beweisen die leuchtenden radialen Streifen der Penumbra, welche ohne wahrnehmbare Lichtschwächung bis zum Kerne des Flecks hinab deutlich erkennbar sind.

Um diesem letzteren Einwurfe gegenüber die Condensationshypothese dennoch aufrecht zu erhalten, würde man schon gezwungen sein: statt der oben in Bezug auf die sinkenden und steigenden Bewegungen gemachten Annahme das gerade Gegentheil anzunehmen, nämlich in den Flecken statt der „sinkenden" eine „steigende" Bewegung und in den Fackeln statt der „steigenden" eine „sinkende" Bewegung anzunehmen.

Nach dieser neuen Hypothese würde die Entropie der in dem Fleckentrichter aufsteigenden Masse grösser sein als die der umgebenden Massen, und da dem grösseren Entropie-

werthe eine niedrigere Temperatur des Condensationspunktes entspricht, so wäre es allerdings denkbar, dass in der aufsteigenden Masse die Condensation erst beginnt bei einer Temperatur, welche zum Leuchten schon nicht mehr hoch genug ist, während beim nachherigen Herabsinken in den Lichtkörnern und Fackeln die Wiederauflösung der Condensationsproducte stattfinden kann bei einer Temperatur, welche vollkommen ausreicht, um dieselben hellleuchtend erscheinen zu lassen. Die Dunkelheit des Fleckenkernes müsste nach dieser Hypothese erklärt werden durch das geringere Emissionsvermögen der aus dem Inneren hervorbrechenden zwar heisseren, aber rein gasförmigen Massen.

Indessen auch diese Annahme führt zu Widersprüchen oder wenigstens zu Unwahrscheinlichkeiten. Denn das geringere Emissionsvermögen bedingt zugleich ein geringeres Absorptionsvermögen, und die in dem Fleckentrichter befindliche — an sich zwar schwächer leuchtende — Gasmasse würde bei ihrem geringen Absorptionsvermögen nicht verhindern können, dass tief aus dem Inneren noch Strahlen in das Auge des Beobachters gelangen aus einer Tiefe, in welcher die Gasmassen infolge der höheren Temperatur und des höheren Druckes mit continuirlichem Spectrum leuchten. Dass unter solchen Umständen der aufsteigende Strom dem Beobachter als dunkler Fleck sich darstellen sollte, ist eine Annahme, welche mit bekannten Gesetzen der Optik in Widerspruch zu stehen scheint.

Wenn aber einerseits die consequente Durchführung der Condensationshypothese stets zu Widersprüchen oder Unwahrscheinlichkeiten führt, und andererseits für die Nothwendigkeit eines Heranziehens dieser Hypothese der Nachweis überhaupt noch fehlt, so ist vorläufig keine Veranlassung vorhanden, die zur Erklärung der photosphärischen Vorgänge anscheinend vollkommen ausreichende Hypothese des rein gasförmigen Aggregatzustandes der Photosphäre zu verlassen.

IX. *Ueber die Dissociationswärme des Wasserstoffmolecüls und das electrische Leuchten der Gase; von Eilhard Wiedemann.*

In einem im Jahre 1880 erschienenen Aufsatze[1]) habe ich aus Versuchen über die Entladungen in verdünnten Gasen für den Wasserstoff den Satz abgeleitet:

„Die von einer Entladung an die Gewichtseinheit (1 g) abzugebende Wärmemenge, welche nöthig ist, um das Bandenspectrum in das Linienspectrum umzuwandeln, ist unabhängig vom Druck des Gases und dem Querschnitt des Rohres; dieselbe beträgt 128 300 Cal.“

In den an die experimentellen Bestimmungen sich anschliessenden theoretischen Betrachtungen habe ich, ausgehend von der Annahme, dass das Bandenspectrum von Schwingungen des Molecüls, das Linienspectrum von solchen der getrennten Atome herrühre, ausgesprochen:

„Dass einem Gramm Wasserstoff von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 126 000 Grammcalorien zugeführt werden müssen.“

Am Schluss einer Arbeit aus dem Jahre 1882 über das zweite Spectrum des Wasserstoffs drückt sich Hr. Hasselberg[2]) in Bezug auf meine Versuche folgendermassen aus: „Die von Wiedemann für die zur Ueberführung des (sc. Banden-)Spectrums in das aus den drei charakteristischen Linien bestehende abzugebende Energiemenge gefundene Wärmemenge wird demnach nichts anderes sein, als das thermische Aequivalent der entsprechenden Dissociationsarbeit.“

Dass ich selbst schon vollständig diesen Schluss aus meinen Versuchen gezogen habe, geht aus dem obigen zweiten mitgetheilten Satz hervor. Auch habe ich in den sich dort anschliessenden Betrachtungen die Bedeutung dieses Resultates für die Thermochemie hervorgehoben.

In dem zweiten Bande der „Thermochemischen Untersuchungen“ stellt Hr. Thomsen als wahrscheinlich hin, dass die Stickstoffatome im Molecül sehr fest aneinander gebunden sind. Ich habe auf ein derartiges Verhalten schon früher[3])

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 233 u. 253. 1880.
2) Hasselberg, Mem. Acad. St. Petersb. (7) **30.** p. 23. 1882.
3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **5.** p. 511. 1878.

hingewiesen und dasselbe dadurch begründet, dass, wenn man dasselbe Capillarrohr nacheinander mit Wasserstoff und Stickstoff bei gleichem Druck füllt, gleiche Entladungen hindurchführt, und diese eine solche Stärke haben, dass das Linienspectrum im Wasserstoff sich zeigt, dann im Stickstoff doch nur noch Banden zu sehen sind. Letztere werden erst von Linien ersetzt, wenn bei jeder Entladung eine weit grössere Electricitätsmenge übergeht, d. h. wenn man Condensatoren oder grosse Funkenstrecken in den Stromkreis bringt. Da, wie mein Vater nachgewiesen hat, gleiche Electricitätsmengen in Wasserstoff und Stickstoff caeteris paribus gleiche Wärmemengen erzeugen, so folgt ohne weiteres, dass zur Zerlegung eines Stickstoffmolecüls eine weit grössere Wärmemenge nöthig ist, als zu der eines Wasserstoffmolecüls.

In einem im vorigen Heft erschienenen sehr interessanten Aufsatz bespricht Hr. W. Siemens das Leuchten der Flammen und erwähnt dabei auch das Leuchten der Gase unter dem Einfluss der electrischen Entladungen. Ich kann mich in hohem Grade freuen, dass ein so hervorragender Forscher zu denselben Resultaten gelangt ist, die ich schon früher[1]) ausführlich entwickelt habe. Ich hatte ausgeführt, dass durch die Ladung der Electroden in dem umgebenden Medium eine diëlectrische Polarisation erzeugt wird, und zwar in der Weise, dass die Aetherhüllen der einzelnen Gasmolecüle deformirt werden und während der Rotation der Molecüle um ihre Axen eine bestimmte Orientirung beibehalten. Tritt eine Entladung ein, so pflanzt sich zunächst die dadurch hervorgerufene plötzliche Aenderung der diëlectrischen Polarisation von der Electrode aus durch die Aetherhüllen der Gasmolecüle fort und setzt sie dadurch in Schwingungen. Daneben kann freilich auch ein Uebergang freier Electricität von der Electrode aus von Molecül zu Molecül stattfinden. Daran anschliessend habe ich die Uebertragung dieser Bewegungen näher untersucht und ausgeführt, dass sie so stark werden können, dass die Molecüle selbst auseinander fallen und sich in ihre Atome zerlegen. Ganz ebenso meint Hr. Siemens, könne man sich die Glüherscheinungen durch oscillirende Umlagerungen der Aetherhüllen und Gasmolecüle, durch welche der Uebergang der Electricität vermittelt wird, erklären.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 246. 1880.

X. *Ueber eine Methode, die Mikrometerschraube zu prüfen; von K. R. Koch.*

(Aus den Berichten über die Verhandl. d. naturforsch. Ges. zu Freiburg i. B. VIII. 123. mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Es fehlt bis jetzt an einer Methode, den Fehler einer Mikrometerschraube für ein gewisses, bei einer Messung benutztes Intervall direct zu bestimmen. Meine „Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle des regulären Systems“[1]) erforderten sehr genaue Dimensionsbestimmungen der dabei angewandten Krystallstäbchen; hierbei war es nöthig, auch den Fehler der Sphärometerschraube, mit der alle Messungen gemacht waren, mit möglichster Präcision zu ermitteln. Ich verfuhr hierbei folgendermassen: An die Spitze der Schraube war ein Glasplättchen senkrecht zur Axe der Schraube gekittet und der oberen Fläche eines Reflexionsprismas gegenübergestellt; letzteres befand sich auf einem Tischchen, das durch drei Schrauben beliebig gehoben, gesenkt und geneigt werden konnte. Bei hinreichend kleiner Neigung der oberen Fläche des Reflexionsprismas gegen das an die Schraube angekittete Glasplättchen entstehen im Natriumlichte zwischen diesen Interferenzfranzen. Zählt man nun an einem Punkte, der genau in der Verlängerung der Axe der Schraube liegen muss, die Anzahl der Interferenzstreifen, welche an diesem Punkte bei einer gewissen Drehung der Schraube vorübergewandert sind, so gibt die Anzahl derselben multiplicirt mit der bekannten Grösse der halben Wellenlänge des Natriumlichtes direct die gesuchte Grösse, um welche man die Schraube gehoben oder gesenkt hat.

In den Freiburger Berichten[2]) habe ich eine solche Ausmessung von ca. 1 mm der Sphärometerschraube (zwei ganzen Umdrehungen) vollständig verzeichnet und setze die ersten zwanzig Ablesungen hierher. Die Steighöhe der Schraube betrug 0,5 mm. Der Umfang der Trommel war in 500 Theile getheilt. Jede Zahl der folgenden Tabelle ist das Mittel aus mindestens drei Messungen desselben Intervalles.

---

1) K. R. Koch, Wied. Ann. **18.** p. 325. 1883.

2) K. R. Koch, Freib. Ber. **8.** p. 123. 1882.

Fortschreitende Bewegung der Schraube gemessen			Fortschreitende Bewegung der Schraube gemessen		
durch Ablesung an der Trommel (in Mikromillimetern)	in Halbwellen des Natriumlichtes (in Mikromillimet.)	Correction (in Mikromillimetern)	durch Ablesnng an der Trommel (in Mikromillimetern)	in Halbwellen des Natriumlichtes (in Mikromillimet.)	Correction (in Mikromillimetern)
18,20	17,68	−0,52	9,83	9,82	−0,01
18,00	17,68	−0,32	10,10	10,02	−0,08
17,80	17,68	−0,12	10,30	10,02	−0,28
10,10	10,02	−0,08	9,83	9,92	+0,09
9,90	10,02	+0,12	10,00	9,87	−0,13
10,00	10,02	+0,02	10,20	10,02	−0,18
9,90	10,02	+0,12	10,00	10,02	+0,02
10,10	10,02	−0,08	10,00	9,97	−0,03
10,30	10,32	+0,02	10,10	10,02	−0,08
10,13	10,02	−0,11	10,00	10,02	+0,02

Aus der vollständigen Tabelle in den Freiburger Berichten geht hervor, dass ein sogenannter periodischer Fehler nicht existirt. Dagegen ist der fortschreitende Fehler nicht unbeträchtlich, nämlich 3,5 pro Mille, d. h. für den verglichenen Millimeter gibt die Ablesung an der Schraubentrommel die gemessene Länge um 0,0035 mm zu gross. Ebenso lässt sich für jedes beliebige dazwischenliegende andere Intervall, da die Vergleichung von 10 zu 10 Mikromillimetern (= 0,001 mm) ausgeführt ist, die Correction auf 0,0002 mm genau angeben. Die Interferenzstreifen selbst würden allerdings eine Genauigkeit von ca. 0,00003 mm erlauben; die Ablesungsfehler und die Theilungsfehler der Trommel sind indessen erheblich grösser.

Diese Methode ist jedoch auch der Anwendung auf grössere Längen fähig. Es hindert nichts, bei genügender Sorgfalt die Schraube einer Längentheilmaschine auf diese Weise auf eine beliebige Länge nach Lichtwellen auszuwerthen. Hierdurch erscheint es möglich, als Maasseinheit direct die Lichtwelle, das einzige wirkliche und für die gleiche Vibrationsintensität unveränderliche Naturmaass zu benutzen.

Freiburg i. B., Phys. Inst., 25. Mai 1882.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 4.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XVIII.

I. *Ueber die galvanische Ausmessung der Windungsfläche einer Drahtspule; von F. Kohlrausch.*

(Der k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. Aug. 1882.)[1]

Zu den wichtigsten galvanischen Constanten eines Stromleiters gehört diejenige, welche die Fernwirkung des Stromes bestimmt, das ist die Maximalprojection der von dem Leiter umschlossenen Fläche. Deren Ausmessung ist in den letzten Jahren mehrfach discutirt worden.[2] Man hat naturgemäss

1) Veranlasst durch die oben citirte Mittheilung hat Hr. F. Himstedt ein sinnreiches Verfahren beschrieben, welches die zu messende Windungsfläche einer Spule mittelst bifilarer Aufhängung auf eine bekannte Windungsfläche zurückführt. (Ber. naturforsch. Ges. Freib. i. B. 8. p. 2. 1882). Dieses Verfahren würde in der That einen Vortheil bieten, dass man nämlich im homogenen magnetischen Felde arbeitet, und dass daher keine Correctionen hereintreten. Auch spart man Abstandsmessungen. Dafür aber muss ausserdem ein Galvanometer beobachtet werden. Ferner scheinen mir zwei Nachtheile vorzuliegen. Erstens ist die geometrische Ausmessung einer Normalfläche unstreitig weniger genau als unsere Ausmessung eines Halbmessers der Tangentenbussole. Dann aber beschränkt sich das Verfahren offenbar auf Flächen, die einander nicht zu sehr ungleich sind, weil sonst die Ausschläge ebenfalls eine ungünstige Ungleichheit erhalten. Unser Verfahren regulirt diesen Umstand durch die Entfernung. Da nun sehr grosse Normalflächen schwierig herstellbar sein werden, so scheint das Bifilarverfahren höchstens bei kleinen Flächen anwendbar zu sein. Ja, Spulen, wie sie zu Erdinductoren verwendet werden, genügend empfindlich bifilar und zugleich hinreichend frei von elastischer Nachwirkung aufzuhängen, dürfte überhaupt nicht leicht sein.

2) Siemens, Pogg. Ann. **127.** p. 332. 1866; Rowland, Sill. Journ. **15.** p. 288. 1878; G. Wiedemann, Electrotechn. Z. S. **3.** p. 261. 1882; Heinr. Weber, der Rotationsinductor, p. 40, Teubner 1882; Rayleigh u. Schuster, Proc. Roy. Soc. Nr. 213. p. 127. 1881; Rayleigh, Phil. Trans. 1882. **2.** p. 672.

die Fläche eines Solenoids berechnet entweder aus der gesammten Drahtlänge in Verbindung mit der Windungszahl und Gestalt des Solenoides, oder man hat die einzelnen Durchmesser mit dem Bandmaass oder dem Kathetometer bestimmt. Diese Messungen an sich lassen sich ohne Zweifel mit grosser Genauigkeit bewerkstelligen.

Ob aber die Windungsfläche selbst mit der gleichen Genauigkeit erhalten wird, hängt von einigen schwer übersehbaren Umständen ab. Man hat eingewandt, dass die Windungen der oberen Schichten sich in die Vertiefungen der unteren einlegen. Die neuesten Messungen von Heinr. Weber und von Rayleigh und Schuster ziehen dieses Einsinken in Rechnung. Ferner aber hat man noch das Bedenken erhoben, dass die unteren Drahtschichten durch die oberen zusammengedrückt werden, was besonders wegen der Nachgiebigkeit des Isolationsmittels möglich sein würde.

Als ein Mangel dieser Messungen muss endlich erwähnt werden, dass man nicht nach ihrer Beendigung eine Controle eintreten lassen kann; dass auch eine Veränderlichkeit der Rolle mit der Zeit kaum anders nachgewiesen werden könnte als durch Abwinden des Drahtes und somit durch die Zerstörung der Spule.

Wenn nun eine solche Messung auch geometrisch richtig ausgeführt wäre, so würde dieselbe doch galvanisch werthlos bleiben, falls die Isolirung der Windungen durch schadhafte Stellen oder auch durch eine Spur von Leitungsvermögen des Isolirungsmittels unvollkommen ist. Mag der Fall auch unwahrscheinlich sein, unmöglich ist er nicht, und ein Schutzmittel dagegen erscheint sehr wünschenswerth.[1])

Ohne Zweifel also würde ein Verfahren der Flächenmessung, welches diesen Bedenken nicht unterworfen ist, von Werth sein. Ich glaube, dass die hier zu beschreibende galvanische Methode, welche obendrein viel einfacher ist als die geometrische, keinen Bedenken unterliegt und einer

1) Ich meine, man sollte, um doch bis zu einem gewissen Grade die Isolation prüfen zu können, eine Spule immer aus zwei miteinander gewundenen oder vielleicht besser schichtenweise abwechselnden Drähten herstellen, wenn auch das Verfahren mühsamer ausfällt.

grossen Genauigkeit fähig ist. Mindestens wird dieselbe als Controle der geometrischen Ausmessung und der Unveränderlichkeit der Spule willkommen sein.

Die Flächenmessung der Spule hat unter anderem den Zweck, die Fernwirkung eines Stromes in der Spule zu berechnen. Offenbar kann man umgekehrt aus einer gemessenen Fernwirkung des Stromes die Flächengrösse ermitteln. Letzteres ist in sehr einfacher Weise ausführbar.

Denn die Fernwirkung des Stromes auf eine Magnetnadel lässt sich mit der erdmagnetischen Horizontalintensität in bekannter Weise vergleichen. Mit demselben Erdmagnetismus aber wird mittelst der Tangentenbussole auf dem von Weber zuerst gegebenen Wege[1]) eine Stromstärke verglichen. Somit lässt sich mittelst eines Stromes die Messung einer Windungsfläche auf eine Ausmessung der Tangentenbussole zurückführen, wenn ein und derselbe Strom beide Objecte durchfliesst.

Die Ausmessung einer Tangentenbussole aber bietet keine Schwierigkeit, wenn man sich auf eine einzige Windung oder wenigstens auf eine einzige Windungslage beschränkt. Formen der Tangentenbussole, welche gut ausmessbar sind, finden sich u. A. von mir in diesen Annalen[2]) beschrieben.

1. Uebersicht der Methode.

Einer und derselbe Strom werde durch die Spule und die Tangentenbussole geleitet. Beide Instrumente sollen folgende Stellung gegeneinander haben.

Die Spulenaxe sei jedenfalls ostwestlich gerichtet. Der Mittelpunkt der Spule habe einen Abstand a von der Nadel der Tangentenbussole. Der Spulenmittelpunkt möge liegen entweder

östlich oder westlich von der Nadel (erste Hauptlage),
oder nördlich oder südlich von der Nadel (zweite Hauptlage).

1) Weber, Result. d. magn. Vereins 1840, p. 83.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **138.** p. 7. 1869 u. Wied. Ann. **15.** p. 552. 1882.

Es sei i die Stromstärke, φ die Ablenkung der Nadel durch den Strom, M der Nadelmagnetismus, R der Halbmesser der Tangentenbussole, F die Windungsfläche der Spule.

Dann übt der Strom in der Tangentenbussole auf die Nadel das Drehungsmoment aus:

$$(1) \qquad i M \frac{2\pi}{R} \cos\varphi .$$

In der ersten Hauptlage ist die Wirkung der Spule auf die Nadel:

$$(2) \qquad 2 i M \frac{F}{a^3} \cos\varphi ,$$

in der zweiten Hauptlage fällt der Factor 2 weg.

Endlich bewirke der Erdmagnetismus und der Aufhängefaden zusammen auf die Nadel das Drehungsmoment:

$$(3) \qquad - C M \sin\varphi .$$

Die Ablenkung φ entspreche also einem Zusammenwirken des Stromes in der Spule und in der Tangentenbussole im gleichen Sinne. Wenn der Strom nur in letzterer gewendet wird, so entstehe die Ablenkung φ', welche negativ zu nehmen ist, falls sie nach der anderen Seite stattfindet als φ. Dann hat man:

$$\left(2\frac{F}{a^3} + \frac{2\pi}{R}\right) i = C \operatorname{tg}\varphi , \qquad \left(2\frac{F}{a^3} - \frac{2\pi}{R}\right) i = C \operatorname{tg}\varphi' .$$

Hieraus findet man die gesuchte Windungsfläche:

$$(4) \qquad F = \frac{a^3\pi}{R} \, \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'} .$$

In der zweiten Hauptlage tritt rechts der Factor 2 hinzu.

Wir haben hier vorausgesetzt, a sei so gross, dass die Dimensionen der Spule nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Dies kann bei dünndrähtigen Spulen von vielen Windungen vorkommen, wird aber meistens nicht zutreffen. Es ist nämlich dazu nothwendig, dass man das Quadrat der Spulendimensionen gegen das Quadrat des Abstandes a vernachlässigen darf.

Im Folgenden soll diese Beschränkung aufgegeben und zu diesem Zwecke erst die Wirkung der Spule aus geringeren

Abständen in einen rechnerisch bequemen Ausdruck entwickelt werden.

Auch die Berechnung der Wirkung der Tangentenbussole bedarf bekanntlich einiger Correctionen.

2. Fernwirkung einer Spule auf einen Punkt in ihrer Axe (erste Hauptlage).

Die Länge einer Spule sei $2s$, der innere Halbmesser r_0, der äussere r_1[1]); die Spule enthalte m Lagen von je n Windungen. Die gesammte vom Draht umschlossene Fläche F ist also:

$$F = n\int_{r_0}^{r_1} \pi r^2 \frac{m}{r_1 - r_0}\, dr = \frac{m n \pi}{3} \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1 - r_0}.$$

Die Spule werde vom Strom i durchlaufen; in der Spulenaxe befinde sich ein Magnetpol Eins im Abstande a von dem Mittelpunkt der Spule.

Eine einzelne Windungslage vom Halbmesser r übt bekanntlich die Kraft aus:

$$k = \pi \frac{ni}{s}\left[\frac{a+s}{\sqrt{(a+s)^2 + r^2}} - \frac{a-s}{\sqrt{(a-s)^2 + r^2}}\right].$$

Die von der ganzen Spule ausgeübte Kraft K lässt sich allerdings geschlossen integriren, denn man erhält:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m}{r_1 - r_0}\, dr$$

$$= \frac{3Fi}{r_1^3 - r_0^3}\frac{1}{s}\left[(a+s)\log\frac{\sqrt{(a+s)^2 + r_1^2} + r_1}{\sqrt{(a+s)^2 + r_0^2} + r_0} - (a-s)\log\frac{\sqrt{(a-s)^2 + r_1^2} + r_1}{\sqrt{(a-s)^2 + r_0^2} + r_0}\right].$$

Aber die Zahlenrechnung nach dieser Formel ist höchst unbequem, besonders da man für ein genaues Resultat mit sehr vielen Stellen rechnen muss, weil bei den Subtractionen das meiste sich weghebt.

Bequemer entwickeln wir deswegen in eine Reihe nach fallenden Potenzen von dem Abstande a, den wir ja als gross voraussetzen.

1) Es wird nicht etwa eine genaue Kenntniss von s, r_0 und r_1 verlangt, was dem Verfahren ja seinen Werth rauben würde; sondern das Resultat wird diese Grössen nur als Correctionsglieder enthalten.

Es ist zunächst:

$$k = \pi \frac{n i}{s} \left[\left(1 + \frac{r^2}{(a+s)^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{r^2}{(a-s)^2}\right)^{-1/2} \right]$$

$$= \pi \frac{n i}{s} \Big[\tfrac{1}{2} r^2 \left[(a-s)^{-2} - (a+s)^{-2}\right] - \tfrac{3}{8} r^4 \left[(a-s)^{-4} - (a+s)^{-4}\right] + \tfrac{5}{16} r^6 \left[(a-s)^6 - (a+s)^6\right] \ldots \Big].$$

Nun ist:

$$(a-s)^{-p} - (a+s)^{-p} = \frac{2}{a^p} \left[p \frac{s}{a} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!} \frac{s^3}{a^3} + \frac{p \ldots (p+4)}{5!} \frac{s^5}{a^5} \ldots \right],$$

also unter Vernachlässigung höherer als vierter Potenzen:

$$k = 2\pi \frac{n i}{a^3} \left[r^2 \left(1 + 2\frac{s^2}{a^2} + 3\frac{s^4}{a^4}\right) - \frac{r^4}{a^2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2}\frac{s^2}{a^2}\right) + \frac{r^6}{a^4}\tfrac{15}{8} \right].$$

Die von den m Windungslagen zwischen den Halbmessern r_0 und r_1 ausgeübte Kraft K ist also:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m}{r_1 - r_0} d r$$

$$= \frac{2\pi}{r_1 - r_0} \frac{m n i}{a^3} \left[\frac{r_1^3 - r_0^3}{3} \left(1 + 2\frac{s^2}{a^2} + 3\frac{s^4}{a^4}\right) - \frac{r_1^5 - r_0^5}{5 a^2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2}\frac{s^2}{a^2}\right) + \frac{r_1^7 - r_0^7}{7 a^4}\tfrac{15}{8} \right].$$

Ordnet man den Ausdruck nach Potenzen von a, setzt ferner $\pi m n/(r_1 - r_0) = 3F/(r_1^3 - r_0^3)$ und führt anstatt der halben Spulenlänge s die g a n z e L ä n g e l ein, so wird:[1])

$$(5) \quad \begin{cases} K = 2\dfrac{F i}{a^3}\Big[1 + \dfrac{1}{a^2}\left(\tfrac{1}{2} l^2 - \tfrac{9}{10}\dfrac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3}\right) \\ + \dfrac{1}{a^4}\left(\tfrac{3}{16} l^4 - \tfrac{9}{8} l^2 \dfrac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} + \tfrac{45}{56}\dfrac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3}\right)\Big]. \end{cases}$$

Befindet sich an dem Orte, wo wir den Pol Eins annahmen, eine kleine Magnetnadel vom Magnetismus M und der Länge λ, welche den Winkel φ mit der Windungsebene der Spule bildet, so bekommt man das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment als:

---

1) Das nächste vernachlässigte Glied würde lauten:

$$\frac{1}{a^6}\left(\tfrac{1}{16} l^6 - \tfrac{63}{80} l^4 \frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} + \tfrac{15}{8} l^2 \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} - \tfrac{35}{48}\frac{r_1^9 - r_0^9}{r_1^3 - r_0^3}\right).$$

$$KM\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{\lambda^2}{a^2}\right)\cos\varphi\,.$$

Bei einem kreisförmigen Magnetspiegel ist für λ der Durchmesser d zu setzen.

3. Fernwirkung einer Spule auf einen seitlich gelegenen Punkt (zweite Hauptlage).

Die Spule sei wie oben durch ihre Länge $2s$, durch die Halbmesser r_0 und r_1 und die Anzahl m der Lagen von je n Windungen definirt. Ein Magnetpol Eins liege ausserhalb der Spule im Abstande a von deren Mittelpunkt, und zwar in der durch diesen Mittelpunkt gehenden Windungsebene.

Der Pol wird eine Kraft parallel der Spulenaxe erfahren. Um die Grösse dieser Kraft zu berechnen, wenden wir die Ersetzung der Stromspule durch magnetische Belegungen ihrer Endflächen an. Die von dem Magnetpol Eins auf jede Endfläche gefällte Senkrechte hat die Länge s. Die Kraft, welche der Pol von einer solchen mit Magnetismus belegten Kreisscheibe erfährt, lässt sich folgendermassen berechnen. Es möge μ die Flächendichtigkeit des Magnetismus bedeuten.

Wir legen vom Mittelpunkt der Kreisscheibe ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z. x-Axe sei die Senkrechte auf dem Mittelpunkt der Scheibe (die Axe der Spule). Die xy-Ebene enthalte den Magnetpol Eins, dessen Coordinaten offenbar s, a und Null sind.

Ein Flächenelement $dy\,dz$ der Scheibe mit den Coordinaten Null, y und z, hat von dem Pole einen Abstand $\sqrt{s^2 + (a-y)^2 + z^2}$. Das Potential des Flächenelementes auf den Pol ist also:

$$dV = \frac{\mu\,dy\,dz}{\sqrt{s^2 + (a-y)^2 + z^2}}\,,$$

und das ganze Potential der Kreisscheibe auf den Pol:

$$= \mu \int_{-r}^{r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + (a-y)^2 + z^2}} = \mu \int_{-r}^{r} dy \log \frac{\sqrt{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} + \sqrt{r^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 - y^2}}\,.$$

Setzt man:

$$\frac{r^2 - y^2}{a^2 - 2ay + r^2 + s^2} = U,$$ so wird:

$$V = \mu \int_{-r}^{r} dy \log \frac{1 + U^{1/2}}{1 - U^{1/2}} = 2\mu \int_{-r}^{r} dy \, (U^{1/2} + \tfrac{1}{3} U^{3/2} + \tfrac{1}{5} U^{5/2} + \cdots).$$

Wir werden nur die Kraftcomponente X parallel der x-Axe gebrauchen, welche ist:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\mu \int_{-r}^{r} dy (U^{-1/2} + U^{1/2} + U^{3/2} + \cdots) \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$= 2\mu s \int_{-r}^{r} \frac{dy}{r^2 - y^2} (U^{3/2} + U^{5/2} + U^{7/2} + \cdots).$$

Wir schreiben nun $U = (r^2 - y^2)/a^2 . [1 - 2y/a + (r^2 + s^2)/a^2]^{-1}$ und entwickeln den zweiten Factor in eine Reihe, wobei höhere als die vierten Potenzen vernachlässigt werden sollen. Berücksichtigt man noch, dass für alle ganzen Werthe von q:

$$\int_{-r}^{r} dy \, (r^2 - y^2)^p \, y^{2q+1} = 0$$

ist, so liefert die Reihenentwicklung:

$$X = \frac{2\mu s}{a^3} \int_{-r}^{r} dy \, (r^2 - y^2)^{1/2} \Big[1 - \tfrac{3}{2} \frac{r^2 + s^2}{a^2} + \tfrac{15}{8} \frac{(r^2 + s^2)^2}{a^4}$$

$$+ \frac{y^2}{a^2} \Big(\tfrac{15}{2} - \tfrac{105}{4} \frac{r^2 + s^2}{a^2} \Big) + \frac{y^4}{a^4} \tfrac{315}{8} \Big]$$

$$+ \frac{2\mu s}{a^5} \int_{-r}^{r} dy \, (r^2 - y^2)^{3/2} \Big[1 - \tfrac{5}{2} \frac{r^2 + s^2}{a^2} + \tfrac{35}{2} \frac{y^2}{a^2} \Big] + \frac{2\mu s}{a^7} \int_{-r}^{r} dy \, (r^2 - y^2)^{5/2}.$$

Nun ist zwischen den Grenzen $-r$ und $+r$:

$$\int dy (r^2 - y^2)^{1/2} = \tfrac{1}{2} r^2 \pi; \int dy (r^2 - y^2)^{1/2} y^2 = \tfrac{1}{8} r^4 \pi; \int dy \, (r^2 - y^2)^{1/2} y^4 = \tfrac{1}{16} r^6 \pi;$$

$$\int dy \, (r^2 - y^2)^{3/2} = \tfrac{3}{8} r^4 \pi; \int dy (r^2 - y^2)^{3/2} y^2 = \tfrac{1}{16} r^6 \pi; \int dy (r^2 - y^2)^{5/2} = \tfrac{5}{16} r^6 \pi.$$

Dies eingesetzt erhält man leicht:

$$X = \frac{\mu s r^2 \pi}{a^3} \Big[1 + \tfrac{9}{8} \frac{r^2}{a^2} - \tfrac{3}{2} \frac{s^2}{a^2} + \tfrac{75}{64} \frac{r^4}{a^4} - \tfrac{75}{16} \frac{r^2}{a^2} \frac{s^2}{a^2} + \tfrac{15}{8} \frac{s^4}{a^4} \Big].$$

$2X$ gibt also die von den beiden Belegungen einer Stromspule auf den Magnetpol Eins ausgeübte Kraft, vorausgesetzt, dass die Belegungen aus Magnetismus von der Dichtigkeit μ

bestehen. Ist nun i die Stromstärke, so besteht die den Strom ersetzende Polbelegung bekanntlich aus Magnetismus von der Dichtigkeit $in/2s$, sodass die Kraft k einer Windungslage auf den Magnetpol Eins als:

$$k = \frac{n i r^2 \pi}{a^3}\left[1 + \tfrac{9}{8}\frac{r^2}{a^2} - \tfrac{3}{2}\frac{s^2}{a^2} + \tfrac{75}{64}\frac{r^4}{a^4} - \tfrac{75}{16}\frac{r^2}{a^2}\frac{s^2}{a^2} + \tfrac{15}{8}\frac{s^4}{a^4}\right]$$

erhalten wird.

Die Gesammtkraft der Spule von m Lagen zwischen den Halbmessern r_0 und r_1 ist folglich:

$$K = \int_{r_0}^{r_1} k \frac{m\,dr}{r_1 - r_0} = \frac{m n i \pi}{a^3 (r_1 - r_0)} \int_{r_0}^{r_1} r^2\,dr \left[1 + \tfrac{9}{8}\frac{r^2}{a^2} - \tfrac{3}{2}\frac{s^2}{a^2} + \cdots\right].$$

Führt man die Integration aus und ersetzt:

$$\frac{m n \pi}{r_1 - r_0} \quad \text{durch:} \quad \frac{3F}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}},$$

wo F die Gesammtfläche, so entsteht:

$$K = i\frac{F}{a^3}\left[1 - \tfrac{3}{2}\frac{s^2}{a^2} + \tfrac{15}{8}\frac{s^4}{a^4} + \tfrac{3}{5}\frac{1}{a^2}\frac{r_1^{\,5} - r_0^{\,5}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}}\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{75}{16}\frac{s^2}{a^2}\right) + \tfrac{3}{7}\frac{1}{a^4}\frac{r_1^{\,7} - r_0^{\,7}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}} \cdot \tfrac{75}{64}\right].$$

Die Reihe nach Potenzen von a geordnet, und anstatt s die Spulenlänge $l = 2s$ eingeführt, wird endlich[1]):

$$(6) \quad \begin{cases} K = i\dfrac{F}{a^3}\left[1 + \dfrac{1}{a^2}\left(-\tfrac{3}{8}l^2 + \tfrac{27}{40}\dfrac{r_1^{\,5} - r_0^{\,5}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}}\right)\right. \\ \left. + \dfrac{1}{a^4}\left(\tfrac{15}{128}l^4 - \tfrac{45}{64}l^2\dfrac{r_1^{\,5} - r_0^{\,5}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}} + \tfrac{225}{448}\dfrac{r_1^{\,7} - r_0^{\,7}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}}\right)\right]. \end{cases}$$

Substituiren wir für den Magnetpol Eins eine Magnetnadel vom Magnetismus M und der kleinen Länge λ, und bildet diese Nadel mit der Windungsebene der Spule den Winkel φ, so erhalten wir das auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment als $KM\left(1 + (\lambda^2/a^2)\right)\cos\varphi$. Bei kreisförmigen Magnetspiegeln als Nadeln ist für λ^2 zu setzen $^2/_3 d^2$ [2]).

---

1) Das vernachlässigte Glied sechster Ordnung lautet:

$$+\frac{1}{a^6}\left(-\tfrac{35}{1024}l^6 + \tfrac{441}{1024}l^4\frac{r_1^{\,5} - r_0^{\,5}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}} - \tfrac{525}{512}l^2\frac{r_1^{\,7} - r_0^{\,7}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}} + \tfrac{1225}{3072}\frac{r_1^{\,9} - r_0^{\,9}}{r_1^{\,3} - r_0^{\,3}}\right).$$

2) Die Begründung folgt in einem späteren Aufsatz.

4. Einfluss der Dicke und der Bespinnung des Drahtes.

Im Vorigen wurde vorausgesetzt, dass der Strom den Querschnitt der Spule gleichförmig ausfülle. Streng genommen ist dies aus zwei Gründen nicht der Fall.

1) In einer dicken Drahtwindung vertheilt ein Strom sich nicht gleichförmig, weil die Widerstände der einzelnen Fasern ungleich sind. Ist der Halbmesser der Windung r, des Drahtes selbst ϱ, so ist für die Fernwirkung $r - \frac{1}{8}\varrho^2/r$, für die Wirkung auf den Mittelpunkt $r - \frac{1}{2}\varrho^2/r$ anstatt r in Rechnung zu setzen. Diese Correctionen können bei geometrischen Ausmessungen für dicke Drähte zuweilen in Betracht kommen; in dem Correctionsgliede der galvanischen Ausmessung dürfte kaum jemals ein merklicher Einfluss entstehen.

2) Wäre die Spule streng aus übereinander liegenden Kreisen gebildet, so würde anstatt der Drahtströme eine continuirliche gleichmässige Stromerfüllung der Spule substituirt werden dürfen; wenn nur der Draht einschliesslich Bespinnung hinreichend dünn gegen den Abstand der Magnetnadel ist, um für den Strom in dem Drahte einen Strom setzen zu können, welcher das den Drahtquerschnitt umhüllende Quadrat ausfüllt. Letzteres wird immer erlaubt sein. Dann also sind r_1 und r_0 die Halbmesser der Cylinderflächen, welche die Drahtbespinnung der Spule von aussen und innen berühren.

In der angegebenen Weise aber sind die Spulen nicht gewunden, sondern die oberen Windungen sinken in die Vertiefungen der unteren Lagen ein. Um wenigstens den hieraus entstehenden möglichen Fehler kennen zu lernen, möge einmal ein vollständiges Einsinken angenommen werden, sodass jeder Draht von sechs anderen Drähten berührt werde. In diesem Falle zerlegen wir den Querschnitt der Spule nach Art von Bienenzellen in Sechsecke, welche die Drahtbespinnung einhüllen. Dann kann die Spule schliesslich angesehen werden als ein continuirlich mit Strom erfüllter Hohlcylinder, aber noch mit aussen und innen aufgelegten Ringen, welche je den Querschnitt eines gleichschenkligen

Dreiecks von der Drahtdicke 2ϱ als Grundlinie und von der Höhe $\varrho/\sqrt{3}$ haben.

An Stelle dieser Ringe kann man eine Schicht von rechteckigem Querschnitt setzen, welche die Spulenlänge als Breite und $\frac{2}{3}\,.\,\varrho/\sqrt{3} = 0{,}385\,.\,\varrho$ als Dicke hat. Die Stromdichtigkeit ist natürlich in diesem Rechteck im gleichen Verhältniss kleiner zu nehmen, wie die Dreiecksflächen zusammen kleiner als das Rechteck sind, d. i. im Verhältniss 3:4.

Es seien nun R_1 und R_0 der äussere und innere Halbmesser der Spule, gemessen über, resp. unter den Drähten einschliesslich der Bespinnungen. Dann ist leicht nachzurechnen, dass die beiden Halbmesser der besprochenen äusseren rechteckigen Schicht gleich $R_1 - 0{,}038\,\varrho$, resp. $R_1 - 0{,}423\,\varrho$ sind. Um ebensoviel sind die Halbmesser der inneren Schicht grösser als R_0.

Somit ersetzen wir die wirklich vorhandene Stromspule durch zwei gleichmässig mit Strom erfüllte Hohlcylinder von

1) den Halbmessern $R_0 + 0{,}038\,\varrho$ und $R_1 - 0{,}038\,\varrho$; Stromdichtigkeit $= \frac{3}{4}$,

2) den Halbmessern $R_0 + 0{,}423\,\varrho$ und $R_1 - 0{,}423\,\varrho$; Stromdichtigkeit $= \frac{1}{4}$.

Der Ausdruck (5) p. 518 oder (6) p. 521 ist also für diese beiden Theile zu bilden und zu summiren. Indessen sieht man, dass bei unserem Verfahren nur die Correctionsglieder beeinflusst sein können, und von diesen in merklicher Weise nur das erste mit a^{-2}.

Nun ist hinreichend genau:

$$\frac{3}{4}\,\frac{(R_1 - 0{,}038\,\varrho)^5 - (R_0 + 0{,}038\,\varrho)^5}{(R_1 - 0{,}038\,\varrho)^3 - (R_0 + 0{,}038\,\varrho)^3} + \frac{1}{4}\,\frac{(R_1 - 0{,}423\,\varrho)^5 - (R_0 + 0{,}423\,\varrho)^5}{(R_1 - 0{,}423\,\varrho)^3 - (R_0 + 0{,}423\,\varrho)^3}$$

$$= \frac{R_1^{\,5} - R_0^{\,5}}{R_1^{\,3} - R_0^{\,3}}\left[1 + \varrho\left(0{,}40\,\frac{R_1^{\,2} + R_0^{\,2}}{R_1^{\,3} - R_0^{\,3}} - 0{,}67\,\frac{R_1^{\,4} + R_0^{\,4}}{R_1^{\,5} - R_0^{\,5}}\right)\right].$$

Dieser Werth also wäre im Falle völligen Einsinkens der Windungen in die Vertiefungen der unteren Schichten für $(r_1^{\,5} - r_0^{\,5})/(r_1^{\,3} - r_0^{\,3})$ einzusetzen. Nur bei sehr dicken Drähten und verhältnissmässig kleiner Windungsweite kommt die Correction in Betracht, wobei dann freilich eine besondere Untersuchung über den Grad des Einsinkens nothwendig ist.

5. Vervollständigung der Rechnung.

Gl. (4) p. 516 wurde die Windungsfläche F für eine Beobachtung aus der ersten Hauptlage gefunden:

$$F = \frac{a^3 \pi}{R} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'},$$

(resp. für die zweite Hauptlage mit dem Factor 2), wo R der Halbmesser der Tangentenbussole, a der Nadelabstand von der Mitte der Spule, φ der Nadelausschlag durch den Strom, wenn beide Einwirkungen in gleichem Sinne stattfanden, φ' der Ausschlag war, wenn der Strom nur in der Tangentenbussole commutirt wurde.

Hierzu treten aber noch eine Correction δ, herrührend von der Länge und Breite der Spule, eine Correction ε von der Breite und Dicke des Ringes und eventuell von der Zuleitung des Stromes der Tangentenbussole und eine solche ζ von der Nadellänge. Wir schreiben (2. H.-L. noch Factor 2):

$$F = \frac{a^3 \pi}{R} \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi'} \frac{1 + \varepsilon + \zeta}{1 + \delta}, \tag{7}$$

so ist, wenn l die Länge der Spule, r_0 und r_1 ihr innerer und äusserer Halbmesser, wenn wir endlich setzen (p. 518. 521):

$$\frac{r_1^5 - r_0^5}{r_1^3 - r_0^3} = P, \qquad \frac{r_1^7 - r_0^7}{r_1^3 - r_0^3} = P',$$

$$(8) \begin{cases} \text{in 1. H.-L.} \quad \delta = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{9}{10} P\right) + \frac{1}{a^4}\left(\frac{3}{16} l^4 - \frac{9}{8} l^2 P + \frac{45}{56} P'\right), \\ \text{in 2. H.-L.} \quad \delta = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{3}{8} l^2 + \frac{27}{40} P\right) + \frac{1}{a^4}\left(\frac{15}{128} l^4 - \frac{45}{64} l^2 P + \frac{225}{448} P'\right). \end{cases}$$

Ist b die Breite, h die Dicke des Ringes der Tangentenbussole, so wird, wenn η die Correction wegen der Zuleitung bedeutet (vgl. auch nächsten Paragraph):

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \frac{h^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{R^2} + \eta, \tag{9}$$

falls eine Windung vorhanden ist. Für Windungslagen aus dünnerem Draht würde $^1/_{12}$ anstatt $^1/_6$ zu setzen sein, doch wird dieser Fall kaum vorkommen.

Endlich sei λ die Nadellänge, resp. d der Durchmesser eines Magetspiegels, so wird (p. 519. 521):

$$(10)\begin{cases}\text{in 1.H.-L.}\ \zeta = \frac{1}{3}\frac{\lambda^2}{a^2} + 0{,}13\frac{\lambda^2}{R^2}, \quad \text{resp.}\ \zeta = {}^1/_3\frac{d^2}{a^2} + 0{,}12\frac{d^2}{R^2},\\ \text{in 2.H.-L.}\ \zeta = -\frac{\lambda^2}{a^2} + 0{,}13\frac{\lambda^2}{R^2}, \quad \text{resp.}\ \zeta = -{}^2/_3\frac{d^2}{a^2} + 0{,}12\frac{d^2}{R^2}.\end{cases}$$

6. Einige praktische Regeln.

1. Bestimmung des Abstandes *a*. Die Mitte der Spule wird sich nicht so genau angeben lassen, dass man wirklich von da aus den Abstand *a* der Nadel auf Bruchtheile des Millimeters messen könnte. Man hilft sich in der Weise, dass man das Magnetometer folgeweise auf entgegengesetzten Seiten der Spule aufstellt. Gemessen wird der gegenseitige Abstand $2a$ der beiden Orte des Magnetometercocons. Auch die unsymmetrische Magnetisirung der Nadel fällt hierbei heraus.

Die Messung kann bei Aufstellung der Spule in der zweiten Hauptlage mit einem Comparator ausgeführt werden. Auf Zehntelmillimeter genau aber beobachtet man auch mit einem Millimetermaassstabe. Nur ist in letzterem Falle eine kleine Hülfseinrichtung nothwendig, weil man den Maassstab wegen der Spule und der Tangentenbussole selbst nicht wohl in gleicher Höhe wie den Cocon aufstellen kann, sondern oberhalb der Tangentenbussole bleiben muss. Man hängt dann von dem Maassstabe herunter ein zweites Coconsenkel, welches erstens auf die Theilung projicirt wird, und welches man ferner gerade hinter den Cocon des Magnetometers orientirt. Zur bequemen Orientirung war das Hülfssenkel über die Rinne eines mit Schraubengewinde versehenen Stiftes geführt, sodass die Rinne mit dem Senkel sich mikrometrisch horizontal verschieben liess.

Die Projection der beiden Fäden aufeinander und des Hülfsfadens auf den Maassstab wurde nach Dr. Hallock's Vorschlag mit dem Ablesefernrohr selbst ausgeführt, welches ja durch die Einstellung auf den Magnetspiegel von selbst zum Meridian, also auch zum Maassstab senkrecht steht.

In der ersten Hauptlage wendet man das folgende einfache Hülfsmittel an. Der Nadelcocon selbst ist hier freilich überhaupt nicht zu verwenden, da der Ring der Tan-

gentenbussole das Visiren hindert. Aber man kann ja nach Osten oder Westen in einem constanten Abstand von dem Nadelcocon ein zweites Senkel am Magnetometer anbringen. Wir hatten an den Kopf der Aufwindeschraube der Nadel einen kleinen Fortsatz angelöthet, welcher diesen Cocon trug. Auch ein kleiner an die Glasröhre zu befestigender Arm kann diesen Dienst leisten.

Die Grösse $2a$ der Verschiebung des Magnetometers wird nun als Verschiebung dieses Senkels beobachtet, indem man z. B. wieder mittelst eines Hülfssenkels, wie oben, auf den Maassstab projicirt. Das Hülfssenkel kann hier ganz dicht hinter dem anderen liegen, sodass man mit blossem Auge und Spiegel oder auch mit einem genähert im Meridian blickenden Fernrohr projiciren kann.

2. Magnetnadel. Hierfür empfiehlt sich in der zweiten Hauptlage z. B. ein Spiegelmagnet; für alle Zwecke ist eine Nadel mit drehbarem Spiegel zu brauchen.[1] Bei einer Beobachtung aus erste Hauptlage wird es meistens am bequemsten sein, den Spiegel gegen die Nadel schräg zu stellen, sodass man immer von derselben Seite der Aufstellungslinie aus ablesen kann. Sonst muss für die erste Hauptlage ein Magnet-Doppelspiegel gegeben sein, den man einmal aus Osten, das andere mal aus Westen beobachtet. Eine Umhängung zwischen beiden Beobachtungen ist natürlich nicht gestattet.

3. Stromwendung. Aus bekannten Gründen wird man alle Ausschläge nach beiden Seiten beobachten, also nicht blos die Tangentenbussole allein, sondern ausserdem den ganzen Strom commutiren. Man erhält also vier Nadeleinstellungen,

welche heissen mögen:	n_1	n_2	n_1'	n_2'
für die Stellung des Hauptcommutators . . .	I	II	I	II
f. d. Stellung des Commutat. der Tangentenbussole	1	1	2	2.

Es sei ferner $n_1 - n_2 = x$ und $n_1' - n_2' = x'$. Dann ist, wenn A den Scalenabstand bedeutet:

1) Vgl. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 546 und 550. 1882. Ein kleiner Localeinfluss des Dämpfers ist hier natürlich ganz unschädlich, da man nur Verhältnisse ermittelt.

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2A}, \qquad \varphi' = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x'}{2A}.$$

4. Vereinfachte Rechnung. Durch Reihenentwicklung, wenn man $\frac{1}{128}x^4/A^4$ gegen Eins vernachlässigen kann, wird:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{4A}\left(1 - \frac{1}{16}\frac{x^2}{A^2}\right), \qquad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{x'}{4A}\left(1 - \frac{1}{16}\frac{x'^2}{A^2}\right).$$

Durch Einsetzung dieser Werthe findet man leicht den äusserst bequemen Ausdruck:

(11) $$\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'} = \frac{x + x'}{x - x'}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{x x'}{A^2}\right).$$ [1])

5. Schwankungen der Stromstärke. Richtet man den Abstand a so ein, dass die Stromwirkungen von der Tangentenbussole und von der Spule nahe gleich sind, so werden Schwankungen in der Stromstärke überhaupt gleichgültig. Will oder muss man aus anderem Abstande beobachten, so eliminirt man die Inconstanz durch abwechselnde Ablesung in gleichen Zeiträumen. Zweckmässig ist die Reihenfolge der Commutatorstellungen I_1, I_2, II_2, II_1, I_1, I_2 u. s. w. oder mit Rücksicht darauf, dass die Stellung 2 von besonderem Einfluss auf das Resultat ist, die Reihenfolge I_1, I_2, II_2, II_1, II_2, I_2, I_1 u. s. w. (vgl. v. S.), wobei man die Differenzen $n_1 - n_2$ und $n_1' - n_2'$ immer auf den mittleren gleichen Augenblick bezieht.

6. Unsymmetrie der Aufstellung. Sind die auf beiden Seiten gefundenen Werthe von $(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi')/(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$ um Procente verschieden, so muss an dem Mittel eine Correction angebracht werden. Schreiben wir:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'} = p,$$

und werde auf der einen Seite der Werth p_1, auf der anderen Seite p_2 beobachtet, so kann man setzen, wenn dem Abstande a der gesuchte Werth p_0 entsprechen würde:

$$p_0 a^3 = p_1 (a + \alpha)^3 = p_2 (a - \alpha)^3.$$

Die Elimination von α aus dieser Doppelgleichung ergibt unter Weglassung höherer Potenzen:

1) Bei welchem das Vorzeichen von $x x'$ zu beachten ist!

(12) $$p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2\right].$$

7. Elimination des ersten Correctionsgliedes durch combinirte Beobachtung aus erster und zweiter Hauptlage.

Es gibt Fälle, in denen man die Dimensionen einer Spule, welche in den Correctionsgliedern auftreten, nicht hinreichend genau kennt; sei es, dass etwa der innere Halbmesser nicht genau gemessen wäre, oder dass die äussere Oberfläche nicht gut cylindrisch ausgefallen ist, oder auch dass man nicht eine constante Dichte der Windungen verbürgen kann. Vgl. auch den Schluss der Abhandlung.

Nun wird das erste Correctionsglied mit $1/a^2$ sich im allgemeinen auf ein oder mehrere Hundertel belaufen; die Unsicherheit könnte also etwa noch Tausendtel betragen. Das Ziel aber, welches doch auch vorliegen kann, dass der zulässige Fehler des Correctionsgliedes auf etwa $^1/_{10000}$ beschränkt sei, wird man überhaupt ohne grössere Umständlichkeiten kaum erreichen können.

Es ist daher von grossem Vortheil, dass die Form des ersten Correctionsgliedes ein Mittel gibt, dasselbe vollständig zu eliminiren. Und da das zweite Glied mit $1/a^4$ nach Zehntausendteln rechnet und daher stets mit hinreichender Genauigkeit zu ermitteln ist, so werden dadurch alle Schwierigkeiten beseitigt.

Der Factor, welcher mit $1/a^2$ multiplicirt das erste Correctionsglied liefert (Gl. 8, p. 524) ist:

in erster H.-L. $\frac{1}{2}l^2 - \frac{9}{10}P$, in zweiter H.-L. $-\frac{3}{8}l^2 + \frac{27}{40}P$.

Man sieht, dass der zweite Ausdruck gerade $^3/_4$ des ersten beträgt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Stellt man also zwei Beobachtungen an, nämlich eine aus der ersten Hauptlage mit dem Abstande a_1 und eine aus der zweiten Hauptlage mit dem Abstande a_2, wobei $a_1 : a_2 = \sqrt{4:3} = 1{,}155$ ist, so erhält man in beiden Fällen den entgegengesetzt gleichen Betrag der Correction und kann die letztere eliminiren.

Es wird hierbei im allgemeinen genügen, beide Be-

stimmungen von F für sich auszurechnen und das Mittel zu nehmen. Die Gleichheit oder Ungleichheit beider Resultate liefert zugleich eine in manchen Fällen willkommene Probe auf die Homogeneïtät der Spule.

Die genaue Elimination würde auf folgendem Wege geschehen. Wir wollen das Tangentenverhältniss (p. 524) durch T bezeichnen. Dann ist für die erste Hauptlage:

$$F\left[1+\frac{1}{a_1^2}\left(\tfrac{1}{2}l^2-\tfrac{9}{10}P\right)+\frac{1}{a_1^4}\left(\tfrac{3}{16}l^4-\tfrac{9}{8}l^2P+\tfrac{45}{56}P'\right)\right]=a_1^3T_1\frac{\pi}{R}(1+\varepsilon+\zeta_1),$$

für die zweite Hauptlage, wenn $a_1^2:a_2^2$ sehr nahe $=4:3$ ist:

$$F\left[1+\frac{1}{a_1^2}\left(-\tfrac{1}{2}l^2+\tfrac{9}{10}P\right)+\frac{1}{a_1^4}\left(\tfrac{5}{24}l^4-\tfrac{5}{4}l^2P+\tfrac{25}{28}P'\right)\right]=2a_2^3T_2\frac{\pi}{R}(1+\varepsilon+\zeta_2).$$

Die Summirung ergibt, bei der Kleinheit von ζ_1 und ζ_2, die rechnerisch sehr bequeme Formel:

$$(13)\quad F\left[1+\frac{19}{(2a_1)^4}\left(\tfrac{1}{6}l^4-l^2P+\tfrac{5}{7}P'\right)\right]=\frac{\pi}{R}\left(1+\varepsilon+\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)\tfrac{1}{2}a_1^3T_1+a_2^3T_2).$$

8. Beobachtungen.

Durch die Zuvorkommenheit der Herren W. Weber und Riecke wurde mir auf meine Bitte der erste von Weber im Jahre 1852 hergestellte Erdinductor[1]) als erstes Messungsobject zur Verfügung gestellt.

Mittelst einer langen Magnetnadel wurde die Spule, deren Holzrahmen sich vorzüglich eben und parallel erhalten hatte, in den Meridian orientirt. Ein langer hölzerner Maassstab, den man nach dem Gebrauch mit einem Normalmeter verglich, diente zur Orientirung der Tangentenbussole und zur Abmessung der Coconabstände (vgl. p. 525). Auf Verticalstellung des Rahmens wurde die ausreichende Sorgfalt verwendet. Die Stromwender befanden sich neben der Spule in der Höhe der Nadel und konnten, da sie wesentlich aus horizontalen Leitern bestanden, keinen Einfluss ausüben.

Die äusseren und inneren Halbmesser der Spule waren $r_1 = 17{,}14$ cm, $r_0 = 11{,}43$ cm. Die Länge derselben $l = 12{,}0$ cm. Hieraus findet sich (p. 524, Formel 8) für die Correction δ:

1) Weber, Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. **5.** p. 53 d. Sep.-Abdr. 1853.

$$\tfrac{1}{2} l^2 - \tfrac{9}{10} P = 254{,}3 \text{ cm}^2, \quad \tfrac{3}{16} l^4 - \tfrac{9}{8} l^2 P + \tfrac{45}{16} P' = 38000 \text{ cm}^4,$$
$$-\tfrac{3}{8} l^2 + \tfrac{27}{40} P = 190{,}7 \text{ cm}^2, \quad \tfrac{15}{128} l^4 - \tfrac{45}{64} l^2 P + \tfrac{225}{448} P' = 23700 \text{ cm}^4.$$

Die Tangentenbussole bestand aus einem Kupferringe von rechtwinkligem Querschnitt mit der Breite $b = 0{,}86$ cm und der Dicke $h = 0{,}41$ cm. Der mittlere Halbmesser wurde von W. Kohlrausch nach einem Verfahren, über welches bei einer anderen Gelegenheit berichtet werden wird, $R = 20{,}146$ cm bestimmt. Die Zuleitung des Stromes bestand aus zwei geradlinigen parallelen Streifen von gleichem Querschnitt wie der Ring, welche 13 cm lang und in einem Abstand ihrer Mittellinie 0,52 cm sich an die aufgeschnittenen Enden des Kreises rechtwinklig ansetzten. Weiterhin waren die Zuleitungsdrähte umeinander gedreht und also ohne Einfluss.

Die Correction wegen der Zuleitung[1]) berechnet sich hieraus $= -0{,}0013$. Also ist (Gl. 9, p. 524):

$$\varepsilon = \frac{1}{6}\frac{h^2}{R^2} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{R^2} - 0{,}0013 = -0{,}0015.$$

Die Nadel bestand entweder aus einem gestreckten Magnet von der Länge $\lambda = 1{,}5$ cm oder aus einer Kreisscheibe vom Durchmesser $d = 2{,}08$ cm. Es beträgt also die Correction wegen der Nadellänge (Gl. 10, p. 525):

Gestreckter Magnet:
$$1.\text{ H.-L. } \zeta = \frac{1}{3}\frac{\lambda^2}{a^2} + 0{,}12\frac{\lambda^2}{R^2} = \frac{0{,}7}{a^2} + 0{,}0007$$
$$2.\text{ H.-L. } \zeta = -\frac{\lambda^2}{a^2} + 0{,}12\frac{\lambda^2}{R^2} = -\frac{2{,}2}{a^2} + 0{,}0007$$

Magnet-Spiegel:
$$1.\text{ H.-L. } \zeta = \frac{1}{3}\frac{d^2}{a^2} + 0{,}12\frac{d^2}{R^2} = \frac{1{,}4}{a^2} + 0{,}0013$$
$$2.\text{ H.-L. } \zeta = -\frac{2}{3}\frac{d^2}{a^2} + 0{,}12\frac{d^2}{R^2} = -\frac{2{,}9}{a^2} + 0{,}0013.$$

Ich will die erste Beobachtungsreihe, welche in der zweiten Hauptlage stattfand, etwas ausführlicher mittheilen. Der Strom wurde von zwei Daniell'schen Elementen geliefert und durch Einschaltung verschiedener Widerstände variirt. Die Inconstanz der Elemente betrug während einer Versuchsreihe wohl einmal $1^0/_0$. Das p. 527 erwähnte Verfahren der Abwechselung in gleichen Zwischenzeiten lieferte trotzdem gut übereinstimmende Resultate. Jede Zahl ist das

1) cf. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 553. 1882.

Mittel aus drei mit dieser Abwechselung gewonnenen Einzelzahlen.

Der Abstand des Nadelcocons in beiden Aufstellungen betrug $2a = 250{,}344$ cm, der Scalenabstand war $A = 3310$mm. Als Scala diente ein von Wiegand in Würzburg hergestellter, in Millimeter getheilter Glasstab von 1200 mm Länge. Die Theilfehler waren kleiner als $^1/_{20}$ mm. Als Magnetnadel diente der Stahlspiegel. Ueber die Rechnung vergleiche Gl. (11) p. 527.

Tangentenbussole	Eingeschaltet	x	x'	$\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'}$
		mm	mm	
Nord	3 Siemens	1090,33	−242,35	0,63438
	5 „	856,58	−190,80	0,63447
	10 „	552,90	−123,47	0,63441
Süd	4 „	894,17	−191,35	0,64619
	5 „	822,57	−176,23	0,64605
	10 „	541,28	−116,15	0,64619

Der Mittelwerth ist Nord $p_1 = 0{,}63442$, Süd $p_2 = 0{,}64614$ Der Unterschied rührt von unsymmetrischer Aufstellung her. Man erhält den Werth, welcher dem Abstande $a = 125{,}172$ cm entspricht, nach p. 528 Gl. (12):

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi'} = \frac{p_1 + p_2}{2}\left[1 - \tfrac{2}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2\right] = 0{,}64025.$$

Ferner berechnet sich (v. S.):

$$\delta = \frac{190{,}7}{125{,}2^2} + \frac{23700}{125{,}2^4} = 0{,}0123.$$

$$\zeta = -\frac{2{,}9}{125^2} + 0{,}0013 = +0{,}0011,$$

während (v. S.) $\varepsilon = -0{,}0015$ ist.

Die Stromfläche findet sich heraus (Gl. 7, p. 524):

$$F = 2 \cdot \frac{125{,}172^3 \cdot \pi}{20{,}146} \cdot 0{,}64025\,\frac{1 - 0{,}0015 + 0{,}0010}{1{,}0123} = 386\,730 \text{ qcm}.$$

Eine zweite Messung aus der 2. Hauptlage mit dem Abstande $a = 107{,}801$ cm gab $(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi')/(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')$ im Süden $= 0{,}99813$ und im Norden 1,01629, woraus der Mittelwerth 1,00715. Hieraus berechnet sich:

$$F = 386\,930 \text{ qcm}.$$

Sodann stellte Hr. Hallock zwei Beobachtungen aus der 1. Hauptlage an; die eine mit dem Magnetspiegel (wobei das Ablesefernrohr in der Richtung der Aufstellungslinie im Osten oder Westen von dem Spiegel stand) mit $a = 134{,}832$ cm gab das Tangentenverhältniss $= 0{,}99707$ im Osten und 1,00047 im Westen, im Mittel also $= 0{,}99877$ und:

$$F = 387\,120 \text{ qcm}.$$

Die andere wurde mit der gestreckten Nadel gemacht, mit dem Abstande $a = 134{,}820$ cm. Dieselbe gab das Tangentenverhältniss in beiden Stellungen 0,99918 und 1,00055, im Mittel 0,99986 und:

$$F = 387\,200 \text{ qcm}.$$

Das Mittel aus diesen Einzelmessungen ist[1]):

$$F = 387\,000 \text{ qcm} = 38{,}700 \text{ qm}.$$

Die einzelnen Abweichungen betragen in Theilen des Ganzen $-0{,}0007$ $-0{,}0002$ $+0{,}0003$ $+0{,}0005$ mit einem mittleren Fehler $\pm 0{,}0006$ für die Einzelmessung und $\pm 0{,}0003$ oder ± 110 qcm für das Resultat.

Die Abweichungen sind etwas grösser, als man nach den in den Abmessungen möglichen Fehlern erwarten sollte. Zugleich fällt auf, dass die Beobachtungen aus der ersten Hauptlage ein etwas zu grosses, die in der zweiten Hauptlage ein zu kleines Ergebniss geliefert haben. Da nun die aus den Dimensionen der Spule erwachsenen Correctionen in der ersten Hauptlage positiv, in der zweiten negativ sind, so sind die Resultate wahrscheinlich übercorrigirt worden. Dies würde die Vermuthung bekräftigen, dass die inneren Drahtschichten dichter liegen, als die äusseren, wobei der gemessene Halbmesser r_1 offenbar eine zu grosse Correction liefern muss. In der That, wenn man r_1 um $^1/_{60}$ kleiner setzt, so verschwindet die Regelmässigkeit der Fehler, und der mittlere Fehler würde etwa auf die Hälfte gebracht werden. Das Endresultat wird übrigens in unserem Falle von etwas grösser oder kleiner angenommenen Halbmessern der Spule fast unmerklich beeinflusst, da die Correctionen aus

1) Die vorläufige Angabe Gött. Nachr. 1882 p. 660 von 38,720 qm ist hiernach zu berichtigen.

der ersten und zweiten Hauptlage sich in dem Mittelwerth nahe compensiren (vgl. p. 528).

Jedenfalls möge die Gelegenheit benutzt werden, um auf die Vortheile hinzuweisen, welche nach § 7 durch combinirte Beobachtungen aus beiden Hauptlagen entstehen.

Würzburg, Januar 1883.

Durch die Güte des Herrn Herausgebers der Annalen wurde ich aufmerksam gemacht, dass schon in früherer Zeit Hr. Bosscha auf das Bedürfniss einer empirischen Bestimmung der electromagnetischen Constanten eines Stromleiters hingewiesen hat.[1]) Hr. Bosscha schlägt eine Differentialmethode vor, bei welcher man die electromagnetische Wirkung eines Leiters mit derjenigen eines anderen dadurch vergleicht, dass man unter Stromverzweigung mittelst Einschaltung verschiedener bekannter Widerstände eine Magnetnadel auf Null bringt.

Wie ich selbst noch nachträglich gesehen habe, findet sich aber auch bei Maxwell[2]) ein Vorschlag „das magnetische Moment des Stromes Eins in einer kleinen Spule dadurch zu ermitteln, dass man im Centrum einer Normalspule (Standard coil) eine Magnetnadel aufhängt und die kleine Spule parallel zu sich längs der gemeinschaftlichen Axe beider Spulen verschiebt, bis derselbe Strom, beide Spulen in entgegengesetzter Richtung durchfliessend, die Nadel nicht mehr ablenkt.“ Das Verfahren ist dem in diesem Aufsatz ausgeführten also im Princip analog. Was die Ausführung betrifft, so dürfte man der unserigen den Vorzug geben, einmal da dieselbe auch auf grosse Spulen angewendet werden kann, was ja häufig vorkommt, und dann, da das Object, dessen Abstand in der dritten Potenz vorkommt und daher genau gemessen werden muss, von dem hierfür geeignetsten Gegenstande, einem Coconfaden, gebildet wird.

1) Bosscha, Pogg. Ann. **93**. p. 402. 1854.
2) Maxwell, Treatise etc. **2**. p. 354. 1873.

II. Ueber die durch electrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes; von W. C. Röntgen.

(Aus d. 22. Ber. d. Oberh. Ges. f. Natur- u. Heilkunde mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Zweite Abhandlung.

In einer vorhergehenden Abhandlung[1]) habe ich über das electrooptische Verhalten von Quarzplatten berichtet, welche parallel der optischen Axe geschliffen sind, bei denen somit die Lichtstrahlen senkrecht zu dieser Axe hindurchgingen; am Schluss stellte ich die Mittheilung von Versuchen mit Platten, die senkrecht zur optischen Axe geschliffen sind, in Aussicht. Die meisten der im Folgenden besprochenen optischen Erscheinungen hatte ich damals schon beobachtet, allein es fehlte für dieselben eine Erklärung. Diese ist nunmehr durch eine von mir ausgeführte piëzoelectrische Untersuchung des Quarzes gefunden.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt demnach in zwei Theile; der erste enthält die piëzoelectrischen, der zweite die electrooptischen Versuche.

Zur piëzoelectrischen Untersuchung wurden hauptsächlich zwei Quarzstücke von folgender Beschaffenheit verwendet: das eine ist eine kreisrunde, genau senkrecht zur optischen Axe geschliffene Platte (Dicke 0,58 cm; Durchmesser 1,8 cm), das zweite eine Kugel von 3,0 cm Durchmesser. Beide sind, wie die optische Untersuchung lehrte, fast vollständig rein. Es wird aus dem Folgenden zur Genüge hervorgehen, wie sehr es sich empfiehlt, Quarzstücke dieser Form und nicht etwa Krystalle mit den natürlichen Flächen zu benutzen.

Die Platte diente dazu, um zunächst das in der ersten Abhandlung geschilderte piëzoelectrische Verhalten des Quarzes einer directen experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Es hat sich dabei ergeben, dass im Quarz senkrecht zur

---

1) W. C. Röntgen, Ber. d. Oberhess. Ges. für Natur- u. Heilk. 22. p. 49. 1883.

Hauptaxe in der That drei um 120° auseinander liegende Richtungen vorhanden sind, welche die Eigenschaft haben, dass ein in diesen Richtungen auf den Krystall ausgeübter Druck keine Electricität an den Druckstellen erzeugt; es sind dies die drei Axen fehlender Piëzoelectricität. Ein in irgend einer anderen senkrecht zur Hauptaxe stehenden Richtung ausgeübter Druck bringt dagegen an den Druckstellen Electricität hervor, und zwar ist die stärkste Entwickelung in den Richtungen vorhanden, welche die Winkel der drei genannten Axen halbiren. Diese Richtungen nannte ich Axen maximaler Piëzoelectricität. Von den Zeichen der auftretenden Electricitäten gilt das früher Gesagte.

Um auf die Platte in bestimmter Richtung einen Druck auszuüben, wurde eine Krystallpresse von bekannter Construction benutzt. Auf je eine der einander zugewendeten Flächen der beiden Stahlbacken derselben ist ein Hartgummiplättchen und auf dieses ein Stück eines 0,06 cm dicken Silberdrahtes gekittet. Diese Silberdrähte liegen einander genau parallel gegenüber; zwischen ihnen befand sich die Quarzplatte. In dieser Weise wurde erreicht, dass die Druckstellen auf der Platte eine schmale Linie, die parallel der Scheibenaxe ist, bildeten, und dass der Druck genau in der Richtung eines Durchmessers auf die Scheibe ausgeübt werden konnte.

Die Scheibe war mittelst eines ungefähr 4 cm langen Strohhalmes so auf einem in Grade eingetheilten drehbaren Theilkreis befestigt, dass ihre Axe mit der Drehungsaxe des Theilkreises möglichst gut coincidirte; durch Drehen des Theilkreises konnte somit die Richtung, in welcher der Druck auf die Scheibe wirken sollte, geändert werden. Die Grösse der Drehung wurde am Theilkreis abgelesen.

Der Rahmen der Krystallpresse, sowie die Fassung, in welcher sich der Theilkreis drehte, waren durch Klemmen fest mit einem Stativ verbunden. Um auch sicher zu sein, dass der Druck immer in der Richtung eines Durchmessers stattfand, verfuhr ich in folgender Weise. Die Quarzplatte war mit einer dünnen Wachsschicht überzogen, in welcher mittelst einer feinen Nadel nach Aufsuchung des Mittel-

punktes möglichst viele Durchmesser gezogen waren. Durch dieses Hülfsmittel konnte ich mich bei jedem Versuch leicht überzeugen, dass die Verbindungslinie der beiden Druckstellen in der Richtung eines Durchmessers lag.

Das eine der beiden Silberdrähtchen stand in Verbindung mit dem früher erwähnten empfindlichen Electroskop; das andere war zur Erde abgeleitet. Die Versuche bestanden nun darin, dass ich die Richtungen fehlender Piëzoelectricität durch Probiren aufsuchte. Es wird genügen, wenn ich eine Versuchsreihe mittheile.

Ablesung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität
0°	stark negativ
20	weniger stark negativ
35	schwach positiv
27	schwach negativ

Nachdem in dieser Weise gefunden war, dass eine der gesuchten Richtungen zwischen den beiden letzten Stellungen der Scheibe liegen musste, wurden die folgenden Versuche angestellt:

Ablesung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität	Ablesung am Theilkreis	Durch Druckzunahme entstehende Piëzoelectricität
29°	Spur von negativer Electricität	209°	Spur von positiver Electricität
30	Nichts	210	Nichts
31	Spur von positiver Electricität	211	Spur von negativer Electricität
89°	Spur von positiver Electricität	269°	Spur von negativer Electricität
90	Nichts	270	Nichts
91	Spur von negativer Electricität	271	Spur von positiver Electricität
149°	Spur von negativer Electricität	329°	Spur von positiver Electricität
150	Spur von positiver Electricität	330	Nichts
151	Spur von positiver Electricität	331	Spur von negativer Electricität

Beim Nachlassen der Schraube der Krystallpresse entstanden jedesmal Electricitäten, welche den beim Anziehen erhaltenen entgegengesetzt waren.

Diese Versuche lassen darüber nicht im Zweifel, dass der Winkel zwischen den drei Axen fehlender Piëzoelectri-

cität 120° beträgt; die eine Abweichung, welche übrigens nicht 1° beträgt, kann sehr wohl von Versuchsfehlern herrühren.

Drucke, welche in den in der Mitte zwischen den Axen fehlender Piëzoelectricität liegenden Richtungen auf die Platte ausgeübt wurden, hatten eine sehr kräftige Electricitätsentwicklung zur Folge; da das benutzte Electroskop nicht für quantitative Versuche eingerichtet ist, so konnte ich nicht bestimmen, wie sich die Menge der Piëzoelectricität mit der Richtung änderte; soviel ist aber sicher, dass die grösste Quantität in jenen Zwischenrichtungen erzeugt wurde. Für eine genaue quantitative Bestimmung wäre es durchaus nöthig, auf die Inductionswirkungen Rücksicht zu nehmen, welche die in den der Druckstelle benachbarten Oberflächentheilen entstehenden Electricitäten auf die mit dem Electroskop verbundene Electrode ausüben. Ueber diesen Einfluss wird unten noch einiges erwähnt werden.

Die Versuche mit der Quarzkugel erforderten einen etwas complicirteren Apparat; auch hier kam es darauf an, dass ein Druck möglichst genau in der Richtung eines Durchmessers auf die Kugel ausgeübt wurde, und dass die dabei entstehende Piëzoelectricität zur Beobachtung kam. Nach mehrfachen Versuchen mit verschiedenen Apparaten behielt ich die folgende Einrichtung als die zweckentsprechendste bei. Die Kugel lag auf dem Objectträger eines alten, grossen Mikroskops, und durch Herunterlassen der beschwerten Mikroskopröhre wurde ein Druck auf dieselbe ausgeübt.

Der Objectträger ist mit den nöthigen Schrauben zur genauen Justirung versehen; in die runde Oeffnung desselben kann je nach Bedarf eine runde dicke Messingscheibe oder eine Hartgummischeibe genau passend eingelegt werden. Die Messingscheibe ist in der Mitte mit einer 0,25 cm weiten Vertiefung versehen, welche zur besseren Unterstützung der aufgelegten Kugel dient; die Kugel berührt die Scheibe somit nicht blos in einem Punkt, sondern in einem kleinen Kreise. Auf die Hartgummischeibe ist ein 1,0 cm langer, 0,4 cm dicker Messingcylinder gekittet; dieser ist oben ebenfalls mit einer kleinen Vertiefung versehen, welche genau in der Axe der Hartgummischeibe liegt, und auf welcher die

Kugel ruhte. Die Messingscheibe wurde benutzt, wenn die untere Seite der Kugel nicht isolirt zu sein brauchte; die Hartgummischeibe dagegen, wenn eine Isolation erforderlich war.

Die in einer sehr gut gearbeiteten Führung mittelst Trieb und Zahnstange bewegliche Mikroskopröhre ist am unteren Ende (am Objectiv) mit einem durch Hartgummi isolirten, unten abgerundeten Messingstift versehen, welcher den Druck auf die Kugel ausübt. Ich unterlasse es, mitzutheilen, wie die Justirung vorgenommen wurde, und wie ich mich vergewisserte, dass immer der Druck so genau wie möglich in der Richtung eines Durchmessers wirkte. Die Mikroskopröhre war mit zwei Kilo belastet; beim Herunterlassen derselben fand keine merkliche Reibung zwischen dem Messingstift und der Kugel statt. Eine solche ist auch nach Kräften zu vermeiden, da dieselbe eine ziemlich starke Electricitätsentwickelung zur Folge haben würde.

Weil ich beabsichtigte, auch diejenigen Stellen der Kugel auf Piëzoelectricität zu prüfen, auf welche der Druck nicht direct wirkte, so wurde das Goldblatt des Electroskops nicht immer mit dem den Druck ausübenden Messingstift verbunden, sondern öfters mit einem kleinen, an einem Hartgummistab befestigten metallenen Halter, in welchen je nach Bedarf ein einfacher Messingdraht oder ein mit einem kleinen Metallscheibchen versehener Draht eingesetzt werden konnte.[1]) Der Hartgummistab wurde von einem mit Gelenken versehenen Stativchen getragen, wodurch es ermöglicht war, dass der als Electrode dienende Messingdraht, resp. das Metallscheibchen an jede Stelle der Quarzkugel angelegt werden konnte.

Mit dieser Kugel wurden nun folgende Versuche gemacht:

1) Ausser den drei Axen fehlender Piëzoelectricität besitzt auch die Hauptaxe des Quarzes die Eigenschaft, dass

---

1) Bei der Construction dieser Theile wurde darauf Rücksicht genommen, dass dieselben eine möglichst geringe Capacität erhielten. Der wesentliche Vorzug des Fechner'schen Electroskops gegen das Thomson'sche Electrometer besteht nämlich, abgesehen von einer mehr gesicherten Isolation, in der ungemein kleinen Capacität; dadurch ist dasselbe zu den vorliegenden Untersuchungen so sehr geeignet.

ein in dieser Richtung auf den Krystall ausgeübter Druck keine Electricität an den Druckstellen hervorbringt. Es fragte sich, ob noch mehr solche Richtungen existiren.

Ohne mich vorher auf optischem Wege über die Richtung der Hauptaxe orientirt zu haben, legte ich die Kugel auf die besprochene Messingscheibe des Objectträgers, verband den den Druck ausübenden Stift mit dem Electroskop und suchte diejenigen Stellen auf der Kugel auf, welche nicht piëzoelectrisch wurden, wenn dort ein Druck in der Richtung eines Durchmessers auf die Kugel wirkte. War eine solche Stelle gefunden, so wurde dieselbe jedesmal auf der Kugel dadurch markirt, dass der Stift mit etwas Tusche versehen und bis zur Berührung mit der Kugel gesenkt wurde. In dieser Weise erhielt die Kugel 40 bis 50 kleine Punkte. Selbstverständlich hat man bei diesem Suchen möglichst systematisch zu verfahren. Man findet z. B. bald, dass gewisse grössere zusammenhängende Partien der Kugel nur sehr schwach electrisch werden; es sind dies, wie sich nachher herausstellte, die Stücke der Oberfläche, welche in der Nähe der Enden eines der Hauptaxe parallelen Durchmessers liegen; hier ist es schwer, die Stellen genau anzugeben, wo gar keine Piëzoelectricität entsteht; deshalb wird man auch diese Stellen nicht markiren.

Aus einer Prüfung der mit Punkten versehenen Quarzkugel ergab sich nun das Resultat, dass die Lage dieser Punkte einfach bestimmt ist durch drei Ebenen, welche sich unter 120° in dem der Hauptaxe parallelen Durchmesser schneiden und die drei Axen fehlender Piëzoelectricität enthalten. Die in dieser Weise aufgefundene Richtung der Hauptaxe stimmte mit der nachträglich auf optischem Wege gefundenen gut überein.

Es geht hieraus hervor, dass alle in den drei genannten Ebenen enthaltenen Richtungen, Richtungen fehlender Piëzoelectricität sind; ein in einer dieser Richtungen auf den Krystall ausgeübter Druck liefert an den Druckstellen keine Electricität. Diese Ebenen seien deshalb Ebenen fehlender Piëzoelectricität genannt.

Die folgenden Werthe wurden bei der beschriebenen

Kugel durch Messung der sechs zwischen jenen drei Ebenen eingeschlossenen Winkel erhalten:

58°, 61°, 60°, 60°, 59°, 62°.

Diese Winkel müssten genau 60° sein. Die vorhandenen Abweichungen können zum Theil von Versuchsfehlern herrühren; dieselben sind aber vielleicht auch eine Folge von geringen Verwachsungen und Unregelmässigkeiten des Quarzes, deren Vorhandensein sich in Anbetracht der Kugelgestalt des Krystalles nicht auf optischem Wege nachweisen liess. Solche Verwachsungen beeinflussen, wie schon Hr. Hankel bei Krystallen mit natürlichen Flächen gefunden hat, die Vertheilung der Piëzoelectricität sehr beträchtlich, so bekam ich z. B. bei einer anderen Kugel, die deutlich sichtbare Unregelmässigkeiten zeigte, folgende Winkel:

51°, 54°, 69°, 57°, 64°, 65°.

Die Versuche mit der ersten Kugel wurden einige mal wiederholt, so z. B. einmal bei einer Temperatur von ungefähr 10° C., das zweitemal bei ungefähr 31° C.; ich fand immer dieselbe Lage der drei Ebenen wieder.

2) Nachdem die Lage der Ebenen fehlender Piëzoelectricität auf der Kugel aufgefunden und markirt war, untersuchte ich, wie sich die zwischen diesen Meridianen liegenden Felder piëzoelectrisch verhielten. Es fand sich, dass an den verschiedenen Druckstellen, die in je einem der sechs Felder liegen, immer dieselbe Electricitätsart auftrat, dass diese aber wechselte, wenn man von einem Feld zum nächstfolgenden überging. Die ganze Kugel ist somit in sechs abwechselnd positiv und negativ piëzoelectrische Felder zu theilen. Zum besseren Verständniss des Folgenden wird es gut sein, sie mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu bezeichnen und anzugeben, dass an den auf dem ersten Feld liegenden Druckstellen positive Electricität entstand; dem entsprechend wurden die Felder der Reihenfolge nach mit den Zeichen +, −, +, −, +, −, versehen.

Es ergab sich weiter, dass die stärkste Electricitätsentwickelung an den Druckstellen in Richtungen gefunden wurde, welche senkrecht zur Hauptaxe stehen und die Winkel der Ebenen fehlender Piëzoelectricität halbiren; es sind dies die

in der ersten Abhandlung schon als Axen maximaler Piëzoelectricität bezeichneten Richtungen.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, dass Druckverminderungen die entgegengesetzten Electricitätsarten hervorbrachten, wie Druckvermehrung; dasselbe gilt für alle folgenden Versuche.

3) Ein in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität ausgeübter Druck entwickelt an den Druckstellen keine Electricität: es fragte sich aber, ob unter diesen Umständen nicht an anderen Stellen der Kugel Piëzoelectricität auftritt.[1]) Zur Beantwortung dieser Frage wurde die Kugel so auf die Messingscheibe gelegt, dass die Hauptaxe senkrecht zur Druckrichtung lag, und der Druck in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirkte. Das Electroskop stand mit der beschriebenen isolirten Electrode in Verbindung, welche bei unveränderter Druckrichtung nacheinander an verschiedenen Stellen der Kugel angelegt wurde.

Ich erhielt folgende Resultate: Die Ebene fehlender Piëzoelectricität, in welcher der Druck wirkte, theilt die Kugel in zwei Hälften, die in ihrer ganzen Ausdehnung electrisch werden; die eine Hälfte ist positiv, die andere negativ electrisch. Das Zeichen der auf je einer Hälfte auftretenden Piëzoelectricität richtet sich nach dem oben gefundenen Zeichen der beiden auf der betreffenden Hälfte liegenden, der Druckrichtung benachbarten Felder. Findet z. B. der Druck in der das Feld 1 von 6 und Feld 3 von 4 trennenden Ebene statt, so wird die Hälfte, auf welcher die Felder 1 und 3 liegen, positiv, die andere negativ electrisch.

Das Maximum der Entwickelung liegt an den Enden einer Axe maximaler Piëzoelectricität, welche senkrecht zur Druckrichtung steht; in dem obigen Beispiel somit in der Mitte der Felder 2 und 5. Keine Electricität entsteht auf dem Kreis, in welchem die die Druckrichtung enthaltende Ebene fehlender Piëzoelectricität die Kugel schneidet.

1) Hr. J. und P. Curie haben gefunden, dass ein Druck, welcher in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität auf ein Quarzparallelepiped ausgeübt wird, zur Folge hat, dass die Enden der zur Druckrichtung senkrechten Axe maximaler Piëzoelectricität electrisch werden.

Dasselbe Resultat wurde auch erhalten, wenn die Kugel auf dem isolirten Messingcylinder lag, oder wenn die Unterlage und der drückende Messingstift abgeleitet waren.

4) Es fragte sich nun weiter, wie die freie Oberfläche der Kugel sich verhielt, wenn der Druck in einer Axe maximaler Piëzoelectricität wirkte.

Die Quarzkugel wurde in richtiger Stellung auf den isolirten Messingcylinder gelegt, der Messingstift blieb ebenfalls isolirt. Die electrische Untersuchung der Oberfläche ergab dann, dass die Kugel auch jetzt wiederum in zwei mit entgegengesetzten Electricitäten geladene Hälften getheilt war, die durch eine Ebene fehlender Piëzoelectricität, welche senkrecht zur Druckrichtung steht, getrennt war. Das Zeichen der Electricitäten richtet sich nach dem oben gefundenen Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen liegen. Befand sich z. B. Feld 1 oben, somit Feld 4 unten, so wurde die obere Hälfte positiv, die untere negativ electrisch. Das Maximum der Electricitäten trat an den Druckstellen auf; gar keine Electricität erschien auf dem Kreis, in welchem die zur Druckrichtung senkrechte Ebene fehlender Piëzoelectricität die Kugel schneidet.

Wenn die beiden Druckstellen zur Erde abgeleitet waren, so fand ich im wesentlichen dieselbe Vertheilung der Electricität.

5) Die Kugel wurde in einer Richtung gepresst, welche zwischen einer Axe fehlender und der nächsten Axe maximaler Piëzoelectricität, somit noch immer senkrecht zur Hauptaxe lag; beide Druckstellen waren isolirt. Auch dann war die Kugel durch eine durch die Hauptaxe gehende Ebene in zwei entgegengesetzt electrische Hälften getheilt; dieselbe war jedoch nicht mehr parallel oder senkrecht zur Druckrichtung, sondern lag immer in dem spitzen Winkel, welchen die Druckrichtung mit der zweitfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität bildete. Der spitze Winkel zwischen der Druckrichtung und der Halbirungsebene war desto kleiner, je näher die Druckrichtung der Axe fehlender Piëzoelectricität lag. Aenderte man von einem Versuch zum anderen die Druckrichtung in der Weise, dass man mit der

Richtung maximaler Piëzoelectricität anfing und mit der Richtung der nächstfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität aufhörte, so änderte sich die Lage der die Kugel halbirenden Ebene durch Drehung um die Hauptaxe um einen Winkel von 90°.

Die Zeichen der Electricitäten richteten sich nach den Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen lagen. Befand sich die Druckstelle z. B. in Feld 1, dem Feld 2 aber näher als 6, so war die Halbkugel, welche einen Theil des Feldes 2, die ganzen Felder 1 und 6 und einen Theil von 5 enthielt, positiv, die andere Halbkugel negativ electrisch.

Wirkte der Druck in einer Richtung, welche den Winkel zwischen einer Axe maximaler und der nächstfolgenden Axe fehlender Piëzoelectricität halbirte, so machte die Halbirungsebene mit der Druckrichtung einen Winkel, der jedenfalls nicht viel von 45° abwich; eine genauere Bestimmung dieses Winkels war mir mit den angewandten Apparaten nicht möglich.

Das Maximum der Piëzoelectricität fand sich an den Enden eines Durchmessers, der senkrecht zur Halbirungsebene stand; im zuletzt erwähnten Fall folglich an den Enden eines Durchmessers, der senkrecht zur Axe stand und um 45° gegen die Druckrichtung geneigt war, d. h. an den Enden einer Axe fehlender Piëzoelectricität.

Bei den nun folgenden drei Versuchsreihen waren die entstehenden Electricitätsmengen so schwach, dass ich die mitgetheilten Resultate nicht als unzweifelhaft richtig bezeichnen kann. Ich glaube zwar nicht, dass durch Anwendung von empfindlicheren Apparaten etwas anderes gefunden wird, allein eine solche Controle wäre doch wünschenswerth.

6) Als Druckrichtung wurde eine zwischen einer Axe maximaler Piëzoelectricität und der Hauptaxe liegende gewählt. Die Kugel wurde durch diejenige Ebene fehlender Piëzoelectricität, welche senkrecht zu der durch die Druckrichtung und die Hauptaxe gelegten Ebene stand, in zwei entgegengesetzt electrische Hälften getheilt.

Das Zeichen der Electricitäten richtete sich nach den Zeichen der Felder, in welchen die Druckstellen lagen; be-

fanden sich diese z. B. in Feld 1 und 4, so wurden die Felder 6, 1 und 2 positiv, die Felder 3, 4 und 5 negativ electrisch.

7) Der Druck wurde in irgend einer Richtung, welche von den oben angegebenen verschieden ist und nicht mit der Hauptaxe zusammenfällt, ausgeübt. Die Kugel wurde dann immer durch eine Ebene, welche unter allen Umständen durch die Hauptaxe ging, in zwei entgegengesetzt electrische Hälften getheilt.

8) Bei Zunahme eines Druckes in der Richtung der Hauptaxe wurden auf den sechs Feldern schwache Mengen Electricität gefunden, deren Zeichen den oben gefundenen Zeichen der Felder entsprechen; die Druckstellen blieben unelectrisch.

Aus dem Obigen geht hervor, dass, wie auch der Druck gerichtet war, an den Enden des parallel der Hauptaxe verlaufenden Durchmessers niemals eine merkliche Electricitätsentwickelung stattfand.

Es ist zu erwähnen, dass die piëzoelectrischen Versuche bei trockener Zimmerluft ausserordentlich sicher und regelmässig verlaufen.

Gegen die mitgetheilten Resultate könnte der Einwand erhoben werden, dass dieselben durch Induction, sowie möglicherweise durch Leitung der Electricität an der Oberfläche beeinflusst sind. Es lässt sich auch nicht leugnen, dass diese und insbesondere die Inductionen eine Rolle spielten; ich habe mich aber mehrfach davon überzeugt, dass jene Resultate qualitativ unverändert bestehen bleiben, wenn man solche Einflüsse ausschliesst. Nur einige dahin gehörige Versuche mögen hier besprochen werden; dieselben sollen darthun, wie vorsichtig man verfahren muss, und wie man die Resultate prüfen kann.

Zwei gegenüberliegende Felder der Kugel, etwa 2 und 5, wurden vollständig mit Stanniol belegt, jedoch so, dass die beiden Stanniolstreifen sich nicht berührten; darauf legte ich die Kugel so auf den isolirten Messingcylinder, dass der Druck in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität stattfand, welche von der Grenze der Felder 1 und 6 zu

der Grenze der Felder 3 und 4 hinüberging. Der den Druck ausübende Stift war mit dem Electroskop in Verbindung. Wenn dann alle Felder isolirt blieben, so zeigte das Electroskop bei Druckänderungen keine Electricität an; wurde dagegen etwa Feld 2 abgeleitet, so fand sich positive Electricität, die durch die Induction des stark positiv geladenen Feldes 5 erzeugt wurde; kein Ausschlag des Goldblattes war zu beobachten, wenn Feld 5 ebenfalls abgeleitet war. Eine negative Ladung erhielt das Electroskop, wenn nur Feld 5 abgeleitet wurde. Im Fall die Felder 2 und 5, sowie durch Berühren mit dem Finger auch Feld 1 abgeleitet waren, erhielt ich einen schwachen Ausschlag des Goldblattes nach der negativen Seite, welche von der Induction der auf Feld 6 entstehenden negativen Electricität herrührte.

Um nachzuweisen, dass in der angegebenen Lage der Kugel wirklich die ganzen Kugelhälften und nicht etwa nur die Felder 2 und 5 electrisch wurden, leitete ich diese Felder ab und legte die mit dem Electroskop verbundene Electrode der Reihe nach an die Felder 1, 3, 4 und 6 an. Ich fand dieselben bei Druckzunahme zwar schwach, aber sicher positiv, resp. negativ electrisch.

Legte ich die Kugel auf die abgeleitete Messingscheibe mit den belegten Stellen nach unten, resp. nach oben, und übte ich einen Druck aus in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelectricität, so erhielt ich auf der ganzen Kugel positive Electricität, wenn das positive Feld 5, dagegen negative Electricität, wenn das negative Feld 2 oben lag. In diesen Fällen überwog die Inductionswirkung der oben entstehenden Piëzoelectricität der Wirkung der schwachen, auf der unteren Kugelhälfte vorhandenen entgegengesetzten Electricität. Die normalen Verhältnisse traten sofort ein, wenn auch das unten liegende Feld isolirt wurde.

Bei dieser Stellung der Kugel konnte ich bestätigen, dass auf der ganzen oberen und der ganzen unteren Kugelhälfte und nicht etwa allein an den Druckstellen Electricität auftrat. Wurden nämlich die belegten Felder abgeleitet, so fand ich trotzdem auf den anderen qualitativ dieselbe Electricitätsvertheilung wie vorher.

Ich gehe nun über zu der Mittheilung der electrooptischen Versuche. Zu denselben wurden die in der ersten Abhandlung beschriebene quadratische Quarzplatte, welche parallel der Säulenfläche geschnitten ist, sowie das mit II bezeichnete Parallelepiped und ein kleiner Quarzcylinder gebraucht. Bezüglich der näheren Beschreibung der beiden erstgenannten Krystalle verweise ich auf die erste Abhandlung.

Die Platte wurde sowohl im parallelen als im convergenten Lichte untersucht. Bei den Versuchen im parallelen Lichte befand sich dieselbe in horizontaler Lage in der mit Benzol gefüllten Flasche; die untere Electrode war die mit zwei Glasstreifen versehene Messingscheibe, die obere ein in die Vertiefung der Platte ragender Messingdraht (vgl. die frühere Versuchsanordnung). Das unter 45° gegen die Horizontale, geradlinig polarisirte Natriumlicht ging parallel der Hauptaxe durch die Platte, und der Analysator war auf dunkel gestellt. Während des Electrisirens zeigte sich eine lebhafte Erhellung der Mitte des Gesichtsfeldes, der Stelle unter der Vertiefung in der Platte. Die Vertheilung der hellen Stellen war verschieden, je nachdem sich oben oder unten die positive Electricität befand.

Das Resultat überraschte mich, da durch electrische Kräfte, welche in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirken, keine Compression oder Dilatation in dieser Richtung erzeugt werden dürfte.

Ebenso überraschte mich das Verhalten der Platte im convergenten Lichte. Dasselbe brachte mich zwar einer Erklärung des ersten Versuches näher, die vollständige Erklärung erhielt ich aber erst nach Ausführung der oben beschriebenen piëzoelectrischen Versuche.

Um die Platte im convergenten Lichte zu untersuchen, kittete ich gegen die quadratischen Flächen derselben 0,7 cm weite, nach oben rechtwinklig gebogene Glasröhren, die mit Quecksilber gefüllt wurden. Darauf brachte ich die Platte so unter ein Steeg'sches Polarisationsmikroskop, dass das aus concentrischen Kreisen bestehende Axenbild zur Beobachtung kam; die Beleuchtung geschah wieder durch eine Natriumflamme.

Das Quecksilber in den beiden Glasröhren war mit je einer der Electroden der Electrisirmaschine verbunden. Im Augenblicke, wo die Electricität der Platte zugeführt wurde, verwandelten sich die Kreise in Ellipsen; die grosse Axe derselben, welche länger war als der entsprechende Kreisdurchmesser, machte einen Winkel von 45° mit den Kraftlinien (die senkrecht zur quadratischen Fläche der Platte standen); die kleine Axe war kleiner als der Kreisdurchmesser. Lag die Platte so unter dem Mikroskop, dass die durch Druck positiv werdende Seite sich rechts, somit die durch Druck negativ werdende Seite sich links befand, und wurde der dem Beobachter zugewendeten Seite der Platte positive, der abgewendeten Seite negative Electricität zugeführt, so war die grosse Axe von links oben nach rechts unten gerichtet. Nach einem Wechsel der zugeführten Electricitäten hatte die grosse Axe die zu der vorigen senkrechte Richtung, somit von rechts oben nach links unten.

Es ist nun bekannt[1]), dass eine mechanische Compression, resp. Dilatation einer senkrecht zur Axe geschliffenen Quarzplatte in einer zur Axe senkrechten Richtung eine Veränderung des Ringsystems erzeugt, welche der soeben besprochenen ähnlich ist. Die Durchmesser der Kreise werden in der Richtung der Compression verlängert und in der dazu senkrechten Richtung verkürzt. Wird dagegen die Platte dilatirt, so liegt die grosse Ellipsenaxe senkrecht zur Richtung der Dehnung.

Die Resultate der beiden letzten Versuche würden somit erklärt sein, wenn die Annahme erlaubt wäre, dass electrische Kräfte, welche in der Richtung einer Axe fehlender Piëzoelectricität wirken, zwar keine Formveränderungen in der Richtung dieser Axe erzeugen, wohl aber eine Compression oder Dilatation oder beide zugleich in Richtungen, welche senkrecht zur Hauptaxe liegen und unter 45° gegen die betreffende Axe fehlender Piëzoelectricität geneigt sind, zur Folge haben. Inwieweit diese Annahme gerechtfertigt ist, konnte ich nicht entscheiden, bevor die beschriebenen

1) Pfaff, Pogg. Ann. **107.** p. 133. 1859.

Versuche über Piëzoelectricität angestellt waren; und deshalb habe ich mit der Veröffentlichung meiner electrooptischen Versuche mit senkrecht zur Axe geschliffenen Platten bis jetzt gewartet.

Aus den unter 5) mitgetheilten piëzoelectrischen Versuchen und dem von Lippmann ausgesprochenen Gesetz der Reciprocität von Compression und electrischer Ladung ergibt sich die Bestätigung der Richtigkeit jener Annahme und somit die vollständige Erklärung obiger Versuche.

Es wurde am citirten Orte gefunden, dass ein Druck, welcher unter 45° gegen eine Axe fehlender Piëzoelectricität und senkrecht zur Hauptaxe auf den Quarz ausgeübt wird, an den Enden jener Axe Piëzoelectricität erzeugt, und zwar eine Menge, die grösser ist, als jede an anderen Stellen entstehende. Theilt man somit jenen Enden dieselben Electricitäten mit, welche durch Druck in der angegebenen Richtung entstehen würden, so muss in dieser Richtung eine Dilatation des Quarzes stattfinden; und umgekehrt theilt man den Enden Electricitäten mit, die den durch Druck entstehenden entgegengesetzt sind, so muss in dieser Richtung eine Compression auftreten. Solche Richtungen, die senkrecht zur Hauptaxe stehen und unter 45° gegen eine Axe fehlender Piëzoelectricität geneigt sind, gibt es nun für jede Axe fehlender Piëzoelectricität zwei, nämlich je eine auf beiden Seiten dieser Axe. Aus dem unter 5) Gesagten geht weiter hervor, dass die Electricitäten, welche entstehen, wenn ein Druck in der einen dieser zwei Richtungen ausgeübt wird, den Electricitäten entgegengesetzt sind, welche bei einem Druck in der anderen Richtung auftreten. Wenn man folglich dem einen Ende einer Axe fehlender Piëzoelectricitäten positive und dem anderen negative Electricität zuführt, so muss diese Electrisirung eine Compression in einer jener beiden Richtungen und zugleich eine Dilatation in der anderen bewirken. Werden die zugeführten Electricitäten gewechselt, so muss auch ein Wechsel zwischen Compression und Dilatation stattfinden. Das soeben Gesagte ist aber nichts anderes, als was oben zur Erklärung der electrooptischen Versuche angenommen wurde.

Das in der ersten Abhandlung mit II bezeichnete Quarzparallelepiped wurde nun ebenfalls sowohl im parallelen als im convergenten Natriumlicht untersucht. Im ersten Falle war dasselbe genau wie früher in der mit Benzol gefüllten Flasche aufgestellt, nur mit dem Unterschied, dass jetzt die Lichtstrahlen parallel der Hauptaxe durchgingen. Wenn dann der Analysator auf dunkel gedreht war, so wurde durch das Electrisiren die Stelle zwischen den Bohrlöchern intensiv erhellt; die Vertheilung der hellen Partien änderte sich beim commutiren. Beides war zu erwarten, da die Bohrlöcher in der Richtung einer Axe maximaler Piëzoelectricität angebracht sind.

Um die Art der erzeugten Doppelbrechung zu untersuchen, konnte auch jetzt wie bei der Quarzplatte von vorhin das früher angewandte Mittel einer eingeschalteten Glasplatte, die in horizontaler oder verticaler Richtung comprimirt wurde, nicht gebraucht werden, da durch die in der Richtung der Hauptaxe vorhandene Drehung der Polarisationsebene die Verhältnisse complicirter waren als früher; deshalb nahm ich die Untersuchung im convergenten Licht vor.

Zu diesem Zweck wurden gegen die Endflächen des Parallelepipeds rechtwinklig nach oben gebogene Glasröhren gekittet und diese sowie die damit communicirenden Bohrlöcher mit Quecksilber gefüllt. Die durch Electrisirung entstehende Aenderung des in der Mitte zwischen den Bohrlöchern liegenden Ringsystems bestand nun wiederum darin, dass die Kreise zu Ellipsen wurden, deren grosse Axen grösser, und deren kleine Axen kleiner waren, als der Durchmesser des entsprechenden Kreises. Die Richtung der langen Axe war parallel mit der Verbindungslinie der Bohrlöcher, folglich parallel mit der Richtung der betreffenden Axe maximaler Piëzoelectricität, wenn das bezeichnete Ende des Krystalls positiv, das nicht bezeichnete Ende negativ electrisch war. Diese Axe stand dagegen senkrecht zu jener Richtung, wenn das bezeichnete Ende negativ und das nicht bezeichnete Ende positiv electrisch war.

Berücksichtigt man das in der ersten Abhandlung angegebene piëzoelectrische Verhalten des benutzten Krystalles,

so findet man leicht mit Hülfe der unter 3 und 4 aufgeführten piëzoelectrischen Versuche, dass die beobachtete optische Erscheinung vollständig zu erklären ist durch die Zusammenwirkung einer electrischen Contraction in einer und einer Dilatation in der dazu senkrechten Richtung.

Ich komme nun zu den Versuchen mit dem kleinen Quarzcylinder. Die Axe des Cylinders ist parallel der Hauptaxe, der Durchmesser beträgt 0,45 cm, die Höhe 0,5 cm; derselbe ist genau centrisch in der Richtung der Axe in einer Weite von 0,08 cm durchbohrt; die Endflächen sind polirt. Ich untersuchte zunächst das piëzoelectrische Verhalten desselben und markirte die Richtungen der drei Axen fehlender Piëzoelectricität. Dann kittete ich denselben mittelst Canadabalsam mit den Endflächen auf je zwei 4,5 cm lange, 1,5 cm breite Glasplatten, die beide an einer Stelle in einer Weite von ebenfalls 0,08 cm durchbohrt sind. Die Durchbohrung der einen Platte coincidirt genau mit der Durchbohrung des Cylinders; die Durchbohrung der anderen liegt 2 cm vom Cylinder entfernt. Die Ränder des Glasplatten, die paarweise parallel sind, wurden durch aufgekittete Glasstreifen miteinander verbunden, so, dass ein Glaskästchen entstand, welches durch die Durchbohrung der einen Glasplatte mit Quecksilber gefüllt wurde. Dieses Quecksilber umgibt vollständig die Mantelfläche des Quarzcylinders, bildet die äussere Belegung desselben und steht bei den Versuchen durch einen Draht mit einer Electrode der Holtz'schen Electrisirmaschine in Verbindung. Die innere Belegung ist ein durch die andere Glasplatte gehender, in die Durchbohrung des Cylinders eingesteckter dünner Draht, der zu der anderen, zur Erde abgeleiteten Electrode führte.

Das beschriebene Präparat wurde so unter das Steeg'sche Polarisationsmikroskop gelegt, dass der erste Kreis des Ringsystems concentrisch mit der Durchbohrung des Cylinders war und unter Anwendung von Natriumlicht deutlich beobachtet werden konnte; es ist dazu erforderlich, dass das obere Linsensystem des Apparates sich in einer gewissen, leicht aufzufindenden Entfernung von dem Präparat befindet.

Das Electrisiren der beiden Belegungen des Quarzcylin-

ders hatte nun die nachstehenden Erscheinungen zur Folge. Nur die sechs Stellen des Kreises, welche in der Richtung der drei durch die Mitte gehenden Axen fehlender Piëzoelectricität lagen, behielten ihre Lage bei, an allen anderen Stellen fand eine Verschiebung nach dem Centrum hin, oder von diesem weg statt; dieselbe war am grössten in den durch die Mitte gehenden Richtungen der drei Axen maximaler Piëzoelectricität. In je einer dieser Richtungen war auf der einen Seite von der Mitte eine Verschiebung nach innen, auf der anderen eine Verschiebung nach aussen zu beobachten, und zwar in jedem Fall dem piëzoelectrischen und dem früher gefundenen electrooptischen Verhalten des Quarzes in diesen drei Richtungen entsprechend. Der Ring erhielt durch diese Verschiebungen eine Gestalt, welche der eines gleichseitigen Dreiecks mit abgerundeten Ecken ähnlich ist. Durch ein Wechseln der Electricitäten änderte sich die Lage des Dreiecks in der Weise, dass die neue Lage durch eine Drehung des Dreiecks um 180° in seiner Ebene aus der früheren hervorgeht. — Die besprochene Versuchsanordnung ist zunächst deshalb bemerkenswerth, weil man bei derselben mit einem Blick die in den sechs erwähnten, ausgezeichneten Richtungen stattfindenden Vorgänge übersehen kann; das erhaltene Resultat gab ausserdem Veranlassung zu weiteren electrischen Versuchen mit Quarz, über welche ich in einer folgenden Mittheilung zu berichten hoffe.[1])

Ich halte es für überflüssig, noch mehr electrooptische Versuche mit Quarz mitzutheilen, da alle bisher von mir gefundenen Erscheinungen sich aus dem piëzoelectrischen Verhalten ableiten lassen. Inwieweit auch die den Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildenden Hypothesen in allen Fällen stichhalten, muss durch eine anzustellende Rechnung untersucht werden.

Giessen, im Januar 1883.

1) Ich habe Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe die Anfertigung von Quarzpräparaten, welche zu electrooptischen Versuchen dienen, übertragen; dieselben können auf Wunsch vor ihrer Ablieferung unter meiner Leitung untersucht werden.

III. *Electrische Untersuchungen;* *von Carl Fromme.*

1. Abhandlung.

Ueber das Verhalten von Platin, Palladium, Gold, Gaskohle und Aluminium in Chromsäurelösung.

In der vorliegenden und in zwei folgenden Abhandlungen sind die Resultate einer Experimentaluntersuchung enthalten, welche im Jahre 1879 begonnen und 1881 beendet wurde, und über welche auch schon Ende 1881 ein kurzer Bericht[1]) von mir erstattet worden ist, während das Resultat der ersten Versuche bereits der physikalischen Section der Naturforscherversammlung zu Baden-Baden (1879) mitgetheilt wurde.[2])

I. Platin in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

1. Die electromotorische Kraft eines geöffneten und eines geschlossenen Elements.

Im Jahre 1842 hat Poggendorff[3]) gezeigt, dass, wenn man die (käufliche) Salpetersäure des Grove'schen Elements durch Chromsäurelösung ersetzt, nicht allein die electromotorische Kraft (E. K.) desselben im Verhältniss von 100:62 sinkt, sondern dass auch die Eigenschaft der Constanz dem Elemente völlig verloren geht, indem die Stromstärke bedeutend zunimmt: Der angegebene Werth der E. K. ist ihr Maximalwerth, welcher erst nach längerer Stromschliessung erreicht wird. Diese Thatsachen waren deshalb auffällig, weil das Bunsen'sche Element durch Einführung der Chromsäure an Stelle der Salpetersäure eine etwas grössere E. K. erhielt, ohne an seiner Constanz eine besondere Einbusse zu erleiden.

---

1) Fromme, Ber. d. Oberh. Ges für Natur- u. Heilk. 21. p. 1—14. 1881.

2) Fromme, Tageblatt p. 178.

3) Poggendorff, Pogg. Ann. 57. p. 101. 1842.

Die gleichen Beobachtungen wurden später von Buff[1]) gemacht.

In Bezug auf die Erklärung dieses der Kohle gegenüber ganz abnormen Verhaltens des Platins gehen die Ansichten der beiden Physiker auseinander. Buff glaubt, die Ursache in der kleinen Oberfläche eines Platinbleches gegenüber der grossen Oberfläche eines porösen Kohlestücks suchen zu müssen, und gibt auch an, dass er nach Tränkung der Kohle mit Wachs mit dieser einen ebenso inconstanten Strom wie mit Platin erhalten habe.

Poggendorff dagegen zieht aus seinen Versuchen den Schluss, dass die electrische Stellung der Metalle in der Spannungsreihe durch die Flüssigkeiten geändert werde, auch wenn, wie dies bei Platin und Kohle der Fall ist, ein chemischer Angriff durch die Flüssigkeit nicht stattfindet.

Demnach legt Poggendorff der Verschiedenheit des electrischen Verhaltens von Platin und Kohle eine primäre Ursache, Buff dagegen eine secundäre unter, nämlich eine durch die kleine Oberfläche eines Platinblechs bedingte Polarisation, „welche sich freilich in gerade entgegengesetzter Weise, als sonst bekannt, nämlich in einer Zunahme der Stromstärke äusserte."

In der Folge hat man die Erklärung Poggendorff's acceptirt[2]) und sich mit derselben bis jetzt zufrieden gegeben, obwohl die von Poggendorff und Buff constatirte Thatsache auch bei theoretischen Untersuchungen unbequem war.[3])

Zu einer Prüfung der Poggendorff'schen Erklärung — die Arbeit von Buff war mir anfänglich unbekannt — veranlasste mich einestheils die Erfahrung[4]), dass die von Poggendorff benutzte Ohm'sche Methode der Messung electromotorischer Kräfte selbst bei einem als constant vorausgesetzten Element Resultate liefern kann, welche mit dem

1) Buff, Lieb. Ann. **101.** p. 1. 1857. cf. auch Du Moncel, Dingl. Journ. **203.** p. 375. 1872.

2) G. Wiedemann, Galv. (2) **1.** p. 411. 1872.

3) Braun, Wied. Ann. **5.** p. 204. 1878.

4) Fromme, Wied. Ann. **8.** p. 328—335. 1879.

unter Einschaltung grosser Widerstände mit einem Galvanometer gewonnenen nicht übereinstimmen, anderentheils die Beobachtung[1]), dass unter Umständen auch bei der Combination Platin-Salpetersäure (Grove'sches Element) eine ähnlich grosse Zunahme der Stromstärke, wie sie Poggendorff bei Platin-Chromsäure erhalten hatte, vorkommt.

Ich habe deshalb zugleich mit Messungen der E. K. nach der Ohm'schen Methode auch solche mit dem Electrometer bei geöffnetem Element ausgeführt. Ausser dem Grove'schen Element wurde auch das Bunsen'sche mit Bezug auf den Einfluss, welchen die Ersetzung der Salpetersäure durch Chromsäure auf seine E. K. ausübt, geprüft, sowie auch die schon von Poggendorff untersuchte Combination Zink-Schwefelsäure-Kupfer-Chromsäure.

Die benutzten Elemente waren von der früher (l. c.) beschriebenen Form, die Tangentenbussole mit Spiegelablesung ist dort ebenfalls beschrieben. Das Electrometer war Kirchhoff'scher Construction. Die Schwefelsäure war stark verdünnt, die Chromsäurelösung nach Bunsen's Vorschrift[2]) bereitet, die Salpetersäure hatte das spec. Gew. 1,4.

Bei den Messungen nach der Ohm'schen Methode enthielt der Schliessungskreis einen Rheostatenwiderstand von 20 bis 5 S.-E., der sonstige äussere Widerstand war sehr gering. Die Messungen der Stromintensität lieferten folgende Resultate.

Bei Platin — concentrirter Salpetersäure nimmt die Stromstärke ein wenig zu, bei Kohle — concentrirter Salpetersäure ein wenig ab, wie schon früher (l. c.) von mir gefunden. Bei Platin-Chromsäure findet, wie auch Poggendorff und Buff beobachteten, eine sehr starke Zunahme, bei Kohle — Chromsäure eine kleine Abnahme statt, welche grösser ist, als bei Kohle-Salpetersäure. Kupfer-Chromsäure liefert einen zwar schwachen, aber vollkommen constanten Strom. Nach Ablauf einiger Minuten wurde auch bei den Combinationen mit Platin und Kohle die Stromstärke nahe constant.

1) Fromme, l. c. p. 330 a. E.
2) Bunsen, Pogg. Ann. 155. p. 230. 1875.

Die E. K. wurde aus diesen grössten, resp. kleinsten Werthen der Stromintensität berechnet. Setzt man die E. K. des Grove'schen oder Bunsen'schen Elementes, wenn es Salpetersäure enthält, gleich 100, so war die E. K. des mit Chromsäurelösung gefüllten Elementes gleich 70, resp. 104, und die des Kupfer-Chromsäureelements gleich 62.

Demnach nimmt die E. K. des Bunsen'schen Elements um 4 Proc. zu, die des Grove'schen aber um 30 Proc. ab, wenn man die Salpetersäure vom spec. Gew. 1,4 durch Chromsäure ersetzt. Poggendorff hatte eine Abnahme von 38 Proc. beim Grove'schen Element gefunden, seine Chromsäurelösung war aber von etwas anderer Zusammensetzung.

Wurden dagegen die genannten Combinationen in stromlosem Zustande mit dem Electrometer verglichen, so nahm die E. K. des Grove'schen Elements nur um $2\frac{1}{2}$ Proc. ab, wenn an Stelle der Salpetersäure vom spec. Gew. 1,4 Chromsäure trat, während beim Bunsen'schen Element wieder eine Zunahme von 4 Proc. beobachtet wurde. Spätere Versuche haben mir auch beim Grove'schen Element eine kleine Zunahme ergeben, sodass ich vermuthe, dass die bei den ersten Beobachtungen erhaltene kleine Abnahme aus nicht genügend reiner Beschaffenheit der Platinoberfläche (cf. § 7) entsprang.[1])

Es wird also entgegen Poggendorff's Ansicht die gegenseitige Stellung von Platin und Kohle in der Spannungsreihe jedenfalls nur unbedeutend geändert, wenn man dieselben aus Salpetersäure in Chromsäure bringt, und folglich kann die Thatsache, dass die E. K. des durch einen kleinen Widerstand geschlossenen Platin-Chromsäureelements nur etwas mehr als $\frac{2}{3}$ von der des Kohle-Chromsäureelements beträgt, nur durch electrolytische Processe am Platin ihre Erklärung finden.

1) Ich will noch erwähnen, dass ich auch einige Messungen der E. K. des Platins in Mischungen von Chromsäure und Salpetersäure anstellte. Dieselben ergaben, dass bei Zusatz geringer Mengen von Chromsäurelösung zur Salpetersäure die E. K. des Grove'schen Elements zuerst um 3 Proc. stieg und bei weiterem Zusatz wieder abnahm. Diese Messungen geschahen bei stromlosem Element mit dem Electrometer.



Eine weitere Untersuchung wird nun zunächst die folgenden beiden Fragen beantworten müssen:

Wenn es, wie eben bewiesen, secundäre Processe sind, die das abnorme Verhalten des Platins in Chromsäure veranlassen, und wenn, wie Buff vermuthete, die Ursache desselben in der kleinen Oberfläche eines Platinblechs liegt, so müsste bei gehöriger Vergrösserung der Oberfläche oder überhaupt bei Verminderung der Stromdichte das geschlossene Element eine der des ungeschlossenen gleiche E. K. zeigen und einen constanten Strom liefern.

Zweitens ist zu muthmassen, dass die oben beschriebenen Beobachtungen die Erscheinung noch nicht in ihrem ganzen Umfange wiedergeben. Denn wenn es gestattet ist, von einer Widerstandsänderung des Elements während der Dauer der Stromschliessung abzusehen und also in der beobachteten Zunahme der Stromintensität eine Zunahme der E. K. zu erblicken, so muss nothwendig, da die E. K. des geschlossenen Elements kleiner als die des geöffneten gefunden wurde, der beobachteten Zunahme eine diese an Grösse übertreffende Abnahme vorhergegangen sein.

Bei den folgenden Beobachtungen diente zur Messung der E. K. entweder und meist ein Wiedemann'sches Galvanometer oder ein Kirchhoff'sches Electrometer. Vom Galvanometer war der astasirende Magnet entfernt. Bei grossem Rheostatenwiderstande durchlief der Strom eine Windungsreihe einer Spirale mit feinem Draht, bei kleinem eine Windungsreihe einer Spirale mit dickem Draht. Die Spiralen sind bezeichnet als Gr.(osse) Sp.(irale) und Kl.(eine) Sp.(irale). Der Abstand der Scala vom Spiegel betrug 1830 Scalentheile; die Entfernung der Spirale vom Magnetspiegel wurde jedesmal so gewählt, dass ein geeigneter, innerhalb einer längeren Versuchsreihe, in welcher der Rheostatenwiderstand wechselte, nahe gleicher Ausschlag auf der Scala entstand.

Bei den meisten Versuchen befand sich die Chromsäure in einem kleinen Thoncylinder, welcher umgeben von einem kleinen amalgamirten Zinkcylinder in einem Glas mit verdünnter Schwefelsäure stand. Die Ablenkungen durch das Chromsäureelement (*C*) wurden mit denen verglichen, welche

ein ihm sonst gleiches, nur concentrirte Salpetersäure an Stelle der Chromsäure enthaltendes Element (*S*) gab. Dieses lieferte bei grösseren Schliessungswiderständen einen durchaus constanten Strom. Das Platin dieses Vergleichselements besass Blechform und eine grosse Oberfläche, während das Platin des Chromsäureelements meist Drahtform hatte, weil es sich dann leicht in der Alkoholflamme glühen liess. Es wurde nämlich das Glühen als das beste und einfachste Mittel befunden, um das Platin von den Wirkungen vorhergegangener Versuche zu befreien und in einen immer gleichen Zustand zu versetzen. Wo nichts anderes bemerkt, ist das Platin vor jeder Versuchsreihe und vor jeder Aenderung des Widerstands geglüht worden.

Während der Beobachtung mit einem bestimmten Rheostatenwiderstand blieb, wenn nichts Gegentheiliges angegeben, der Strom fortwährend geschlossen, und befand sich jeder Theil des Elements in vollkommener Ruhe.

Die Tabellen geben die Ablenkungen des Galvanometers in Scalentheilen zu der vorgesetzten Zeit an, welche vom Moment der Schliessung des Stromes an gezählt ist. Die erste, der Zeitangabe ermangelnde Zahl bezieht sich auf den nach etwa 1 Sec. erfolgenden ersten Ausschlag des Galvanometers. Die Schwingungen des Galvanometerspiegels beruhigten sich innerhalb 10 Secunden.

2. Aenderung der electromotorischen Kraft mit der Dauer der Stromschliessung und mit der Stromdichte.

Die Tab. 1 und 2 zeigen die Aenderung der E. K. während der Dauer der Stromschliessung.

Tab. 1. Platindraht von 0,9 mm Dicke und 350 mm Länge, zu einer Spirale aufgewickelt.

W = *23000 S.-E. Gr. Sp.*

		sec		sec		sec	
S.	496,0	50	358,1	160	338,0	600	321,5
10sec	380,5	60	355,8	180	335,3	800	321,2
		70	353,6	200	333,0	1000	320,4
C.	489,5	80	351,6	240	329,5	1200	319,8
10sec	369,3	90	349,7	280	327,1	1400	320,0
20	366,0	100	347,8	320	325,5		
30	363,2	120	344,2	360	324,4		
40	360,6	140	340,9	400	323,5		

W = 1400 *S.-E.* *Gr. Sp.*

		sec		sec	
S.	501,9	50	305,1	130	303,4
10 sec	383,4	60	301,8	140	304,4
		70	299,9	150	305,1
C.	484,9	80	299,4	160	305,6
10 sec	343,9	90	299,5	170	305,9
20	327,4	100	300,0	180	306,1
30	317,7	110	300,9	190	306,3
40	310,4	120	302,1	200	306,4

W = 400 *S.-E.* *Kl. Sp.*

		sec		sec	
S.	493,0	20	264,5	80	286,5
10 sec	379,0	30	271,5	90	287,8
		40	276,7	100	288,9
C.	452,0	50	280,2	110	289,9
10 sec	266,5	60	282,9	120	290,5
15	262,0	70	285,0		

Tab. 2. Platindraht von 0,5 mm Dicke und 35 mm Länge.

W = 19000 *S.-E.* *Gr. Sp.*

		sec		sec		sec	
S.	484,2	20	263,2	70	226,2	120	245,7
10 sec	370,4	30	251,4	80	224,7	140	256,0
		40	242,0	90	225,0	160	257,1
C.	457,2	50	235,2	100	230,7		
10 sec	285,2	60	229,9	110	238,0		

W = 800 *S.-E.* *Kl. Sp.*

		sec		sec	
S.	479,0	50	173,1	130	231,3
10 sec	364,7	60	173,9	140	234,3
		70	174,5	150	237,7
C.	312,0	80	175,8	160	241,0
10 sec	179,5	90	177,8	170	244,2
20	172,5	100	182,0	180	248,0
30	172,4	110	231,0	200	253,8
40	172,8	120	228,7	[illegible]00	256,0

W = 400 *S.-E.* *Kl. Sp.*

		sec		sec	
S.	491,0	40	173,0	130	242,2
10 sec	373,5	60	174,0	140	243,5
C.	287,0	80	176,1	160	251,2
10	172,0	100	179,0	180	257,7
20	171,8	110	181,6	200	259,1
30	172,2	120	187,5		

Die Tab. 3, 4 und 5 veranschaulichen den Einfluss, welchen die Grösse des Schliessungswiderstandes, oder, da während aller zu der gleichen Tabelle gehörenden Beobachtungen die in die Chromsäure eintauchende Platinoberfläche die gleiche blieb, die Stromdichte auf Grösse und Verlauf der E. K. ausübt.

Tab. 3. Platinspirale der Tab. 1.

	Spirale	Grosse							Kleine	
S.	*W*	23000	15000	8000	3000	1400	700	260	800	400
	Erster Ausschlag *a*	495	494	489	492	502	499	496	494	493
	Ablenkung *b*	379	377	373	376	383	381	378	377	379

	Spirale	Grosse							Kleine	
C.	Erster Ausschlag *c*	489	491	484	480	485	480	474	464	452
	Minimum *d*	321	323	320	302	299	292	287	272	262
	Zeit des Minimums sec	1200	700	420	540	80	70	60	25	15
	Maximum *e*	328	328	325	318	320	321	317	310	302
	b/e	1,15	1,15	1,15	1,18	1,20	1,19	1,19	1,22	1,25
	$b-d/e-d$	—	—	—	—	4,00	3,07	3,03	2,87	2,92

Tab. 4. Ein Drittel der Platinspirale von Tab. 3.

	Spirale	Grosse					Kleine			
	W	14800	8000	5000	2000	1000	750	400	150	80
S.	Erster Ausschlag *a*	495	492	492	490	491	489	497	495	508
	Ablenkung *b*	379	377	376	374	375	374	381	380	390
C.	Erster Ausschlag *c*	482	480	474	462	458	445	414	356	328
	Minimum *d*	279	272	269	261	260	246	234	204	197
	Zeit des Minimums sec	240	100	80	40	30	10	0-10	0-10	0-10
	Maximum *e*	285	282	278	284	284	289	292	287	288
	b/e	1,33	1,34	1,35	1,32	1,32	1,29	1,30	1,32	1,35
	$b-d/e-d$	—	—	12,00	5,00	4,80	3,00	2,53	2,12	2,12

Tab. 5. Platindraht der Tab. 2.

	Spirale	Grosse					Kleine		
	W	19000	10000	5000	2000	1000	800	400	140
S.	Erster Ausschlag *a*	483	501	502	501	491	479	491	506
	Ablenkung *b*	370	385	384	382	374	365	373	388
C.	Erster Ausschlag *c*	461	471	445	406	372	311	287	253
	Minimum *d*	222	215	214	193	187	172	171	173

Spirale	Grosse					Kleine		
Zeit des Minimums sec	85	90	45	75	45	30	20	10
Maximum e	269	279	278	273	269	264	265	275
b/e	1,37	1,38	1,38	1,40	1,39	1,38	1,40	1,41
$b-d/e-d$	3,15	2,66	2,66	2,36	2,28	2,10	2,10	2,11

Folgendes sind die Resultate dieser Beobachtungen: Zunächst bestätigt sich der aus den Beobachtungen des § 1 mit grosser Wahrscheinlichkeit gezogene Schluss, dass die E. K. der Combination Zink-Schwefelsäure-Chromsäure-Platin vom Augenblick der Stromschliessung an ab- und nach Erreichung eines Minimums zunimmt, ohne indess den Ausgangswerth wieder zu erreichen. Als Ausgangswerth, d. h. als E. K. des ungeschlossenen Elements können wir aber mit sehr grosser Annäherung die constante E. K. des Salpetersäureelements ansehen, wie eine graphische Darstellung, z. B. der in Tab. 1 mit $W = 23000$ erhaltenen Resultate zeigt. Bei keiner Stromdichte bleibt die E. K. des Chromsäureelements constant, auch nicht bei den kleinstmöglichen, bei welchen die Oberfläche des Platins etwa 1000 qmm und der Widerstand im Rheostaten 23000 S.-E. betrug. Demnach ist auch die von Buff gegebene Erklärung zu verwerfen, nach welcher die Inconstanz des Stromes (der E. K.) nur eine Folge kleiner Platinoberfläche, also grosser Stromdichte sein sollte. Die vorliegenden Beobachtungen zeigen vielmehr, dass die Inconstanz der Combination erst mit gegen die Null convergirender Stromdichte völlig verschwindet.

Bei sehr kleiner Stromdichtigkeit nimmt die E. K. ausserordentlich langsam, aber sehr regelmässig verzögert, bis zu einem Minimum ab und bleibt dann auf diesem stehen. Mit wachsender Stromdichte nimmt das Minimum an Tiefe zu — bis zu 55 Proc. von der E. K. des ungeschlossenen Elements — und wird schneller erreicht, zugleich nimmt aber auch die E. K. nach erreichtem Minimum wieder zu, und zwar so, dass die Grösse der Zunahme wächst, der erreichte Endwerth aber abnimmt. Es nimmt also das Verhältniss der Abnahme zur Zunahme $b-d/e-d$ ab, bis es schliesslich einen

constanten Werth 2,1 erreicht. Bei grösseren Stromdichten nimmt die E. K. um etwa doppelt soviel ab, als sie nachher wieder zunimmt. Der erreichte Maximalwerth aber steht zu der E. K. des ungeschlossenen Elements bei den kleinsten Stromdichten im Verhältniss 1:1,15 und bei den grössten im Verhältniss 1:1,4. Das letztere entspricht dem auch im § 1 erhaltenen Resultat. Bei grösserer Stromdichte ist die Zunahme während kurzer Zeit eine so starke, dass der Spiegel des Galvanometers in Schwingungen geräth. Dann wurde häufig beobachtet (Tab. 2 $W = 800$), dass nach der starken Zunahme die E. K. erst wieder einige Zeit abnahm. Es wiederholte sich dann der bisherige Verlauf der E. K. noch einmal in kleinerem Maassstabe, indem nach baldiger Erreichung eines Minimums die E. K. wieder erst beschleunigt, dann verzögert zunahm.

Wenn man das Verhältniss c/e des ersten Ausschlags des Galvanometers zu dem nach längerer Zeit eintretenden Maximum bildet, so findet man dasselbe bei den kleinsten Stromdichten constant, bei grösseren bis zu einem Maximum zu- und bei den grössten wieder abnehmend. Demnach vermindert sich die E. K. bei den kleinsten Stromdichten innerhalb der ersten Secunde in demselben Verhältniss, in welchem ihr Endwerth abnimmt; bei wachsender Stromdichte nimmt sie dann weniger und später bedeutend stärker als ihr Endwerth ab, welch letzterer sehr bald nahe unabhängig von der Stromdichte wird.

Dass das Salpetersäureelement eine sehr constante und von der Stromdichte innerhalb der hier eingehaltenen Grenzen unabhängige E. K. besass, geht daraus hervor, dass das Verhältniss a/b des ersten Ausschlags zu der constanten Ablenkung überall das gleiche war. Die Mittelwerthe in den drei Tabellen 3 bis 5 sind resp. 1,309, 1,307, 1,308.

Bei den vorstehend beschriebenen Messungen war der Schliessungswiderstand immer so gross gegen den Widerstand des Elements, dass die beobachtete Stromintensität direct als Maass der E. K. betrachtet werden konnte.

Beobachtet man bei grossen Stromdichten, entweder in-

dem man den Rheostatenwiderstand noch weiter, als oben geschehen, vermindert, oder — wodurch ebenfalls das Verhältniss des Schliessungswiderstands zu dem inneren Widerstand des Elements abnimmt — indem man die Platinoberfläche noch mehr verkleinert, so wird man zwar nicht mehr für die Stromintensität ohne weiteres die E. K. setzen dürfen, aber man wird doch unter der Voraussetzung nicht gar zu kleiner Rheostatenwiderstände aus dem Verlaufe der Stromintensität noch eine ungefähre Vorstellung von dem der E. K. gewinnen.

Das Resultat solcher Beobachtungen war, dass die E. K. sehr schnell bis zu einem sehr kleinen Werthe abnahm, ohne sich von demselben wieder zu erheben. Die Periode der Zunahme fällt also bei grosser Stromdichte — ebenso wie bei sehr kleiner — ganz aus, und der Endwerth der E. K. beträgt noch weniger als $^7/_{10}$ von der des Grove'schen Elements.

3. Einfluss einer Erschütterung des Platins auf die electromotorische Kraft.

Die Wirkung, welche eine Erschütterung des Platins auf die E. K. ausübt, hängt von der Stromdichtigkeit ab.

Am bedeutendsten wirkt dieselbe in dem Falle so grosser Stromdichtigkeit, dass die Periode der Zunahme ganz ausfällt (§ 2 a. E.), eine Erschütterung des Platins erhebt die E. K. dann leicht auf das Dreifache ihres Minimalwerthes, auf welchen sie mit aufhörender Bewegung aber sehr bald zurückgeht.

Dagegen ist die Erschütterungswirkung bei mittleren und kleinen Stromdichten eine verhältnissmässig geringe.

Sie besteht auch hier im ersten Augenblick wieder in einer Zunahme der E. K., welche bei kleinen Stromdichten sehr allmählich wieder verschwindet, bei mittleren aber sofort in eine der Zunahme an Grösse nachstehende Abnahme übergeht, die langsam ersetzt wird.

Um einen Begriff von der Grösse dieser Aenderungen zu geben, sei angeführt, dass, als in Tab. 1 $W = 1400$ die E. K. nach 200 Sec. bis auf 306,4 gesunken war, starke Erschütterung der Platinspirale die Ablenkung auf 310,9, also

um 1,4 Proc. erhob. Mit dem Aufhören der Bewegung trat ein sehr langsamer Rückgang ein.

Dagegen bewirkte eine ganz kurze Erschütterung des Platindrahtes in Tab. 2, als bei $W = 800$ nach 300 Sec. die E. K. den Werth 256,0 erreicht hatte, eine momentane Zunahme der E. K. auf 275, d. h. um 7,4 Proc. Unmittelbar darauf aber zeigte das Galvanometer eine Abnahme der E. K. auf 245, d. h. um 4,2 Proc. an. Sehr langsam stieg dann die E. K. wieder.

Die Beobachtungen über die Erschütterungswirkung wurden aus naheliegenden Gründen meist zu einer Zeit angestellt, zu welcher die E. K. bereits nahe constant geworden war. Doch habe ich mich überzeugt, dass der Erfolg derselbe ist, wenn man während der Periode der Ab- oder Zunahme beobachtet, was wegen der bei grösseren Stromdichten sehr raschen Aenderung der E. K. freilich nur bei kleineren Stromdichtigkeiten ausführbar ist.

Noch bemerke ich, dass die Erschütterung immer nur sehr gering zu sein braucht, um die beschriebene, mit grosser Regelmässigkeit eintretende Wirkung hervorzubringen, so gering, dass schon ein in einiger Entfernung fahrender Wagen oder eine leise Bewegung des Beobachters genügend ist.

Man vergleiche aber in Betreff der Empfindlichkeit der E. K. gegen Erschütterung des Platins auch das unter § 4a. Mitgetheilte.

4. Einfluss einer grösseren Stromdichtigkeit auf die electromotorische Kraft bei einer nachfolgenden kleineren, oder umgekehrt.

a) Die vorhergehende Stromdichte besass den Maximalwerth, d. h. der äussere Widerstand war $W = 0$. Tab. 6. Die folgenden Zahlen schliessen sich an Tab. 1 $W = 23000$ an. Nachdem die E. K. in 1400 Sec. bis auf 320 gefallen war und sich kaum mehr änderte, wurde das Element für einen Augenblick ohne Widerstand geschlossen. Dann wurde sofort wieder die Schliessung durch $W = 23000$ und das Galvanometer hergestellt und folgende Werthe der E. K. beobachtet, wobei die Zeiten von dem Moment der Wiedereinschaltung von $W = 23000$ gezählt sind:

Sec.	10	20	30	40	50	60	80	100
E. K.	344,2	343,3	341,7	340,5	339,5	338,5	336,5	335,2

Sec.	120	140	160	180.
E. K.	334,0	333,0	332,3	331,5

Tab. 7. Die Zahlen dieser Tabelle schliessen sich an Tab. 1 $W = 400$ an. Die E. K. war nach 120 Sec. auf 290,5 gekommen und nahezu constant geworden. Als dann das Element 10 Sec. lang mit $W = 0$ geschlossen worden war, nahm die E. K. bei dem sofort wieder eingeschalteten Widerstande $W = 400$ folgende Werthe an:

Sec.	10	20	30	40	50	60	80
E. K.	314,0	315,2	314,5	313,8	313,0	312,2	311,0

Sec.	100	150	200.
E. K.	309,8	307,5	306,2.

Tab. 8. Ein Platindraht gab bei $W = 10000$. Gr. Sp. einen ersten Ausschlag von 462, und die E. K. fiel von 270,0 bei 10 Sec. bis auf 197,7 bei 200 Sec. und wuchs bis auf 259,0 bei 420 Sec. Hier war sie fast vollkommen constant.

Wurde dann der Platindraht geglüht, das Element 5 Sec. lang mit $W = 0$ geschlossen und darauf $W = 10000$ eingeschaltet, so war nach 10 Sec. die E. K. = 340,0, von welchem Werthe sie in längerer Zeit bis auf 296 fiel. Einige hierher gehörige Beobachtungen sind noch unter b) angeführt.

Aus einer grossen Zahl derartiger Beobachtungen lässt sich folgendes Gesetz ableiten:

Wenn man, nachdem die E. K. bei einem gewissen Widerstande nahezu constant geworden ist, vorübergehend mit $W = 0$ schliesst, so wächst die E. K. von einem gewissen Anfangswerthe an — dessen Grösse nicht auszumitteln ist, der aber jedenfalls dem vorher erreichten Werthe nachstehen muss — sehr rasch bis zu einem Maximum, von welchem sie nur langsam absinkt. Das Maximum liegt viel höher als der vorher erreichte Werth, ebenso übertrifft diesen aber auch der nach längerer Zeit eintretende Endwerth.

Die Wirkung der geschilderten Operation besteht demnach, wenn man sie nach Erreichung eines nahe constanten

Werths der E. K. anwendet, darin, dass sie dieselbe vorübergehend sowohl als dauernd vergrössert.

Wendet man sie aber an, bevor die E. K. nahe constant geworden ist, so kann sie auch eine Abnahme derselben zur Folge haben.

Dies tritt z. B. in Tab. 1 $W = 23000$ ein, wenn mit $W = 0$ in den ersten 90 Sec. geschlossen wird. In diesem Falle besteht die Wirkung also darin, dass der Process der Abnahme der E. K. vorübergehend beschleunigt ist.

Noch in anderer Beziehung erscheint die Wirkung einer Schliessung des Elements ohne Widerstand interessant:

Sie beseitigt vollkommen die nach § 3 immer vorhandene Empfindlichkeit der E. K. gegen Erschütterung des Platins.

Dieser Umstand veranlasste mich, als constanten Endwerth der E. K. bei dem jeweiligen Rheostatenwiderstande denjenigen zu betrachten, welcher einige Zeit nach einer kurzen Schliessung des Elements mit $W = 0$ sich ergab, und welcher, wie oben ausgeführt, den ohnedies erreichbaren immer übertraf.

b) Die kleinere Stromdichtigkeit hat den Werth Null (Element geöffnet). Die ersten hierauf sich beziehenden Versuche habe ich mit dem Galvanometer angestellt, später aber die erhaltenen Resultate auf electrometrischem Wege nochmals geprüft.

Da namentlich die eine Frage, nämlich wie sich die E. K. des vorher geschlossenen Elements während einer Unterbrechung des Stromes verhält, mit dem Electrometer sich viel leichter beantworten lässt — weil bei Benutzung des Galvanometers durch die Schliessung des Stromes selbst bei Einschaltung eines sehr grossen Widerstands sofort wieder neue Aenderungen der E. K. eintreten —, so stelle ich die electrostatischen Messungen voran.

Von den beiden Polen des Elements wurde der eine mit dem einen Quadrantenpaar eines Kirchhoff'schen Electrometers, der andere mit dem zweiten Quadrantenpaar und der Erde verbunden. Die beiden Pole waren im übrigen entweder isolirt oder durch einen Widerstand von einigen Tausend

S.-E. geschlossen. Schliessung und Oeffnung des Stromes erfolgte vom Fernrohr aus.

Durch Anwendung eines Daniell'schen statt des Chromsäureelements wurde zunächst festgestellt, dass, wenn, wie es beim Daniell der Fall ist, die E. K. durch Schliessung des Elements sich nicht ändert, auch die Ablenkung des Electrometers fast genau die gleiche bei isolirten und bei verbundenen Polen war.

Wegen des grossen Schliessungswiderstands dürfen wir also auch die bei geschlossenem Element beobachteten Ablenkungen des Electrometers der E. K. gleich setzen. Wenn auch Ablenkung und E. K. überhaupt nicht genau einander proportional waren, so habe ich doch von einer Reduction hier abgesehen. Das Element war, wenn nichts anderes bemerkt, während der ganzen Dauer der Oeffnung oder Schliessung vor Erschütterung geschützt.

Die angegebenen Zeiten sind von dem Moment der Schliessung, resp. Oeffnung des Elements an gezählt.

Tab. 9.

Pole isolirt: E. K. = 107,7. Pole verbunden: (W = 4500).

Sec.	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70
E. K.	71,2	53,8	52,0	50,3	49,1	48,2	47,1	46,9	49,2	55,4

Sec.	90	120	180	240.
E. K.	57,4	60,6	65,1	66,3.

Pole isolirt:

Sec.	5	10	15	20	25	30	40	50	60	80	120
E. K.	76,4	81,2	83,1	84,4	85,5	86,3	87,8	89,0	89,8	91,1	93,2

Pole wieder verbunden:

Sec.	5	10	15	20	30	40.
E. K.	68,2	61,0	63,6	64,2	65,1	65,2.

Tab. 10. Pole isolirt: E. K. = 95,5.

Pole verbunden: (W = 9000). E. K. fällt bis 52,5 und steigt darauf bis 60,5, wo sie fast constant war. Darauf wurden die Pole 20 Sec. lang durch $W = 0$ verbunden. Nachdem sofort wieder $W = 9000$ eingeschaltet war, ergab sich:

Sec.	5	10	15	20	40	80	150	300
E. K.	75,5	78,0 (noch zunehmend)	74,8	74,6	73,8	72,8	72,0	71,4

Die Resultate der folgenden beiden Tabellen sind mit dem Galvanometer gewonnen.

Tab. 11. Platinblech. $W = 2000$ S.-E. Gr. Sp.

Erster Ausschlag: 438,4. 10 sec 319,7.

Die E. K. nahm dann während 800 Sec. bis auf 225 ab und stieg in weiteren 1200 Sec. wieder auf 238,4. Die Grösse der Abnahme überwiegt also bedeutend über die der Zunahme. Es wurde nun, kurz bevor die E. K. ihren kleinsten Werth erreichte, das Element verschieden lange Zeit geöffnet.

In der folgenden Tabelle stehen unter der Zeitdauer der Oeffnung die Werthe, welche die E. K. nach Wiederschliessung des Stromes zu den vorgesetzten Zeiten besitzt.

	Oeffnungsdauer				
	11 sec	20 sec	40 sec	80 sec	220 sec
Erster Ausschlag	340,0	352,0	371,0	384,0	394,0
Nach 10 sec	234,8	237,0	240,5	252,0	269,0
„ 20	232,1	234,8	235,0	242,5	255,2
„ 40	230,7	231,3	232,6	235,1	243,0
„ 70	230,1	230,2	230,8	230,5	235,6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab. 12. Einfacher Platindraht. $W = 200$. Kl. Sp.

Die Oeffnung geschah, nachdem die E. K. nahe constant geworden war. Die folgende Tabelle ist ebenso wie die vorhergehende zu verstehen, sie enthält noch den Verlauf der E. K. bei geglühtem Platindraht.

	Geglüht	Oeffnungsdauer				
		10 sec	20 sec	30 sec	60 sec	120 sec
Erster Ausschlag	276,0	563,0	545,0	515,0	505,0	444,0
Nach 10 sec	257,5	419,4	413,7	403,0	401,5	393,0
„ 20	289,0	415,9	413,7	405,9	406,7	402,5
„ 30	383,0	413,1	413,7	—	409,1	405,2
„ 40	399,0	412,1	413,4	406,7	410,2	406,4
„ 60	407,0	413,0	412,5	407,2	411,5	407,8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	414,0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Die Tab. 9 bis 12 geben nun folgende Resultate:

Tab. 9 und 10 bestätigen einmal (durch electrostatische Messungen) die früher gefundenen Sätze, dass die E. K. bei

frisch geglühtem Platin zuerst ab-, dann zunimmt, ferner (Tab. 10), dass nach vorübergehender Schliessung mit dem kleinsten Widerstande ($W = 0$) die E. K. bis zu einem Maximum wächst und dann wieder abnimmt, aber dauernd grösser als vorher bleibt.

Sodann zeigen sie, dass nach Oeffnung des Elements die E. K. zuerst sehr schnell, bald aber langsam wächst. Von der durch den Strom herbeigeführten Abnahme der E. K. verschwindet ein Viertel in 5 Sec., das zweite in 35 Sec., das dritte noch nicht in 80 Sec. Schliesst man das Element von neuem, so ist also im Augenblick des Stromschlusses die E. K. um so grösser, je länger geöffnet gewesen war, wie dies auch Tab. 11 verauschaulicht. Es sinkt aber dann die E. K. wieder bis zu einem Minimum (Tab. 9), obwohl nicht bis zu einem so tiefen, wie bei der Stromschliessung mit geglühtem Platin, um darauf zuzunehmen.

Je länger der Strom geöffnet worden war, desto tiefer liegt das Minimum, desto rascher ändert sich aber auch die E. K. (Tab. 11). Da ferner diese Aenderungen um so rascher verlaufen, je grösser die Stromdichte ist, so zeigt uns Tab. 12, bei welcher die Stromdichtigkeit bedeutend grösser als in Tab. 11 ist, das scheinbar dem der Tab. 9 widersprechende Resultat, dass die aus den ersten Ausschlägen sowohl als aus den Ablenkungen hervorgehenden electromotorischen Kräfte mit wachsender Dauer der Stromöffnung abnehmen.

Im Anschluss hieran sei noch bemerkt:

1) Dass auf die Zunahme der E. K. während der Oeffnung des Elements eine Erschütterung des Platins von keinem Einfluss ist.

2) Dass wenn durch kurze Schliessung des Elements ohne Widerstand ein constanter und durch Erschütterung des Platins nicht zu ändernder Werth der E. K. erreicht war, nach einer Oeffnung des Elements die Variationen der E. K. in viel engeren Grenzen, als die obigen Tabellen zeigen, sich bewegten.

c) Untersuchung des allgemeinen Falles. Die folgenden Resultate begreifen die beiden Specialfälle, in denen die Stromdichte den grösstmöglichen und kleinstmöglichen

Werth besass, unter sich. Sie beweisen nämlich, dass wenn einer grösseren Stromdichte unmittelbar (d. h. ohne zwischenliegende Oeffnung des Stromes) eine kleinere folgt, die E. K. bei dieser zuerst zu-, und nach Erreichung eines Maximums abnimmt, und dass, wenn umgekehrt eine grössere einer kleineren folgt, die E. K. zuerst bis zu einem Minimum ab-, und dann zunimmt. Die Periode der Zunahme im ersten und die der Abnahme im zweiten Fall ist aber von sehr kurzer Dauer.

Die Messungen wurden sowohl mit dem Galvanometer als mit dem Electrometer gemacht. Ich gebe nur das Protocoll einer der letzteren. Die Aenderung des Widerstands geschah vom Fernrohr aus durch Ein- oder Ausschaltung einer Nebenleitung, welche einen zweiten Rheostaten enthielt.

Tab. 13. Platindraht.

$W_1 = 4000$ S.-E. $W_2 = 1000$ S.-E.

Element geöffnet: E. K. = 97,0.

Element geschlossen.

$W_1 + W_2 = 5000.$

Sec.	55	65	80	100	120	180	240	420.
E. K.	43,8 (Min.)	47,0	49,6	51,5	53,0	56,9	58,8	60,5.

$W_2 = 1000.$

Sec.	6	20	40	80	120	210.
E. K.	46,0 (Min.)	52,0	56,0	59,9	60,8	61,1.

$W_1 + W_2 = 5000.$

Sec.	3	10	60	90.
E. K.	63,3 (Max.)	62,0	61,6	61,4.

$W_2 = 1000.$

Sec.	6	20	40	60	80.
E.K.	59,2(Min.)	60,2	60,9	60,7	61,1.

$W_1 + W_2 = 5000.$

Sec.	4	20	80
E. K.	65,4 (Max.)	63,6	63,5.

Hiernach wächst das beim Uebergange zu einer grösseren Stromdichte eintretende Minimum der E. K. mit Wiederholung des Versuchs nicht unerheblich. Dasselbe ergab sich auch bei einer zweiten Beobachtungsreihe. Dieses Wachsen des Minimalwerths bei Wiederholung des Versuchs ist schon

früher bemerkt worden für den Specialfall, dass die Stromdichte von Null auf einen endlichen Werth gebracht wird.

5. Oscillirendes Ansteigen der electromotorischen Kraft.

Bei mittelgrosser Stromdichte wurde häufig beobachtet, dass, wenn in der Periode der Zunahme die E. K. plötzlich (cf. Tab. 2 $W = 400$. $t = 120$—130 Sec.) bedeutend gewachsen war, sich Oscillationen des Magnetspiegels einstellten. Dieselben verliefen in der Weise, dass die Ablenkung mit steigender Geschwindigkeit wuchs und nach Erreichung eines grössten Werthes plötzlich auf den Anfangspunkt ihrer Bewegung zurückging, worauf sie wieder beschleunigt zunahm u. s. w. Die Breite einer Oscillation betrug bis zu 14 Proc. der mittleren Ablenkung, ihre Dauer bis zu 40 Sec.

Sie verschwanden manchmal von selbst wieder, indem ihre Amplitude abnahm, und zugleich ihr Mittelpunkt nach zunehmender Ablenkung sich bewegte, manchmal aber hielten sie minutenlang an. Ich brachte sie dann häufig durch anhaltendes Klopfen des Platins zum Verschwinden, am sichersten aber durch eine vorübergehende Schliessung des Elements ohne äusseren Widerstand. Sowie hierdurch die Empfindlichkeit gegen Erschütterung beseitigt wurde (§ 4a. a. E.), so verschwand auch die Neigung zu Oscillationen.

Aus diesem Grunde sollte man glauben, dass das Eintreten von Oscillationen der E. K. an das gleichzeitige Vorhandensein kleiner Erschütterungen geknüpft sei. Ich möchte aber dennoch an der Ansicht festhalten, dass den Oscillationen eine selbständige Existenz zukommt, einmal deshalb, weil sie auch eintraten, wenn ich das Platin vor Erschütterungen gesichert hatte, sodann weil sie mit einer ausserordentlichen Regelmässigkeit verliefen und sich wiederholten.

Warum sie aber manchmal eintraten, manchmal nicht, habe ich nicht feststellen können.

6. Einfluss der Temperatur des Platins oder der Chromsäure.

Ohne Versuche anzuführen, sei nur bemerkt, dass das Resultat derselben negativ war: Die E. K. änderte sich von dem Augenblicke der Schliessung des Elements an in der

gleichen Weise, mochten Platin und Säure Zimmertemperatur haben, oder der Strom mit glühendem Platin geschlossen oder die Säure auf 40° C. erwärmt worden sein.

7. Aenderungen der Masse oder der Oberfläche des Platins während und infolge des Stromdurchganges, und Mittel, dieselben wieder zu beseitigen.

Wägungen des Platins vor Stromschluss und nachdem der Strom einige Minuten geschlossen gewesen war, liessen keinen Unterschied des Gewichts erkennen.

Ebenso liess eine aufmerksame Beobachtung des Platins (Draht) während der Schliessung des Elements keine Erscheinung an seiner Oberfläche wahrnehmen, falls nicht der Strom zu dicht war. Bei sehr dichtem Strom entwickelte sich Gas.

Verkleinerte man successive den Rheostatenwiderstand — das Platin wurde vor Aenderung des Widerstands jedesmal geglüht —, so trat bei einem gewissen Widerstande einige Secunden nach Schliessung des Stromes Gas auf, dann dauerte die Gasentwickelung beliebig lange, d. h. bis zur Unterbrechung des Stromes fort.

Nahm man den Widerstand noch kleiner, so begann die Gasentwickelung schon im Augenblick der Schliessung des Stromes.

In Wirklichkeit muss aber während des Stromdurchgangs die Oberfläche des Platins eine andere werden, auch wenn, wie dies bei den zumeist allein geprüften kleinen und mittleren Stromdichten der Fall ist, eine sichtbare Gasentwickelung nicht stattfindet. Denn dass die Ursache der beschriebenen Erscheinungen nicht in der Säure zu suchen ist, ergibt sich daraus, dass Rühren oder Erneuerung derselben auf den Verlauf der E. K. von keinem Einfluss war.

Dagegen verschwanden die Wirkungen eines Stromdurchganges mehr oder weniger vollständig, und es nahm bei neuer Stromschliessung die E. K. wieder einen ähnlichen Verlauf:

1. wenn das Element einfach eine Zeitlang geöffnet wurde,

2. wenn das Element geöffnet und zugleich das Platin der Luft ausgesetzt wurde,

3. wenn das Platin mit Wasser abgespült,



4. wenn es mit Salpetersäure abgespült,
5. wenn es in der Alkoholflamme geglüht wurde.

Die beiden ersten Verfahren stehen sich völlig gleich: Das Ausheben des Platins aus der Säure in die Luft hat also keinen grösseren Erfolg, als einfache Oeffnung des Stromes. Etwas wirksamer ist 3), noch besser 4) — der Abspülung mit HNO_3 folgte natürlich immer noch eine solche mit H_2O —, und am sichersten beseitigt man die Spuren früherer Ströme durch das fünfte Verfahren. Dieses wurde, wie früher erwähnt, immer angewandt.

8. Einfluss eines Wasserstoffgehaltes des Platins.

Ein Platindraht wurde zuerst geglüht und dann in verdünnter Schwefelsäure während 18 Stunden electrolytisch mit Wasserstoff beladen. Sofort nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes wurde der Draht in das bereit stehende Chromsäureelement gebracht und dieses durch 9000 S.-E. und das Galvanometer geschlossen. Nach 10 Sec. betrug die Ablenkung 342,0, fiel auf 323,0 nach 80 Sec. und und stieg nach 240 Sec. auf den nahe constant bleibenden Werth 326,0. Darauf wurde der Draht geglüht und ohne vorhergegangene Wasserstoffentwickelung in die Chromsäure eingesetzt. Die E. K. war dann nach 10 Sec. gleich 248, erreichte nach 120 Sec. ein Minimum von 197,7 und stieg nach 360 Sec. wieder auf 222,8, indem sie weiter noch langsam zunahm. Der wieder geglühte Draht wurde nochmals während nur vier Minuten in Schwefelsäure mit Wasserstoff beladen. In Chromsäure erreichte dann die E. K. einen kleinsten Werth gleich 258 und stieg wieder auf den nahe constanten Werth 275. Wurde jetzt für 10 Sec. der Rheostatenwiderstand von 9000 S.-E. durch Null ersetzt, so erhielt man nach einer Minute eine E. K. von 280. In dieser Weise wurde eine grosse Zahl von Versuchen angestellt, welche das gleiche Resultat lieferten: Wasserstoffgehalt des Platins erhöht das Minimum und das Maximum der E. K. um so mehr, je grösser er ist. Bei vollkommener Sättigung mit Wasserstoff ist der maximale Endwerth der E. K. grösser als nach kurzer Schliessung des Elementes ohne äusseren Widerstand (§ 4_a).

Ohne Einfluss dagegen auf den Verlauf der E. K. war eine vorgängige electrolytische Entwickelung von Sauerstoff am Platin.

Bei einer anderen Versuchsreihe wurde die E. K. mit dem Electrometer gemessen nach der Methode, welche ich bei einer früheren Untersuchung[1]) benutzt habe, und welche zuerst von Fuchs angegeben ist. Bei dieser wurde auch die E. K. des ungeschlossenen Elementes für wasserstoffhaltiges Platin gemessen. Sie fand sich etwas kleiner als bei reinem Platin, im Mittel 5%. Der Unterschied verschwand langsam.

Eine nur fünf Minuten dauernde Wasserstoffentwickelung (in Schwefelsäure) an einem sehr dünnen Platindrähtchen war von geringerem Einfluss auf den Verlauf der E. K. des Chromsäureelements, als eine halbstündige, welche einer zweistündigen an Wirkung gleich kam. In letzteren Fällen lag das Maximum der E. K. um 18%, 18% und 14% höher als das bei nur geglühtem Draht erreichte, während das Minimum sogar um 40%, 40% und 32% heraufrückte.

II. Platin in reiner, in Wasser gelöster Chromsäure.[2])

Die folgenden Resultate sind mit Hülfe des Electrometers gewonnen. Die Methode war die im § 8 des I. Abschnitts angegebene.

Die E. K. des ungeschlossenen Elements war um 2% geringer als die des im I. Abschnitt untersuchten Elements, welches das Platin in Bunsen'scher Chromsäurelösung enthielt. Sie stieg durch Zusatz von Schwefelsäure zu der wässerigen Lösung.

Wurde das Element geschlossen, so nahm die E. K. sofort stark ab, um so mehr, je kleiner der Widerstand der Schliessung war, und erreichte einen kleinsten Werth, welcher mit abnehmendem Rheostatenwiderstand selbst abnahm, und von dem sie sich nur unmerklich wieder erhob. Denn

1) Fromme, Wied. Ann. **12.** p. 403. 1881.

2) 1 g wasserfreie Chromsäure auf 5 g Wasser.

die Grösse der Abnahme betrug bei Rheostatenwiderständen von 9000 bis 10 S.-E. 82 bis 100 Sec., die Zunahme aber nur 1 bis 2 Sec. Der bei irgend einem Widerstand nach längerer Zeit eintretende constante Endwerth steht zu dem in der Bunsen'schen Chromsäurelösung erreichten etwa in dem Verhältniss 10:14. Wurde dann der Strom geöffnet, so stieg die E. K. sehr allmählich wieder zu der des ungeschlossenen Elements an, mit der Eigenthümlichkeit, dass sie zu gegebener Zeit einen um so grösseren Werth besass, je kleiner der Widerstand, also auch die E. K. selbst während der Stromschliessung gewesen war.

Sowie aber der Lösung etwas Schwefelsäure zugesetzt wurde, nahm die E. K. den im I. Abschnitt constatirten Verlauf: Sie fiel, sobald das Element geschlossen wurde, auf einen kleinsten Werth und stieg dann wieder an bis zu einem Maximum, welches dem bei Bunsen'scher Lösung beobachteten etwa gleich, also viel grösser, als vorhin war. Das eben erwähnte stärkere Ansteigen der E. K. bei kleineren Widerständen nach Unterbrechung des Stromes trat jetzt nicht ein.

III. Palladium in Chromsäurelösung.

Das benutzte Palladium hatte Drahtform (Dicke 1 mm) und wurde durch längere electrolytische Entwicklung von Sauerstoff und Abwaschen des gebildeten Oxyds mit verdünnter Salzsäure gereinigt.

Die E. K. des ungeschlossenen Elementes: Zink-Schwefelsäure-Bunsen'sche Chromsäure-Platin nahm um $3^1/_2$ Proc. ab, wenn Palladium an Stelle des Platins trat.

Wurde weiter noch die Bunsen'sche Chromsäure durch die im II. Abschnitt angegebene Lösung von reiner Chromsäure in Wasser ersetzt, so sank die E. K. um weitere 2,3 Proc.

Wurde das Palladiumelement geschlossen, so nahm bei jeder der beiden Chromsäurelösungen die E. K. nur wenig ab, indem sie sich einem kleinsten Werthe annäherte, welcher mit abnehmendem Schliessungswiderstande abnahm, jedoch bei beiden Lösungen etwa der gleiche war. Dem-

nach unterscheidet sich das Verhalten des Palladiums in Chromsäure wesentlich von dem des Platins.

Die folgende Tabelle bezieht sich auf zwei Elemente mit Bunsen'scher Lösung. Die in die Flüssigkeit tauchende Oberfläche war beim Palladium etwas kleiner als beim Platin, die Stromdichte also bei gleichem Rheostatenwiderstande etwas grösser beim Palladium. Die Zahlen geben die nach längerem Schluss beobachteten electromotorischen Kräfte in Theilen der Electrometerscala.

W	∞	9000	5000	2000	1000	500	200	100	50	20	10
Pt	65,0	52,1	—	49,3	—	47,5	—	44,3	—	—	—
Pd	62,8	60,4	60,1	59,1	58,5	57,7	56,8	56,0	55,1	53,2	51,0
Pt/Pd	1,035	0,862	—	0,833	—	0,822	—	0,791	—	—	—

Die E. K. eines geschlossenen Palladium-Chromsäureelements ist also unter sonst gleichen Umständen kleiner als die eines geschlossenen Platin-Chromsäureelements, um so mehr, je grösser die Stromdichte ist.

IV. Gold in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Die E. K. eines mit Gold in Bunsen'scher Chromsäurelösung zusammengestellten Elements war bei $W = \infty$ der eines ungeschlossenen Platinelements etwa gleich. Wird das Element aber geschlossen, so bleibt die E. K. des Goldelements constant bei grossem Schliessungswiderstand und nimmt etwas ab, wenn derselbe klein ist, sodass sie die des Platinelements dann nicht unbedeutend übersteigt. Niemals zeigt Gold in Bunsen'scher Chromsäure den bei dem Platin gefundenen eigenthümlichen Verlauf der E. K.

V. Gaskohle in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Obwohl schon bei den ersten Versuchen (I, § 1) Gaskohle ein entschieden anderes Verhalten als Platin gezeigt hatte, so glaubte ich doch, die bei der Untersuchung des Platins gemachten Erfahrungen bei einer neuen ausgedehnteren Untersuchung der Kohle verwerthen zu sollen. Es wurde deshalb nun die Kohle bei den verschiedensten Stromdichten geprüft. Zur Messung diente das Galvanometer.

Die E. K. erwies sich bei kleiner Stromdichte als vollkommen constant, bei grösserer nahm sie bis zu einem kleinsten Werthe ab, von dem sie sich nicht wieder erhob. Bei sehr grosser Dichte und lebhafter Gasentwicklung schwankte wohl die E. K. etwas um den kleinsten Werth, indem sie abwechselnd ab- und zunahm; diese Schwankungen trugen aber den Stempel der Regellosigkeit.

Durch Oeffnen des Stromes oder Bewegen der Kohle wird die E. K., falls sie vorher abgenommen hatte, erheblich gesteigert. Wird der Strom wieder geschlossen oder mit Bewegung der Kohle aufgehört, so nimmt die E. K. mit grösserer Geschwindigkeit als vorher ab.

Wurde die Oberfläche der Kohle durch Tränkung derselben mit Wachs verkleinert, so war die E. K. cet. par. kleiner als vorher, in dem Verlaufe der E. K. änderte sich aber sonst nichts. Sie nahm bis zu einem tiefer liegenden Minimum ab, blieb aber auf demselben stehen.

Wenn demnach Buff[1]) von einem mit Wachs getränkten Kohlencylinder sagt: . . . . „sein Verhalten in der Chromflüssigkeit glich jetzt ganz dem des Platins, Kraft sowohl wie Beständigkeit erschienen auffallend verringert,“ so erkenne ich nur den zweiten Theil dieses Satzes als richtig an.

Nur eine Erscheinung habe ich bei der Kohle gefunden, welche sich in ähnlicher Weise auch beim Platin gezeigt hatte.

Wenn man nämlich das Kohleelement, während es durch einen grossen Widerstand geschlossen ist, kurze Zeit (10 Sec.) ohne Widerstand schliesst und dann sofort wieder den grösseren einschaltet, so beobachtet man eine kleinere E. K., welche in erst raschem, dann langsamem Wachsen begriffen ist. Dasselbe beobachtet man auch noch bei kleineren Schliessungswiderständen — bei welchen die E. K. merklich abnimmt — wenn die zeitweise Vertauschung mit $W=0$ schon vorgenommen wird, ehe ein nahezu constanter Werth der E. K. eintritt. Hat man dagegen den Rheostatenwiderstand erst nach annäherndem Eintritt eines constanten Werthes auf einige Secunden ausgeschaltet, so beobachtet man nach sofortiger Wiedereinschaltung des Widerstandes eine rasche

1) Buff, l. c. p. 19.

Zunahme bis zu einem Maximum, welches den vorher erreichten Endwerth übertrifft. Darauf nimmt die E.K. wieder ab bis zu und unter den schon vorher erreichten Werth.

Diese Zunahme über den vor Ausschaltung des Rheostatenwiderstands beobachteten Werth hinaus wurde aber auch bei Platin beobachtet, jedoch blieb beim Platin die E. K. dauernd grösser als vorher, was bei der Kohle nicht der Fall ist.

VI. Aluminium in Bunsen'scher Chromsäurelösung.

Die E. K. eines mit Bunsen'scher Chromsäurelösung gefüllten, geöffneten Grove'schen Elementes nahm im Verhältniss 1,45:1 ab, wenn man das Platin durch ein kleines Aluminiumblech ersetzte. Wurde das Aluminiumelement geschlossen, so nahm seine E. K. sehr schnell bis zu einem kleinsten Werthe ab und dann zu. Das nach längerer Zeit erreichte Maximum war kleiner als die E. K. des geöffneten Elementes, nämlich bei:

	$W = 9000$	500	50	10	2
um:	2%	6%	10%	14%	18%.

Hieraus folgt unter Berücksichtung der Resultate des I. Abschnitts, dass bei kleineren Schliessungswiderständen ein Platin- und ein Aluminiumelement etwa gleiche E. K. besitzen. Wird das Aluminium erschüttert, so nimmt die E. K. momentan zu, dann langsam ab bis unter den vorher erreichten Werth und endlich wieder zu. Eine kurze Schliessung des Elementes mit $W = 0$ bringt die E. K. bei einem nachfolgenden grösseren Widerstand auf einen hohen Werth, von dem sie langsam wieder abnimmt.

Aus dem Mitgetheilten geht hervor, dass sich Aluminium dem Platin ähnlich verhält.

Noch möge eine merkwürdige Beobachtung Erwähnung finden. Wenn nach längerer Schliessung das Element geöffnet wurde, so stieg die E. K. ziemlich schnell auf einen Werth an, welcher die E. K. des noch nicht geschlossenen Elementes übertraf. Langsam ging sie dann auf diesen zurück. Hr. Streintz[1]) hat kürzlich eine ähnliche Beob-

1) F. Streintz, Wien. Ber. 86. Juli 1882. — Wied. Ann. 17. p. 841. 1882.

achtung beschrieben. Er polarisirte Aluminium in verdünnter Schwefelsäure durch Wasserstoff und fand unmittelbar nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes das Aluminium positiver als vor Schliessung desselben.

Eine Erklärung der in dieser Abhandlung beschriebenen Erscheinungen werde ich erst in der dritten Abhandlung zu geben versuchen, nachdem ich zuvor in der zweiten die Resultate einer Untersuchung über das electrische Verhalten von Platin, Palladium, Gold, Gaskohle und Aluminium in Salpetersäure mitgetheilt haben werde.

Giessen, Januar 1883.

IV. *Experimentelle Untersuchung über Torsionselasticität; von Max Baumeister.*

(Hierzu Taf. IV.)

Den Hauptgegenstand vorliegender Untersuchungen, die ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Kohlrausch im Winter- und Sommersemester 1880/81 und theilweise im Sommersemester 1882 im physikalischen Institute der Universität Würzburg angestellt habe, bilden die Versuche über Torsionselasticität. Coulomb's gerade vor 100 Jahren angestellte Originalversuche und die Theorie mit modernen Beobachtungsmitteln zu prüfen, mag wohl der Mühe werth sein.

Den ersten Ausgangspunkt ergab die Frage, ob die Coulomb'schen Torsionsgesetze für sehr feine Drähte ihre Gültigkeit verlieren. In einer früheren Arbeit von F. Kohlrausch und F. E. Loomis[1]) über den Temperatureinfluss auf dünne Drähte, findet sich im Anhange der Torsionsmodul und der Ausdehnungsmodul dieser Drähte zusammengestellt, und es ergibt sich eine Verhältnisszahl dieser Grössen, welche von den Resultaten anderer Forscher etwas abweicht. Es entstand die Frage, ob diese Abweichung mit den Dimensionen des Drahtes zusammenhängen konnte, ob auf sehr feine Drähte die gebräuchliche Elasticitätstheorie

1) F. Kohlrausch u. F. E. Loomis, Pogg. Ann. **141.** p. 481. 1871.

noch anwendbar ist. Ich suchte diese Frage auf experimentellem Wege zu entscheiden, indem ich mit Serien von feinen und dickeren Drähten desselben Materials und desselben Zuges Bestimmungen ihrer Torsionselasticität vornahm.

Neben dieser Arbeit führte ich Bestimmungen des Elasticitätsmoduls für einige der Drähte durch Längenausdehnungen am Kathetometer aus, deren Resultate ich wiedergebe, wie die für das logarithmische Decrement bei den Torsionsschwingungen und die Tragfähigkeit von Drähten. Nachträglich habe ich das specifische Gewicht von Drähten eingehend untersucht, erstens, weil ich bessere Querschnitte gewinnen wollte, dann, um zu sehen, ob nicht eine solche Untersuchung Aufklärung über den Verlauf der Curven des Torsionsmoduls schaffen würde, und drittens, weil über diesen Gegenstand für feine Drähte wenig vorliegen dürfte.

Coulomb's Beobachtungen.

Coulomb sucht in seiner Arbeit: Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion, et sur l'élasticité des fils de métal: Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les arts et dans différentes expériences de physique: Construction de différentes balances de torsion pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité et de la cohérence[1]) einmal die Elasticitätskraft der Torsion von Eisen- und Messingdrähten in ihrer Abhängigkeit von Länge, Querschnitt und Spannung, dann die Unvollkommenheit der elastischen Rückwirkung der Metalldrähte auszuwerthen. Er leitet zuerst die Formel der oscillatorischen Bewegung ab unter der Voraussetzung, dass die Rückwirkung der Torsionskraft eines Drahtes gegen Verdrehen seiner Querschnitte proportional ist dem Torsionswinkel, welche Voraussetzung bekanntlich für nicht zu grosse Amplituden der Erfahrung entspricht. Die Dauer einer ganzen Oscillation ist darnach: $t = \pi \sqrt{K/n}$, wo K das Trägheitsmoment des schwingenden Gewichtes und n die Directionskraft des Drahtes bedeutet.

Die gebrauchten Drähte waren je drei Claviereisendrähte

1) Coulomb, Hist. de l'Acad. Royale des Scienc. 1784, p. 229.

und Messingdrähte, wie sie im Handel, auf Spulen aufgewickelt, vorkommen. Da es sich nur um die Verhältnisszahlen der Massen handelte, sind die specifischen Gewichte der Drähte nicht angegeben, sondern für jeden Draht das Gewicht einer Toise = 6 Pariser Fuss in grains, ausserdem die zum Zerreissen der Drähte nöthigen Gewichte. Daraus, dass die grains ohne Decimalen gegeben sind, würde bei einer Berechnung des Torsionsmoduls nach den gewohnten Formeln schon eine Unsicherheit von etwa 15 $^0/_0$ für den feinsten Eisendraht folgen.

Aus dem Ergebnisse sämmtlicher Beobachtungen folgert Coulomb, dass die Torsionskraft eines Drahtes unabhängig ist von der Spannung; dass sie der vierten Potenz des Durchmessers direct und der Länge des Drahtes umgekehrt proportional ist, das Moment der Torsionskraft sich also $= \mu B D^4/l$ ergibt; hier bedeutet B den Torsionswinkel, D den Durchmesser und l die Länge des Drahtes, μ einen constanten, von der Natur des Metalles abhängigen Coëfficienten.

Die Abweichungen der einzelnen Versuche von diesem Gesetze sind aber nicht unerheblich. Die Werthe der Schwingungsdauern, von Coulomb aus der während zwanzig Oscillationen verflossenen Zeit bestimmt, weichen meistens von den theoretischen um 0,1 ^{sec} ab. Der Exponent des Verhältnisses der Schwingungsdauer zweier Drähte desselben Materials, derselben Länge und der gleichen Belastung ferner, welcher $= -2$ sein soll, geht bis zu $-1{,}82$ herunter, was im Torsionsmodul Fehler von 6—7 $^0/_0$ bedeutet. Dazu kommt, dass, wie erwähnt. die Gewichtsangaben in grains ohne Decimalen gemacht sind; von einer experimentellen Prüfung des Gesetzes innerhalb der Beobachtungsfehlergrenzen kann man also nicht sprechen, und es ist wohl gerechtfertigt, diese Prüfung auf dem oben angedeuteten Wege zu unternehmen.

Ehe ich zu den weiteren Angaben über meine Beobachtungen übergehe, fühle ich mich gedrungen, Hrn. Prof. Dr. F. Kohlrausch, der mir Material und Raum im physikalischen Institute zu Würzburg zu meinen Versuchen zur Verfügung stellte und mich jederzeit gütigst mit Rath und That unterstützte, hier meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Torsionsversuche.

Der Ausdruck für den Torsionsmodul T, welcher meinen Berechnungen der numerischen Werthe zu Grunde liegt, lautet:

$$T = \frac{2\pi}{g} \frac{Kl}{t^2 r^4} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{qmm}} \quad \text{im technischen,}$$

$$T = 2\pi \frac{Kl}{t^2 r^4} \text{ kg mm}^{-1} \text{ sec}^{-2} \quad \text{im absoluten Maasssysteme.}$$

Ueber die Definition des Torsionsmoduls, wie über seine Beziehung zum Elasticitätsmodul E der Ausdehnung kann man sich in dem bekannten Werke von Clebsch[1]) orientiren.

In diesen Formeln bedeuten:

l die Länge des Drahtes, dessen Torsionsmodul man berechnen will,

r seinen Halbmesser (l und r in Millimetern),

K das Trägheitsmoment kg mm² des schwingenden Gewichtes,

t die Schwingungsdauer in Secunden,

g die Fallbeschleunigung = 9810 mm sec^{-2}.

1. Schwingungsbeobachtungen.

Für die Schwingungsversuche diente folgende Vorrichtung (siehe Fig. 1 in ¼ natürlicher Grösse).

In einer Zimmerecke wurden in ungefähr 1,9 m Abstand übereinander zwei feste Wandbretter auf Leisten angebracht. In jedes Brett konnte, in etwa 0,05 m Entfernung von der Mitte seiner Hypotenuse ein Holzzapfen eingesetzt werden, der mittelst eines in horizontalen Durchbohrungen des Zapfenkopfes anzubringenden Stiftes drehbar war. Unten trug der Zapfen durch eine Messingverschraubung ein starkes Ypsilonlager und dieses selbst eine ebenfalls starke Klemme von Metallplatten. Der zu untersuchende Draht wurde an seinem oberen Ende von dieser Klemme festgehalten, das untere wurde in ein zweites Backenstück geklemmt, das mittelst eines Ypsilonlagers und eines central in letzteres eingeschraubten Messingstiftes den Spiegel für die Beobachtung mit Fernrohr und Scala und die schwingenden Gewichte trug. Die untere Klemm- und Suspensionsvorrichtung ist

1) Clebsch, Theorie d. Elasticit. fester Körp. Leipz. 1862. p. 10. u. 420.

einfach die Umkehrung der oberen. Das untere Backenstück und untere Ypsilonlager waren in je zwei Stücken für dicke und feine Drähte vorhanden. Der Spiegel wurde durch ein Gegengewicht, den Messingknopf der Schraube, mit welcher er am Messingstifte festgestellt wurde, äquilibrirt. An den Messingstift, den Träger des Spiegels und der Gewichte, war unten eine kreisförmige, rauhe Messingplatte, welche alle übrigen Gewichte zu tragen hatte, aufgeschraubt.

Ein Kasten mit Glasverschluss diente als Schutz gegen Luftzug.

Zur Veranschaulichung der Methode, nach der ich beobachtete, gebe ich einen Beobachtungssatz, den der Zeit nach letzten mit dem Messingdrahte „hart $d = 0{,}384$ mm“ wieder.

Vor und nach der Schwingungsdauerbeobachtung wurde die Amplitude bestimmt. Die Schwingungsdauer wurde aus drei Beobachtungssätzen von je elf Durchgangszeiten im wesentlichen nach dem Gauss'schen Verfahren ermittelt. Die aus den drei Sätzen berechneten t stimmen in den allermeisten Fällen bis auf einige Tausendtel Secunde überein.

Der Beobachtungssatz ist folgender:

Messingdraht „hart $d = 0{,}384$ mm“.

Belastung: Grosse Suspension + sämmtliche Messingcylinder.

I. Satz. Umkehrpunkte.

3h 40min 3sec 447,4	447,6	447,8	448,2	448,6	448,8	449,0
553,3	553,2	553,0	552,7	552,6	552,3	

Durchgangszeiten.

	I		Diff.		II		Diff.		III	
3h 42min	50,60sec	53,60	176,12sec	45min	46,70sec	49,72	293,68sec	50min	40,30sec	43,40
	56,60	59,45	17		52,75	55,62	68		46,50	49,30
43	2,30	5,35	15		58,50	1,50	60		52,10	55,10
	8,40	11,25	12	46	4,50	7,37	58		58,10	0,95
	14,10	17,07	18		10,25	13,25	65	51	3,80	6,90
	20,05	22,92	20		16,25	19,12	65		10,00	12,77
	25,80	28,80	20		22,00	25,00	57		15,55	18,57
	31,80	34,65	20		28,00	30,85	60		21,60	24,45
	37,50	40,52	23		33,70	36,75	65		27,30	30,40
	43,55	46,40	30		39,80	42,70	55		33,50	36,25
	49,25				45,60				39,00	
	$t_1 = 5{,}863$		$\tau = 176{,}187$sec		$t_2 = 5{,}878$		$\tau = 293{,}621$sec		$t_3 = 5{,}872$	
			$n = 30$				$n = 50$			
			$t_{1,2} = 5{,}8729$sec				$t_{2,3} = 5{,}8724$sec			

II. Satz. Umkehrpunkte.

3h 52min 46sec 462,9	463,2	463,3	463,5	463,7	463,8	464,1
543,7	543,5	543,3	543,2	543,1	542,9	

2. Belastungen und deren Trägheitsmomente.

Zu schwingenden Gewichten wurden verwendet einmal drei Cylinder aus Zink (spec. Gewicht ungefähr 7,04), *A*, *B* und *C*, jeder 100 mm im Durchmesser und 18 mm hoch, und fünf Messingcylinder α bis ε von 50 mm Durchmesser und 3,5 mm Höhe.

Eine eben solche Messingplatte war an einem Messingstifte befestigt und diente als Schlussstück und Träger der anderen Gewichte. Die letzteren waren zu diesem Zwecke durchbohrt.

Die Trägheitsmomente *K* ergeben sich nach der Formel $K = M(r^2 + r_0^2)/2$; *M* bedeutet die Masse, *r* den äusseren und r_0 den inneren Halbmesser. Die Dimensionen wurden am Comparator gemessen.

Tab. I. Trägheitsmomente.

	M	r	r_0	K
Zinkcylinder *A* .	0,9427 kg	50,06 mm	1,83 mm	1182,9 kg mm²
„ *B* .	0,9499 „	50,07 „	1,76 „	1192,3 „
„ *C* .	0,9620 „	50,12 „	1,76 „	1210,0 „
Messingcylinder α .	0,05821 „	25,02 „	1,78 „	18,31 „
„ β .	0,05764 „	25,03 „	1,79 „	18,15 „
„ γ .	0,05761 „	25,02 „	1,83 „	18,13 „
„ δ .	0,05780 „	25,04 „	1,75 „	18,21 „
„ ε .	0,05796 „	25,03 „	1,80 „	18,25 „
Schlusscylinder .	0,05807 „	24,94 „	1,27 „	18,11 „

Das Trägheitsmoment der einzelnen Suspensionstheile wurde auf empirischem Wege mit einem kleinen Magnete vom Trägheitsmomente 0,94 kg mm², der an einem langen $^1/_{20}$ mm dicken Messingdraht aufgehangen war, gefunden wie folgt:

1) Messingstift + kleines Y-Lager + kleines Backenstück, Trägheitsmoment = 0,25 kg mm².

2) Messingstift + grosses Y-Lager + grosses Backenstück, Trägheitsmoment = 1,41 kg mm².

3) Spiegel, Trägheitsmoment = 0,55 kg mm².

Unter K werde ich künftig verstehen das Trägheitsmoment der grösseren Suspensionstheile: grosses Backenstück + grosses Y-Lager + Messingstift + Spiegel + Schlussmessingcylinder, sodass K ist:

$$K = 20{,}07 \text{ kg mm}^2,$$

und unter $\varkappa$ das der kleinen Theile: kleines Backenstück + kleines Y-Lager + Messingstift + Spiegel + Schlussmessingcylinder:

$$\varkappa = 18{,}91 \text{ kg mm}^2.$$

Um die aus Wägungen und Dimensionsbestimmungen berechneten Werthe für die Trägheitsmomente der schwingenden Gewichte auf empirischem Wege zu bestimmen und zu controliren, wurden bereits bekannte Trägheitsmomente mit den zu bestimmenden in zwei Anordnungen combinirt, ohne die Directionskraft des Drahtes zu ändern, und die den Anordnungen zukommenden Schwingungsdauern beobachtet.

Ich nahm ein prismatisches Stäbchen aus Birnbaumholz, das gegen Verbiegungen sich sehr widerstandsfähig erwies, 200,0 mm lang, 4,7 breit, 0,003 063 kg schwer, Trägheitsmoment = 10.216 kg mm², und zwei gleiche Messingcylinderchen von 6,4 mm Durchmesser und zusammen 0,010 877 kg schwer. Das Stäbchen wurde mit Schellack diametral unter den Schlusscylinder gekittet, und an Coconfäden brachte man die beiden Cylinderchen in den zwei Anordnungen so an, dass sie einmal in der Entfernung 100 mm von der Drehaxe die Schwingungen mit ausführten, das andere mal in der Entfernung Null von derselben, miteinander festverknüpft. Die zugehörige Formel lautet:

$$K = \frac{A t'^2 - A' t^2}{t^2 - t'^2}.$$

A bedeutet das Trägheitsmoment des Stäbchens und der beiden Cylinder in der Entfernung 100 mm von der Drehaxe,

t die entsprechende Schwingungsdauer,

A' das Trägheitsmoment des Stäbchens und der beiden Cylinder in der Entfernung Null von der Drehaxe,

t' die zugehörige Schwingungsdauer.

Es ergab beispielsweise eine Bestimmung für die kleine Suspension mit sämmtlichen Messinggewichten $K = 109{,}65$ ($t = 12{,}417$ Sec., $t' = 7{,}583$ Sec.), während die Ausmessung

der Cylinder mit dem Maassstabe und die empirisch gefundenen Trägheitsmomente der kleinen Suspension ergaben: $K = 109{,}98$ kg mm². Die Controle des Trägheitsmomentes der kleinen Suspension und des Messingschlusscylinders lieferte Werthe wie 18,83, 18,89, 18,76, 19,17, 19,14, während die Ausmessung mit dem Maassstabe und die Bestimmung mit dem kleinen Magnete 18,91 ergaben.

Auf Vorschlag von Hrn. Prof. Kohlrausch versuchte ich eine weitere Controle der Trägheitsmomente mittelst bifilarer Suspension. Dieser Methode ist wohl vor der zuerst benutzten, namentlich für grosse Trägheitsmomente, der Vorzug einzuräumen. Es wurde folgende Einrichtung getroffen (s. Fig. 2 in $^1/_4$ natürlicher Grösse). An einem Durchzugsbalken, etwa 3,5 m über dem Boden, wurde eine Platte aus hartem Holz, an ihrem schmalen Umfange mit einer Rinnenführung versehen, festgeschraubt. In letztere legte man den Draht für die bifilare Aufhängung; dieser umfasste so den gekrümmten Theil des Plattenumfanges. An den Stellen, wo der Draht das Holz verlässt, sind Messingplättchen aufgenagelt und in diese Schlitze gemacht, in die der Draht sich senkt und dann scharf nach unten abbiegt. Den Ergänzungstheil unten für die bifilare Zusammenstellung bildet ein prismatischer Messingbalken, an seinen beiden Enden abgeschrägt; über diese gehen, in schiefen Rinnen, die beiden Drahtenden zu Schrauben, von denen sie festgeklemmt werden. In die Mitte des Balkens kann der Messingstift mit Spiegel für Beobachtung mit Fernrohr und Scala und den verschiedenen Gewichten eingeschraubt werden.

Die pendelartige Bewegung an einer solchen Bifilarsuspension, die zufolge ihrer Directionskraft mit einer Schwingungsdauer von t^{sec} entsteht, benutze ich zur absoluten Messung des Trägheitsmomentes der Schwingungsvorrichtung.

Der genaue Ausdruck für die Gesammtdirectionskraft einer Bifilarsuspension ist, wenn man gleiche Fadenlänge und gleiche Fadenspannung annimmt:

$$D = \frac{e_1 e_2}{4\,l}\,g\,m + 2\,\varepsilon;$$

e_1 und e_2 bedeuten den oberen und unteren Fadenabstand, l die Fadenlänge, m die Masse der gesammten Aufhängung, g die Fallbeschleunigung und ε die elastische Torsionskraft eines Fadens.

Das Trägheitsmoment der gesammten schwingenden Vorrichtung ist also mit der Directionskraft der Bifilarsuspension durch den Ausdruck verknüpft:

$$K = \frac{t^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{4}\frac{e_1\, e_2}{l}\, g\, m + 2\,\varepsilon\right].$$

t bedeutet die Schwingungsdauer in Secunden.

Für die Controlversuche waren an dem Messingquerbalken aufgehangen der Messingstift mit Spiegel und Schlusscylinder und dazu einmal Zinkcylinder A, das zweite mal B, dann C und bei einem vierten Versuche alle drei Zinkcylinder. Die Versuche ergaben für das Trägheitsmoment $K_A = 1230{,}5$, $K_B = 1238{,}9$, $K_C = 1253{,}7$, $K_{A+B+C} = 3673{,}7$ kgmm², während nach den früher gemachten Angaben, dazu das Trägheitsmoment des Messingquerbalkens $= 22{,}7$ genommen, welche Zahl auf empirischem Wege mittelst Schwingungen durch Belastung mit zwei etwa je 21 g schweren Messingcylindern gefunden worden war, die Trägheitsmomente $K_A = 1224{,}4$, $K_B = 1233{,}7$, $K_C = 1251{,}4$, $K_{A+B+C} = 3626{,}7$ kgmm² waren.

Der Versuch beispielsweise für Bestimmung von K_C hatte die Werthe geliefert: $m = 1{,}0649$ kg, $e_1 = 99{,}8$, $e_2 = 100{,}0$ mm, $l = 2877{,}0$ mm, $g = 9810$, $t = 1{,}17$ sec.; t bestimmt nach der Methode der Coincidenzen. Die als Correctionsgrösse im Ausdrucke des Trägheitsmomentes auftretende elastische Torsionskraft des Fadens ε berechnet sich, wenn der Torsionsmodul T bereits bekannt ist, aus $\varepsilon = (T\pi r^4/2\,l)\,g$ oder aus $\varepsilon = \pi^2 k/t^2$, d. h. man lässt ein gleich langes Drahtstück derselben Sorte unter Spannung eines Gewichtes von bekanntem Trägheitsmomente k Schwingungen mit der Dauer $t^{\text{sec.}}$ ausführen. Für den benutzten weichen Eisendraht $d = 0{,}27$ mm war $\varepsilon = 16$.

Eine Bestimmung an einem feinen Eisendrahte $d = 0{,}09$ mm dessen ε zu 0,21 berechnet wurde, liefert als Trägheitsmoment des Messingbalkens mit dem Stifte, Spiegel und Schluss-

cylinder 40,30 kg mm² während nach den früheren Angaben, das Trägheitsmoment = 41,42 kg mm² sein soll.

Die bei den Torsionsversuchen am häufigsten gebrauchten Anordnungen der Trägheitsmomente werden in folgender Tabelle zusammengestellt. Die Werthe anderer Combinationen der Trägheitsmomente, wenn solche gebraucht wurden, können daraus leicht entnommen werden.

In dieser Tabelle haben also K und $\varkappa$ die p. 11 angegebene Bedeutung; für die Zinkcylinder ferner wurde das mittelst bifilarer Suspension bestimmte Trägheitsmoment und für die Messingcylinder das aus der Ausmessung mit dem Maassstabe und der Wägung berechnete eingeführt.

Tab. II. Uebersicht der Schwingungskörper.

Schwingungskörper	Trägheitsmoment	Gewicht	Schwingungskörper	Trägheitsmoment	Gewicht
	kg mm²	kg		kg mm²	kg
$\varkappa$	18,91	0,0856	K	20,07	0,1120
$\varkappa + A$	1208,0	1,0284	$K + A$	1209,2	1,0548
„ $+ B$	2405,5	1,9783	„ $+ B$	2406,7	2,0047
„ $+ C$	3617,8	2,9402	„ $+ C$	3619,0	2,9667
$\varkappa + \alpha$	37,22	0,1438	$K + \alpha$	38,38	0,1702
„ $+ \beta$	55,38	0,2015	„ $+ \beta$	56,54	0,2279
„ $+ \gamma$	73,51	0,2591	„ $+ \gamma$	74,67	0,2855
„ $+ \delta$	91,73	0,3169	„ $+ \delta$	92,89	0,3433
„ $+ \varepsilon$	109,98	0,3748	„ $+ \varepsilon$	111,14	0,4013

3) Material, Querschnittsbestimmungen, specifisches Gewicht der Drähte und endgültige Formeln für den Torsionsmodul.

Material. Die Eisen- und Messingdrähte, die bei den Versuchen verwendet wurden, hat Leonh. Hüttlinger's Fabrik in Schwabach bei Nürnberg mit besonderer Sorgfalt dargestellt.

Eine Reihe von sieben harten Eisendrähten war aus schwedischem Stabeisen. Die Drähte waren aus einem dickeren Drahte $d = 0{,}55$ mm hart gezogen worden, ohne dass also zwischen dem Gebrauche zweier aufeinander folgender Ziehlöcher geglüht worden wäre. Die Durchmesser betragen 0,29 bis herab zu 0,09 mm.

Eine weitere Sendung von harten Eisendrähten umfasste Nummern von $d = 1{,}23$ bis $d = 0{,}20$ mm; sie waren von einem Drahte $d = 1{,}75$ ab hart gezogen worden bis zu $d = 0{,}50$; das Material war wiederum schwedisches Stabeisen. Die drei feineren Drähte dieser Reihe $d = 0{,}39$, 0,27, 0,20 mm waren aus steyrischem Holzkohleneisen, von einer Drahtnummer $d = 0{,}47$ ab hart gezogen.

Letzteres Material lässt sich nicht feiner ausziehen als bis zu $d = 0{,}20$ mm, da der Draht zu spröde wird. Für die letzten drei Querschnitte hielt aber die Fabrik dieses Material als das geeignetste.

Jeder Nummer der letzten Reihe von harten Eisendrähten entspricht eine Nummer in den ausgeglühten Eisendrähten, d. h. ein Theil des Zuges wurde für jede Nummer ausgeglüht.

Das vorzüglichste Material bieten die Messingdrähte hart und weich. Die harten Drähte wurden von einer Nummer „weich $d = 1{,}25$ mm“ ab hart gezogen von $d = 1{,}00$ bis zu 0,10; jeder Nummer entspricht ein geglühter Draht. Dabei ist freilich zu bedenken, dass die feineren Nummern nicht mehr im Zieheisen, sondern in Rubinen und Diamanten gezogen werden, und die Geschicklichkeit des betr. Arbeiters, der sich die Löcher selbst aufschneidet, besonders in Betracht kommt. Nach einer Analyse des Herrn Professor Kittler in Darmstadt enthält der Messingdraht weder Eisen noch Blei und ist seine Zusammensetzung:

Kupfer = 73,55 Proc.,
Zink = 26,37 Proc.

Die Kupfer- und Silberdrähte wurden mit Hülfe zweier Zieheisen gezogen, die ersteren von einem gewöhnlichen Leitungskupferdraht $d = 0{,}63$ mm ab in den Nummern: $d = 0{,}50$, 0,40, 0,33, 0,27 bis zu 0,17 der Weite der feinsten Oeffnung im Zieheisen. Nach jedem Gebrauche eines Ziehloches glühte ich das Stück, welches feiner ausgezogen werden sollte, jedoch nicht mehr zwischen 0,27 und 0,17. Die Silberdrähte sind ebenso dargestellt, und zwar einmal aus Silber, das aus AgCl reducirt worden war, die Drähte $d = 0{,}35$, 0,32, 0,18, dann aus käuflichem, reinem Silber $d = 0{,}32$, 0,31 und 0,17.

Sämmtliche Kupfer- und Silberdrähte sind also als harte anzusehen.

Querschnittsbestimmungen. Die Durchmesser aller meiner Drähte versuchte ich mit dem Mikroskope zu messen. Allein das Ungenügende dieser Bestimmungen für den Vergleich der Torsionsmoduln verschieden dicker Drähte untereinander zeigte sich alsbald. Die Unsicherheit in der Querschnittsbestimmung bei den feinen Drähten, beispielsweise ein Fehler von 0,003 mm im Durchmesser, verursacht schon bedeutende Differenzen im Endresultate. Dazu kommt die Abweichung der Querschnitte von der Kreisgestalt an manchen Stellen des Drahtes. Deshalb bestimmte ich ausserdem die Querschnitte durch Wägung einer gemessenen Länge der Drähte und den zugehörigen spec. Gewichten und führte die Masse m der Länge Eins in den Ausdruck für den Torsionsmodul ein. Die nach den beiden Verfahren erhaltenen Torsionsmoduln werden später einzeln angegeben werden.

Specifisches Gewicht. Um für das Versuchsmaterial möglichst absolut richtige Werthe der Torsionsmoduln zu erhalten, war eine eingehende Untersuchung über spec. Gewicht geboten. Zuerst suchte ich dieses für die sieben Schwedisch-Stabeisen-Drähte $d = 0{,}29$ bis 0,09 zu bestimmen. Trotzdem die Wägungen in der Luft und im Wasser an einer Wage ausgeführt wurden, die auf 0,06 mg genau zu wägen gestattete, das Glasgefäss, 1,9 g schwer, in dem die Drähte unter Wasser gebracht wurden, nur an einem Coconfaden hing, das Wasser selbst ausgekocht und unter der Luftpumpe ausgepumpt wurde, war die Unsicherheit im spec. Gewichte für die zwei feinsten Drähte infolge der Beobachtungsfehler, Capillarkräfte etc., 6 Proc. Später gebrauchte ich das Pyknometer. Die Wägungen sind wegen Ausdehnung des Glases mit der Temperatur und des Gewichtsverlustes corrigirt. Eine Genauigkeit bis zu 0,2 Proc. konnte damit bald erreicht werden. Diese Versuche, die ich nur in beschränkter Anzahl anstellen konnte, sollten besonders die Dichteverhältnisse von harten und ausgeglühten Drähten zueinander klarlegen.



Die daraus gewonnenen Zahlen hatte ich als Mittelwerthe bei den Ausrechnungen der Torsionsmoduln zu Grunde gelegt. Da über das spec. Gewicht so feiner Drähte meines Wissens nichts bekannt ist, so habe ich in letzter Zeit Bestimmungen des spec. Gewichts für Reihen von Drähten vorgenommen, deren Resultate ich hier, in Vereinigung mit den wenigen früher gefundenen gebe.

Tab. III. Specifische Gewichte. (Fig. 3.)

Eisen I Nr. 1 bis 5 schwedisches Stabeisen, hart gezogen; Nr. 6 bis 8 steyrisches Holzkohleneisen, hart gezogen von einer Nummer 0,47 mm ab. Eisen II schwedisches Stabeisen hart gezogen von einer Nummer 0,55 mm ab. Messing hart gezogen von einer Nummer 1,25 mm weich abwärts. Silber, käuflich rein und aus AgCl reducirt, Mittelwerth aus verschiedenen Drähten.

	$2r$	Spec. Gewicht		$2r$	Spec. Gewicht
Eisen I	mm		Eisen II	mm	
hart	1,75	7,782 82 84 85	hart	0,30	7,741 47 43 37
„	1,23	7,794 96 98	„	0,25	7,756 68 64
		96 91 91	„	0,20	7,734 29 17 28
geglüht	„	7,786 88 80 77	„	0,15	7,745 39 55
hart	1,00	7,794 90 93 95	„	0,12	7,741
		7,800 ,794 ,800 ,790	„	0,11	7,780 85
geglüht 1)	„	7,810 ,812 ,798	„	0,095	7,819 37 22
„	„	7,801 ,796 ,798			7,823 14 31
„ 2)	„	7,805 04 06	Messing		
„ 3)	„	7,793 93 96 ,802	hart	1,00	8,551 55 57
hart	0,72	7,805 09 04			8,562 51 61
		7,804 06 08	geglüht	0,99	8,564 63 58 61 62
geglüht	„	7,795 90 84 89	hart	0,38	8,531 46 43 48
hart	0,50	7,804 01 04 04	geglüht	„	8,553 65 67 53
„	0,40	7,788 91 85 94	hart	0,10	8,514 11
„	0,27	7,781 86 84	geglüht	„	8,577 69
„	0,20	7,749 64 53 53	Kupfer		
			hart	0,63	8,876 62 68
			Silber	versch.	10,436 32

1) Geglüht in der Fabrik.
2) In der Esse unter Kohlensäure.
3) Hellroth durch electr. Strom.

Erwägt man, wie ein Draht, während er durch das Zugloch des Zieheisens geht, von zwei Kräften in seiner molecularen Structur angegriffen wird, von denen die eine, die Zugkraft, seine Dichtigkeit zu verringern, die andere dagegen durch seitliches Zusammenpressen dieselbe zu vergrössern strebt, und wie von vorn herein nicht festzustellen ist, welche von beiden vorwaltet, nachdem ja auch bei dem Ziehen bekanntlich die Spannung und die Ziehgeschwindigkeit mit der Dicke der Drähte variirt werden muss, so ist man vielleicht geneigt, auch messbare Unterschiede im spec. Gewichte verschieden dicker Drähte zu erwarten.

Der Process des Ziehens ändert die Dichte von Drähten in messbaren Grössen. Das specifische Gewicht nimmt zu oder ab, die im Augenblicke der Gestaltsänderung beweglichen Molecüle folgen dem Uebergewichte jeder der beiden beim Ziehen auf sie einwirkenden Kräfte. So nimmt das specifische Gewicht der dicken Schwedisch-Stabeisen-Drähte, die von Draht „hart $d = 1{,}75$ mm“ ab gezogen wurden, ohne ausgeglüht zu werden, mit abnehmendem Querschnitte zu und scheint bei $d = 0{,}72$ den grössten Werth erreicht zu haben. Für die Steyrisch-Holzkohleneisen-Drähte ergibt sich bei gleicher Darstellungsart eine Abnahme der Dichte. — Vielleicht ist damit auch der Begriff des Sprödewerdens für Eisendrähte definirt.

Die feinen Nummern der zweiten Serie, die unter den verschiedensten Spannungen und Geschwindigkeiten gezogen wurden, haben bald grösseres, bald kleineres specifisches Gewicht. Das der zwei feinsten Drähte ist grösser als das der übrigen. — Die Bestimmungen für die übrigen Drahtsorten konnten nicht in grösserer Zahl gemacht werden. Das spec. Gewicht des feinsten, harten Messingdrahtes ist wahrscheinlich zu klein gefunden, da dessen Untersuchung gegenüber anderen feinen Drähten, namentlich gegen den geglühten, feinsten Messingdraht, eine äusserst schwierige war; wegen seiner Elasticität nämlich war eine Geradestreckung nicht möglich und die Anwesenheit von Luftblasen bei der Wägung des Drahtes unter Wasser zu vermuthen.

Beim Kupfer musste ich das spec. Gewicht des Drahtes

$d = 0{,}63$ als auch für die übrigen Drahtstücken geltend annehmen, da ich für weitere Bestimmungen nicht genügende Quantitäten hatte; aus demselben Grunde musste das specifische Gewicht für die zwei Sorten von Silberdrähten zusammen bestimmt werden.

Aus den Resultaten für die geglühten Drähte könnte man folgern, dass durch Ausglühen von Eisen- und Messingdrähten ihre Molecüle sich inniger zusammendrängen. Ich wollte das spec. Gewicht sämmtlicher geglühter Eisendrähte untersuchen; indess, entkleidet man die Drähte der Oxydschicht, so erweist sich die Oberfläche continuirlich, vielleicht infolge nur theilweiser Oxydation, wellenförmig gekrümmt, und es ist nicht möglich, die Drähte so blank zu putzen wie harte. Dieses war am ehesten möglich bei dem Drahte $d = 1{,}00$; daher sind diese Resultate die zuverlässigsten, die für $d = 1{,}23$ und $d = 0{,}72$ mussten, wie vorauszusehen, sich zu klein ergeben. Beim Messing ist das Reinigen leicht zu bewerkstelligen. In Uebereinstimmung würde die Zunahme des spec. Gewichtes durch Glühen mit einer Bemerkung Wertheim's[1]) sein, dass Eisen in dicken Drähten durch Anlassen eine geringe Verdichtung erleidet.

Bei den Beobachtungen wurde verfahren, wie folgt: Die zu untersuchenden Drähte wurden jedesmal mit Smirgelpapier sorgfältig blank geputzt und mit Alkohol gereinigt, da sonst durchgehends die Resultate für das spec. Gewicht unrichtig, nämlich zu klein ausfallen mussten. Die Drähte unter Wasser (destillirtes Wasser, das für die Versuche gut ausgekocht worden war) wurden bei jeder Bestimmung unter die Luftpumpe gebracht; je grösser die Oberfläche des Drahtes im Pyknometer war, um so aufmerksamer musste ausgepumpt werden. Wurden mit Eisendrahtstücken einige Bestimmungen hintereinander gemacht, so war besonders zu beachten, dass sie nicht zu lange Zeit beanspruchten, da sonst die Drähte rosteten und die späteren Werthe des spec. Gewichtes zu klein gefunden wurden. — Durch Befolgung dieser Vorsichtsmaassregeln war es möglich, das spec. Gewicht für

1) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. **2.** p. 55. 1848.

dickere Drähte bis auf 0,1 %, das für dünne bis auf 0,2 % genau anzugeben.

Formeln für den Torsionsmodul.

Die nach dem gewöhnlich angegebenen Ausdrucke $T = 2\pi Kl/gt^2r^4$ berechneten Werthe des Torsionsmoduls sind zu klein wegen Nichtberücksichtigung der bei Spannungen wirklich auftretenden Längendilatationen und Quercontractionen der Drähte; für den Vergleich der Resultate bei verschiedenen Belastungen ist es also nöthig, den Modul auf die Belastung Null zu reduciren.

Wird ein Draht von der Länge l mm und Q qmm Querschnitt mit M kg belastet, so verlängert er sich um $\lambda = lM/EQ$, wo E den Elasticitätsmodul erster Art bedeutet. Die Verringerung des Halbmessers des Drahtes ist hierbei $\varrho = \mu r \lambda / l$; es soll nach der Elasticitätstheorie $0 < \mu < \frac{1}{2}$ sein. Ich nehme $\mu = \frac{1}{3}$ (vgl. p. 606). E setze ich bei den Ausrechnungen für: Eisen, hart und geglüht = 19000, Kupfer, hart = 12000, Messing, hart und weich = 9000 und Silber, hart = 6500 kg/qmm. Der auf die Belastung 0 kg reducirte Torsionsmodul ist demnach:

$$T = \frac{2\pi}{g} \frac{Kl}{t^2 r^4} \left[1 + \frac{7}{3} \frac{\lambda}{l}\right].$$

Auf gleiche Temperatur 18° wurden die Beobachtungen für Eisen-, Messing- und Kupferdrähte nach den von F. Kohlrausch und F. E. Loomis gegebenen Formeln reducirt.[1]) Man wird leicht nachrechnen können, dass hiernach um 18° für Eisen und Messing $T_{18} = T[1 + 0{,}00049(\theta - 18)]$, für Kupfer $T_{18} = T[1 + 0{,}00058(\theta - 18)]$, wenn θ die Beobachtungstemperatur bezeichnet.

Bei den Silberdrähten bedeutet T den auf die Belastung Null reducirten Modul, beobachtet bei der angegebenen Temperatur.

---

1) F. Kohlrausch und F. E. Loomis, Pogg. Ann. **141.** p. 497. 1870.

In diese Formeln habe ich nun einmal den Querschnitt, bestimmt aus der Masse m der Längeneinheit und dem specifischen Gewichte, dann den Durchmesser, gemessen unter dem Mikroskope, eingeführt. — Die daraus berechneten Werthe der Torsionsmoduln bezeichne ich in den Tabellen mit T_m und T_r.

Torsionsmoduln.

In Tab. IV bis X sind die Beobachtungsdata und die nach den vorigen Formeln berechneten Torsionsmoduln enthalten.

Da wo eine zweite Länge l desselben Drahtes angegeben ist, bedeutet dieselbe die Länge nach der Beobachtung.

Zu Untersuchungen über Schwingungsdauer und Dämpfung blieb der Draht öfters längere Zeit hindurch belastet. Diese Zeiten stehen unter D. Das (mit 10^5 multiplicirte) log. Decrement λ ist das Mittel aus den Decrementen vor und nach den drei Beobachtungssätzen von Durchgängen.

Bei der Berechnung der Torsionsmoduln von weichen Drähten ging ich von der Annahme aus, dass diese so lange dem Elasticitätsgesetze gehorchen, als nach Aufhebung der Belastung keine Dehnungen zurückbleiben. Sind solche vorhanden, und sind sie klein, so habe ich aus den Verlängerungen die Quercontractionen berechnet (z. B. Messing $d = 0{,}182$ oder $d = 0{,}100$ Nr. 4). Uebersteigt die Verlängerung einige Millimeter, so erscheinen die Drähte unter dem Mikroskop rauh und an vielen Stellen eingeschnürt. Dass die Torsionsmoduln sich alsdann zu klein ergeben, wenn man sie auf dem angegebenen Wege berechnet, ist nicht zu verwundern.

Im allgemeinen sind die Resultate für die geglühten Messingdrähte zuverlässiger als für die geglühten Eisendrähte, da die letzteren sich nicht so wie die ersteren durch eine Zugkraft vor oder bei dem Versuche strecken liessen.

d = Beob. Durchmesser; m = Masse der Längeneinheit; s = spec. Gewicht; l = Länge; D = Dauer der Belastung in Stunden; t = Schwingungsdauer; T_m und T_r = Torsionsmoduln für 18° berechnet aus m und s oder aus d; λ = log. Decrement $\times 10^5$; α = Amplitude; Θ = Temperatur. Ueber die Belastungen siehe Tab. I und II.

Tab. IV. Eisen, hart. (Fig. 3.)

d = 1,231 bis 0,502 Schwedisch Stabeisen, hart gezogen von d = 1,75 ab.
d = 0,405 bis 0,200 Steyrisch Holzkohleneisen, hart gezogen von d = 0,47 ab.

d	m	s	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	Θ
mm	mg/mm		mm			sec					
231	9,347	7,798	2331	$K+A+B+C$		2,235	7446	7553		0,6°	22°
009	6,224	7,800	2275	"		3,218	7912	7886		1,1	22
				"	16h	3,209	7950	7922	120	1,6	21
,724	3,172	7,809	2315	$K+A+B$		5,101	8236	7996		1,4	25
				" " $+C$		6,228	8308	8066		2,8	25
				$K+A+B$		5,099	8241	8002		1,6	25
,502	1,505	7,804	2319	$K+C$		7,687	8261	7831	140	1,7	25 [1]
r. 1				$K+A+C$		10,789	8246	7816	157	3,6	25
				$K+A+B+C$		13,152	8282	7852		2,7	22 [2]
,502	—	—	498,0	$K+A$		3,563	8081	7661		1,7	21
r. 2				" $+B$		4,997	8186	7760		2,0	21
				" $+C$		6,111	8234	7808		3,1	21
405	0,9777	7,794	2323	$K+A$		11,990	7870	7492		2,8	22
r. 1				$K+\alpha$ bis ε		12,417	7895	7517		4,7	22
				"	2,5	12,404	7912	7532	117	5,2	22
				$K+A+B$		16,840	7952	7570	130	7,7	22
				" " $+C$		20,617	7983	7601	158	8,2	22
405	—	—	496,0	$K+A$		5,477	8054	7667		2,4	21
r. 2				" $+B$		7,700	8118	7730		1,9	22
				" $+C$		9,429	8151	7759		1,5	22
				"	111	9,401	8190	7796	108	4,9	20
269	0,4370	7,786	425,0	$K+\alpha$ bis ε		3,474	7869	7660		2,0	20
269	—	—	479,4	$K+\alpha$ bis δ		3,428	7608	7406		0,5	17
r. 2				" " $+\varepsilon$		3,745	7628	7426		2,0	17
				$K+A$		12,443	7527	7330		5,6	17
				" $+B$		17,522	7573	7372	222	4,7	17
				"	17	17,458	7626	7423	142	6,1	17
200	0,2457	7,764	476,0	$K+\alpha$ bis ε		6,687	7489	7560	148	4,9	20
200	—	—	460,3	$K+A$		21,925	7348	7421	204	7,9	21
r. 2				"	17	21,903	7362	7435	190	8,9	20
200	—	—	474,2	$K+\alpha+\beta+\gamma$		5,430	7586	7662	150	2,8	18
r. 3				" " $+\delta$		6,061	7576	7652	164	3,6	18
			474,7	" " $+\varepsilon$		6,632	7585	7661		4,3	18
			475,0	$K+A$		22,108	7435	7509	212	8,2	18
				" $+B$		31,247	7436	7509	300	10,9	18

Tab. V. Eisen, hart.

Schwedisches Stabeisen, hart gezogen. (Fig. 4.)

d	m	s	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	θ
mm	mg/mm		mm			sec					
0,295	0,5268	7,747	491,5	$K+A$		10,522	7356	7311		8,8°	19°
				,, $+B$		14,801	7411	7366		9,8	19
			491,8	,, ,, $+C$		18,136	7441	7396	218	11,6	19
			491,5	,,	2,5 h	18,100	7468	7423	167	5,2	20 [2]
0,249	0,3762	7,768	294,7	$K+A$		10,885	8150	7998	158	2,0	24
				,, $+B$		15,339	8187	8034	154	2,5	24
				,, ,, $+C$		18,827	8190	8038	148	6,7	24 [1]
0,200	0,2428	7,734	301,3	$K+\alpha$ bis ε		5,298	7683	7712		1,2	23
				$K+A$		17,634	7565	7593		2,4	23
				,,	16	17,575	7611	7640	140	8,3	22
0,150	0,1348	7,755	353,8	$K+\alpha+\beta+\gamma$		8,309	8033	7766	148	1,8	22
				,, ,, $+\delta+\varepsilon$		10,160	8003	7736	130	4,6	22
				$K+A$		33,921	7846	7585	300	11,8	22
				,,	2	33,857	7888	7625		3,4	25 [5]
0,121	0,0885	7,741	305,0	$\varkappa+\alpha+\beta$		10,547	7380	7282	186	5,7	22 [1]
Nr. 1				,, ,, $+\gamma$		12,166	7368	7270	205	7,6	22
				,, ,, $+\delta$		13,587	7376	7278		2,5	22
				,, ,, $+\varepsilon$		14,890	7369	7272	212	5,5	23
				,, ,,	16	14,862	7392	7295	156	4,7	22
0,122	0,0888	—	250,0	$\varkappa$		5,477	7588	7305	177	2,0	22
0,110	0,0706	7,785	157,3	$\varkappa$		5,472	7644	7435	222	1,9	21
				$+\alpha$		7,663	7679	7470	190	1,5	21
				,, ,, $+\beta$		9,351	7676	7467	195	2,2	21 [3]
				,, ,, $+\gamma$		10,782	7672	7462		1,7	21 [4]
				,, ,, $+\delta$		12,046	7676	7467	215	3,9	21
				,, ,, $+\varepsilon$		13,204	7666	7457		5,0	21 [5]
0,095	0,0519	7,830	131,2	$\varkappa$		6,701	7957	7055	132	5,5	20
				$+\alpha$		9,407	7957	7054	124	4,9	20
				,, ,, $+\beta$		11,484	7951	7049	118	5,6	20
				,, ,, $+\gamma$		13,246	7941	7040	115	3,9	20
				,, ,, $+\delta$		14,797	7950	7048	117	8,0	20
				,, ,, $+\varepsilon$		16,227	7933	7033	122	5,6	20

Anmerkungen zu den Tabellen IV bis X.

1) Schon einige Zeit vor der Beobachtung in Schwingungen.
2) Tags darauf beobachtet.
3) Der Draht vollführte während der Belastungszeit Schwingungen.
4) Nach dem Schwingungssatze $\lambda = 202$ für $\alpha = 1,4°$.
5) Nachher $\lambda = 220$ für $\alpha = 4,3°$.
6) Vor der Beobachtung etwa 1 h belastet.
7) Vorher $\lambda = 160$ für $\alpha = 6,5°$.
8) Vorher $\lambda = 81$ für $\alpha = 3,3°$.
9) Vorher $\lambda = 351$ für $\alpha = 4,6°$.

Tab. VI. Eisen, geglüht. (Fig. 3.)

Aus den Drähten der Tab. IV durch Glühen hergestellt. Das spec. Gewicht der ersten drei Drähte = 7,81, das der anderen = 7,80 gesetzt.

d	m	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	θ
mm	mg/mm	mm			sec					
1,012	6,194	2336	$K+A+B+C$		3,214	8243	7996		0,6°	22°
			„	2b	3,213	8251	8003		0,6	22
0,734	3,257	2332	„		6,067	8355	8111	76	5,3	21 [6])
			„	17	6,062	8364	8122		1,7	20
			$K+B+C$		4,957	8399	8155		0,7	20
0,511	1,552	507,0	$K+A+B+C$		6,113	7883	7393		3,2	21
Nr. 1			„	2	6,125	7854	7365		3,8	21
0,511		2337	$K+A$		7,412	8257	7744		1,1	23
Nr. 2			$K+A+C$		10,434	8350	7831		3,7	24
			$K+A+B+C$		12,760	8350	7833		2,1	24
0,420	1,012	495,0	$K+A$		5,390	7736	6777	200	1,7	17
			„ $+B$		7,598	7757	6796	136	1,9	17
			„ „ $+C$		9,307	7780	6816	128	3,3	17
0,273	0,4519	497,3	$K+\alpha$ bis ε		3,546	8294	8058		1,2	20
Nr. 2	—	405,6	$K+A$		10,499	8407	8169		3,2	20
Nr. 3	—	322,7	„		9,433	8287	8051	100	3,3	20
Nr. 4	—	492,0	„		11,531	8448	8209	98	3,5	18
		492,3	„	63	11,535	8442	8203	98	4,8	17
Nr. 5	—	493,0	$K+\alpha$ bis ε		3,518	8341	8104		3,8	17 [1])
			$K+A$		11,696	8224	7990	84	3,3	17
Nr. 6	—	2314	$K+\alpha$ bis δ		6,916	8477	8236		3,2	20
			„ $+\varepsilon$		7,564	8480	8239		2,0	20
			$K+A$		25,138	8366	8129		3,2	20
			$K+A$	2	25,130	8373	8135		1,9	20
0,200	0,2400	458,0	K		2,777	7963	7680		1,1	19
			$+\alpha$		3,836	7982	7699		0,8	19
			„ $+\beta$		4,653	7993	7709		0,9	19
		458,4	„ „ $+\gamma$		5,354	7982	7698		3,2	18 [2])
			„ „ „ $+\delta$		5,975	7977	7693		3,1	18
			„ „ „ „ $+\varepsilon$		6,535	7982	7697		2,7	18
		458,8	$K+A$		21,758	7841	7560		2,9	18

10) Festigkeitsmodul p = 56 kg/qmm.
11) p = 40 kg/qmm.
12) Hier scheint der Draht sich schon verlängert zu haben.
13) λ vorher = 273 für α = 5,7°, nachher = 153 für α = 4,6°.
14) λ vorher = 236 für α = 4,3°, nachher = 131 für α = 3,3°.
15) Vor dieser Beobachtung war der Draht einige Zeit abgenommen.
16) λ vorher = 203 für 6,0°, nachher = 172 für 4,6°.
17) Wanderung des Nullpunktes der Scala.
18) λ vorher = 292 für 1,8°, nachher = 242 für 1,4°; p=35 kg/qmm.
19) Zeitbestimmung etwas unsicher.

Tab. VII. Messing, hart.

(Fig. 3).

d	m	s	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	ϑ
mm	mg/mm		mm			sec					
1,001	6,797	8,562	2321	$K+A+B+C$		4,869	3561	3629		0,6°	22° [5]
0,751	3,833	(8,553)	2328	„		8,730	3494	3566		3,3	23
				„	65h	8,673	3536	3611	36	5,7	21
				$K+A+C$		7,129	3500	3575	45	4,4	21
0,508	1,756	(8,553)	498,0	$\varkappa+A$		5,137	3422	3518		1,5	18
Nr. 1				„ $+B$		7,196	3478	3575		2,7	17
				„ $+C$		8,790	3511	3608	97	8,4	18
Nr. 2	—	—	2354	$+A$		11,191	3419	3513	118	2,8	20
				$K+A+B$		15,638	3489	3585	122	3,8	20
				$K+A+C$		15,653	3501	3598		8,8	18 [2]
				„ „ $+\alpha$ bis ε		15,933	3507	3604		8,9	19
				$K+B+C$		15,631	3524	3620		7,5	19
				$K+A+B+C$		19,110	3515	3612		7,1	19
				„	3	19,083	3527	3625		10,5	20 [3]
0,384	1,005	8,548	499,6	$\varkappa+A$		8,932	3462	3561		1,6	14
Nr. 1				„ $+B$		12,557	3497	3596		12,1	15
				„ „ $+C$		15,399	3504	3605		14,0	15
Nr. 2	—	—	2296	$K+\beta+\gamma+\varepsilon$		4,843	3349	3444		0,8	21
				„	2	4,836	3359	3455		0,7	22
				$K+\beta$ bis ε		5,376	3383	3479		3,1	22
				$K+\alpha$ bis ε		5,873	3395	3491		2,9	22
0,253	0,4397	(8,548)	498,8	$\varkappa+A$		20,477	3452	3614		4,7	18
				$\varkappa+\alpha$ bis ε		6,157	3464	3626	138	1,7	„
				$\varkappa+A+B$		28,997	3445	3607	208	8,3	„
0,179	0,2168	(8,548)	300,4	$\varkappa$		4,050	3407	3429		1,5	„
				$\varkappa+\alpha$		5,666	3428	3451	122	4,2	„
				„ $+\beta$		6,898	3443	3466	130	5,9	„
				„ „ $+\gamma$		7,946	3446	3469	113	6,4	„
				„ „ $+\delta$		8,877	3448	3471	120	5,0	„
				„ „ $+\varepsilon$		9,720	3450	3473	125	2,1	„
0,139	0,1356	(8,548)	250,0	$\varkappa$		5,751	3592	3883		2,8	15
				$\varkappa+\alpha$		8,054	3607	3899	122	10,6	„
				„ $+\beta$		9,836	3601	3894	126	6,9	„
				„ „ $+\gamma$		11,336	3603	3896	136	9,4	„
				„ „ $+\delta$		12,665	3606	3898	133	8,8	„
				„ „ $+\varepsilon$		13,879	3604	3896		5,6	„ [7]
				„	64	13,825	3632	3927	93	5,7	16
0,100	0,0697	(8,514)	155,3	$\varkappa$		8,944	3503	3791	187	5,6	18
				$\varkappa+\alpha$		12,570	3499	3785	190	2,4	„
				„ $+\beta$		15,364	3491	3777	204	2,3	„
				„ „ $+\gamma$		17,750	3478	3763	210	5,8	„
				„ „ $+\delta$		19,878	3467	3752	200	4,9	„
				„ „ $+\varepsilon$		21,839	3450	3734		3,1	„

Tab. VIII. Messing geglüht. (Fig. 3).

d	m	s	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	θ
mm	mg/mm		mm			sec					
,988	6,632	8,564	2337	$K+A+C$		3,868	3997	4077		3,3°	22°
				$K+A+B+C$		4,726	4003	4083		3,0	"
				"	2,5h	4,722	4011	4090		1,2	" [8]
,741	3,705	(8,564)	2330	"		8,816	3678	3697		2,1	23
				"	89	8,784	3698	3717		3,2	19
,507	1,757	(8,564)	479,0	$K+A$		4,970	3532	3649		1,0	20
ʼr. 1			479,5	" $+B$		7,000	3548	3665		3,2	20 [8]
			479,7	" " $+C$		8,591	3546	3664		2,3	21
ʼr. 2	—	—	500,5	$\varkappa+A+B+C$		8,618	3676	3797		3,4	18
				"	65	8,598	3694	3815		2,6	18
,386	1,0045	8,567	397,3	$\varkappa+A$		7,792	3647	3647		1,2	20
			400,0	" $+B$		11,069	3647	3646		1,3	" [1]
			425,0	" " $+C$		14,819	3539	3540		2,0	"
			426,0	"	64	15,072	3442	3441		3,0	"
,256	0,4580	(8,567)	446,0	$\varkappa+\alpha$ bis ε		5,539	3545	3812		0,7	"
			457,0	$\varkappa+A$		19,312	3605	3874		4,1	" [9]
			454,5	$\varkappa+A+B$		36,778	3212	3454		10,2	" [10]
,182	0,2237	(8,567)	291,0	$\varkappa$		3,760	3615	3665		2,0	19 [11]
				$\varkappa+\alpha$		5,268	3627	3677		1,9	"
				" $+\beta$		6,428	3626	3677		2,9	"
				" " $+\gamma$		7,412	3622	3672		3,4	" [8]
				" " $+\delta$		8,286	3619	3669		2,1	"
			292,5	" " $+\varepsilon$		9,161	3593	3643		3,0	20
,1?7	0,1289	(8,577)	300,0	$\varkappa$		6,814	3422	3552		2,2	18
				$\varkappa+\alpha$		9,554	3430	3559		2,4	"
				" $+\beta$		11,662	3429	3558		4,6	"
				" " $+\gamma$		13,461	3419	3549	119	4,3	" [12]
				" " $+\delta$		15,066	3410	3539		5,9	"
			303,4	" " $+\varepsilon$		16,573	3475	3607	213	5,1	" [13]
			304,0	"	18	16,751	3422	3551	050	3,3	"
1005	0,0683	8,577	99,0	$\varkappa$		7,409	3407	3433		4,1	" [11]
r. 1				$\varkappa+\alpha$		10,426	3392	3419		1,4	" [12]
			103,0	" $+\beta$		13,730	3263	3288	183	3,8	" [14]
r. 2	—	—	150,0	$\varkappa$		9,095	3426	3453	147	3,9	"
r. 3	—	—	150,0	$\varkappa$		9,020	3483	3510		1,4	"
				$\varkappa+\alpha$		12,779	3423	3449	162	4,3	" [12]
			160,6	" $+\beta$		17,556	3296	3322	125	6,8	"
r. 4	—	—	251,0	$\varkappa$		11,791	3413	3439	130	5,2	" [11]
			253,0	$\varkappa+\alpha$		16,685	3425	3452	175	9,6	19
			264,6	" $+\beta$		22,253	3278	3303		4,6	" [15]
			287,0	" " $+\gamma$		29,316	3199	3224		6,6	"

20) λ vorher = 448 für 0,8°; p = 30 kg/qmm.

21) λ vorher = 645 für 3,9°, nachher = 559 für 2,0°.

22) " " 1051 " 3,6, " 731 " 1,3°.

23) " " 1011 " 2,0, " 865 " 0,8°. Zwischenzeit nur 5 Min.

Tab. IX. Kupfer, hart.

Spec. Gew. = 8,868. Gezogen aus gewöhnlichem Leitungskupfer.

d	m	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	ϑ
mm	mg/mm	mm			sec					
0,506	1,800	544,0	$\varkappa + A + B + C$		8,150	4553	4658			16°
			$\varkappa + A + B$		6,656	4535	4639			„
			$\varkappa + A$		4,723	4519	4622			„
			$\varkappa + A + B + C$	70^h	8,106	4603	4708			„
0,509	1,800	351,5	$K + A$		3,809	4515	4504		0,5°	23
			„ $+ B$		5,362	4538	4528		1,8	„
			„ „ $+ C$		6,573	4546	4536	146	3,5	„
			„	95	6,543	4584	4574	081	4,6	22
0,404	1,170	419,5	$K + A$		6,453	4439	4681		1,6	21
			„ $+ B$		9,082	4469	4711	137	2,3	„
		419,7	„ „ $+ C$		11,140	4473	4716	188	5,3	„ [16])
			„	41	11,098	4501	4746	101	6,1	19 [1])
0,327	0,7655	412,7	$K + A$		9,826	4398	4637	163	6,0	„
			„ $+ B$		13,868	4406	4644	231	6,0	„
		413,0	„ „ $+ C$		17,052	4392	4630		2,1	20 [17])
			„	3	17,018	4412	4650	166	1,9	„ [8])
0,272	0,5099	411,5	$K + \alpha$ bis δ		4,027	4523	4457		1,0	23
			„ $+ \varepsilon$		4,403	4529	4462		0,6	„
			$K + A$		14,672	4449	4382	217	4,7	„
			„	2	14,654	4460	4394	163	7,7	„
0,270	0,5075	296,0	$K + A$		12,589	4378	4367	267	1,6	20 [18])
			„ $+ B$		17,832	4358	4347		3,3	„ [12])
0,178	0,2238	380,0	$\varkappa + \alpha + \beta$		6,891	4410	4501	197	2,1	„
			„ „ $+ \gamma$		7,941	4411	4501	225	3,5	„
			„ „ $+ \delta$		8,866	4418	4507	219	3,5	„
			„ „ $+ \varepsilon$		9,712	4416	4506	221	4,4	„
			„	17	9,686	4433	4524	154	6,1	18 [8])

Tab. X. Silber, hart.

Spec. Gew. = 10,434. Die drei ersten käufliches reines Silber, die späteren aus AgCl reducirt.

d	m	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	Θ
mm	mg/mm	mm			sec					
0,319	0,8209	496,0	$K + \alpha + \beta + \gamma$		3,718	2739	2661		0,9°	18°
			„ „ $+ \delta + \varepsilon$		4,520	2760	2681		0,6	19 [19])
			$K + A$		15,176	2672	2595	600	3,6	„
			„	39^h	15,145	2688	2611	272	6,1	„
0,310	0,8170	398,4	$K + \alpha$ bis ε		4,086	2740	2950	288	1,9	22 [1])
			$K + A$		13,656	2678	2883	446	4,2	„
0,174	0,2473	432,0	$\varkappa + \alpha$		8,373	2585	2552		1,1	19
			„ $+ \beta$		10,213	2588	2554		3,2	„
			„ „ $+ \gamma$		11,772	2588	2554		3,8	„
			„ „ $+ \delta$		13 162	2585	2552		4,5	„
			„ „ $+ \varepsilon$		14,430	2582	2549		3,5	„
			„	66	14,352	2611	2578	330	3,3	21

(Fortsetzung von Tab. X.)

d	m	l	Belastung	D	t	T_m	T_r	λ	α	Θ
mm	mg/mm	mm			sec					
0,352	1,0343	401,0	$K+\alpha$ bis ε		3,284	2663	2770		0,5°	18 [20])
			$K+A$		10,953	2610	2716	602	2,9	„
			„ $+B$		15,520	2598	2703	891	2,5	„
0,322	0,8484	440,8	$K+A$		14,107	2573	2574		4,6	23 [17])
			„ $+B$		20,062	2545	2546		2,1	„
0,181	0,2645	213,6	$\varkappa+\alpha+\beta$		6,672	2622	2567	938	1,4	22 [23])
			„ „ $+\gamma$		7,699	2615	2561	1005	2,2	„
			„ „ $+\delta$		8,607	2614	2560	1050	3,8	„
			„ „ $+\varepsilon$		9,437	2608	2555	1071	3,5	„

Discussion der Beobachtungen.

Torsionsmoduln. Die Unterschiede der einzelnen Resultate rühren natürlich theilweise von Beobachtungsfehlern und dabei in erster Linie von den Durchmessern her. Die Drähte erlauben mit dem Mikroskope keine über 0,003 mm hinausgehende Sicherheit der Dickenbestimmung, und insbesondere bei den feinen Drähten gehen hieraus Fehler hervor, welche bis auf 10 Proc. steigen könnten. So gibt auch die Oxydschicht der geglühten Drähte, welche nicht entfernt wurde, im Mikroskop einen zu grossen Querschnitt, also ein zu kleines T_r. Umgekehrt mag bei den Messingdrähten deren Glanz erklären, dass ihre T_r grösser als die T_m ausfallen. Deswegen soll auf die Spalte T_r kein Gewicht gelegt werden.

Aber auch unter T_m zeigen sich beträchtliche Unterschiede für dasselbe Material, die hier unmöglich aus Beobachtungsfehlern hervorgehen können, da sie die Unsicherheiten der Querschnittsbestimmung durch Wägung weit übersteigen, welche letztere von 0,5 Proc. für die dicksten bis zu 4 Proc. für die feinsten Drähte gehen können. Einzelne grössere Abweichungen sind wohl auf eine Inconstanz des Querschnittes zurückzuführen. Um die Uebersicht zu erleichtern, sind die gewonnenen T_m nach der Masse der Längeneinheit als Abscisse graphisch dargestellt, bezogen auf möglichst ein und dasselbe Trägheitsmoment (sämmtlicher Zink- oder Messingcylinder). Darunter finden sich für Eisen und Messing die spec. Gewichte eingezeichnet. (Fig. 3 und 4).

Allerdings zeigt z. B. die erste Curve für die Reihe I der Eisendrähte einen regelmässigen Verlauf, indem mit zunehmendem Querschnitt die Torsionsmoduln erst wachsen und dann abnehmen. Das Wachsen findet statt bei dem schwedischen Stabeisen, das Abnehmen bei dem steyrischen Holzkohleneisen. Aber die übrigen Curven lassen solche Regelmässigkeiten vermissen.

Einiges Gewicht ist vielleicht auf den Umstand zu legen, dass in Curve 1 und 2 das spec. Gewicht einen ähnlichen Gang verfolgt wie die Elasticität, sodass die letztere durch eine Verdichtung erhöht zu werden scheint.

Jedenfalls darf man Folgendes schliessen:

1) Durch das Ziehen werden die Drähte in ihrer Dichte und noch mehr in ihrer Elasticität geändert. Eine bessere Uebereinstimmung ist auf dem eingeschlagenen Wege nicht zu erreichen. Das Coulomb'sche Gesetz ist ein ideal richtiges, aber von einer praktischen Giltigkeit und von einem Nachweise innerhalb der Beobachtungsfehler kann nicht die Rede sein.

2) Auch die Spannung scheint nach den Ergebnissen der feinsten Eisen- und Messingdrähte nicht ganz ohne Einfluss zu sein.

3) Die geglühten Drähte scheinen eine grössere Dichte und Torsionselasticität zu besitzen als die ungeglühten, (während ihre Tragkraft bedeutend kleiner ist).

4) Es folgt ferner, dass die Verschiedenheit des Materials selbst in einem und demselben Drahtstücke Schwankungen des Torsionsmoduls veranlasst. Schon Coulomb sagt übrigens p. 261 der citirten Abhandlung:

„Die Untersuchung zeigt viele Unregelmässigkeiten in den Resultaten: zwei Spulen desselben Drahtes und derselben Nummer geben nicht immer dieselbe Kraft bei gleichem Torsionswinkel, was nur der Herstellungsart der Drähte zugeschrieben werden kann, dem grösseren oder geringeren Drucke, den sie erleiden, wenn sie das Loch des Zieheisens passiren, dem Ausglühen, das man ihnen gibt, um allmählich den Durchmesser von Nummer zu Nummer zu bringen."

5) Als Mittelwerth des Torsionsmoduls würde nach den Tabellen zu setzen sein:

	$\frac{kg}{qmm}$		$\frac{kg}{qmm}$
Eisen, weich . .	8100	Messing, weich . .	3600
Eisen, hart . .	7800—7900	Messing, hart . .	3500
Kupfer, hart . .	4450	Silber, hart . . .	2650

Aenderung der Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement.

Von den Angaben der Tabellen habe ich noch kurz diejenigen über die Aenderung der Schwingungsdauer oder Directionskraft eines Drahtes bei längerer Belastung und das logarithmische Decrement zu besprechen.

„Die Schwingungsdauer der harten und weichen Drähte nimmt im allgemeinen mit wachsender Zeit für die Dauer der Belastung ab, ob nun der Draht in der Zwischenzeit Schwingungen vollführte oder nur belastet blieb und zu der zweiten Beobachtung wiederum tordirt wurde.“

Die Belege für diesen Satz finden sich in den Tabellen. Nur in ein paar Fällen ist nicht zu entscheiden, ob nicht die Aenderungen eine Folge der Temperaturdifferenz bei den Beobachtungen sind.

Warburg[1]) fand an einem ausgeglühten Kupferdrahte, dass die Schwingungsdauer abhängig ist von der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit, und zwar mit wachsender Zeit abnehmend, einerlei ob die Spannungsänderung in einer Zunahme oder Abnahme der Spannung bestand.

In der Abhandlung von F. Kohlrausch und F. E. Loomis[2]) heisst es, dass die Schwingungsdauer bei derselben Temperatur von einem auf den anderen Tag kleinen Aenderungen unterworfen zu sein scheint.

Der oben ausgesprochene Satz gilt aber für weiche Eisen- und Messingdrähte nur bis zu bestimmten Belastungen. Von einer gewissen Grösse der Belastung an nimmt bei den weichen Drähten die Schwingungsdauer nach längerer Belastungszeit zu, die Torsionskraft also ab, auch ohne dass nach

1) Warburg, Abhandl. der naturf. Gesellsch. Freiburg i. B., 1879. p. 451.

2) F. Kohlrausch u. F. E. Loomis, Pogg. Ann. **141.** p. 497. 1870.

dem Versuche bleibende Dimensionsänderungen des Drahtes zu verzeichnen sind. Diese Zunahme in t erfolgt schon bei Belastungen, die nicht die Hälfte der wahrscheinlichen Maximalbelastung erreichen; in wie weit hier die Elasticitätsgrenze in Betracht kommt, ist aus den wenigen Versuchen für weiche Drähte nicht zu ersehen.

Eine Elasticitätsänderung anderer Art zeigt F. Kohlrausch[1]): Die Schwingungsdauer eines ausgeglühten Eisendrahtes konnte dadurch, dass das Gewicht in sehr stark drehende Bewegungen versetzt worden war, von 6,256 auf 6,411 Sec. gebracht werden. Aus den in den Tabellen angegebenen Amplituden ist zu ersehen, dass solche gewaltsame Einflüsse auf meine Drähte nicht ausgeübt wurden.

Dämpfung. In den Tabellen bedeutet λ das arithmetische Mittel aus den mit 10^5 multiplicirten Werthen der logarithmischen Decremente zweier aufeinander folgender Schwingungsbogen vor und nach den Durchgangsbeobachtungen gerechnet in Brigg'schen Logarithmen.

Die Zahl der aufgeführten Werthe λ ist eine geringe, da bei kleinen Amplituden kein regelmässiges Decrement zu Stande kam, und oftmals die Wanderung des Nullpunktes auf der Scala eine bedeutende war, ausserdem aber nur die zuverlässigen Werthe eingetragen sind. Die Decremente sind bis auf etwa eine Einheit der vierten Decimalstelle genau. Die zum Vergleiche der Werthe λ untereinander nöthigen Daten sind in den Tafeln enthalten. In den meisten Fällen erklären die von Streintz[2]) gegebenen Sätze die Aenderungen der logarith. Decremente.

Bei grösseren Amplituden mit steigender Belastung scheint die Dämpfung zuzunehmen. Die Decremente für die geglühten Eisendrähte sind zu wenige, um gegenüber den für die harten Drähte gefundenen in Betracht kommen zu können.

---

1) F. Kohlrausch, Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion, Inaug.-Dissert., Göttingen 1863 p. 40.

2) Streintz, Wien. Ber. (2) **69.** p. 337. 1874. Wien. Ber. (2) **80.** p. 190. 1879.

Elasticitätsmodul aus Längenausdehnungen und Cohäsion der Metalldrähte.

Die Bestimmungen des Elasticitätsmoduls aus Längenausdehnungen wurden versucht, um wo möglich Verschiedenheiten im elastischen Verhalten verschieden dicker Drähte für beide Arten der Elasticität zu constatiren und damit den Werth der Zahl μ, des Verhältnisses der Quercontraction zur Längendilatation bei der Spannung eines Drahtes aufzufinden. Da Beobachtungsreihen für so feine Drähte wohl nicht zahlreich vorliegen, gebe ich die Resultate.

Um Torsionsschwingungen der feinen Drähte zu vermeiden, tauchte eine in die Schale eingeschraubte Blechfahne in ein Wasserbad. Die Messungen geschahen am Kathetometer mit Mikroskop, das bis auf 0,02 mm abzulesen gestattete. Die in Betracht kommende Länge des zu untersuchenden Drahtes betrug ein Meter. Vor den Versuchen wurden die Drähte längere Zeit belastet. Die beiden Marken zur Ablesung wurden an den Drähten entweder durch zarte Striche von weisser und rother Oelfarbe aufgetragen, auf deren Berührungslinie das Fadenkreuz eingestellt wurde, oder es war auf den Eisendrähten Kupfer niedergeschlagen und in dieses die Marke eingeritzt worden.

Durch die Beobachtungsfehler ist natürlich hier eine bedeutende Unsicherheit der Resultate bedingt; für den Eisendraht verursacht ein Fehler von 0,03 mm in der Verlängerung eine Unsicherheit im Elasticitätsmodul bis zu 9 Proc. Dazu kommt die elastische Nachwirkung, die besonders beim Messing störend auftritt. Wertheim hat bekanntlich diese nicht berücksichtigt.

Die Zahlenwerthe der Versuche, die wenigstens eben so genau wie die der Wertheim'schen Originalversuche sein dürften, werden in folgender Tafel aufgeführt. Der Elasticitätsmodul E wurde in gewöhnlicher Weise berechnet. Der Querschnitt wurde bestimmt aus der Masse der Längeneinheit und dem specifischen Gewichte. Die theoretische Relation zwischen dem Elasticitätsmodul E, der Ausdehnung

und dem Modul T der Torsionselasticität, aus der die Zahl μ berechnet werden kann, lautet ferner: $T = \frac{1}{2} E / (1 + \mu)$.

Tab. XI. Elasticitätsmoduln der Ausdehnung für 20°.

Durchmesser	ε	T	μ	Durchmesser	ε	T	μ
Eisen, 1. Reihe				Eisen, 2. Reihe			
1,23 mm	19800	7420	0,33	0,30 mm	19400	7400	0,31
1,01 „	19400	7880	0,23	0,25 „	21500	8160	0,32
0,72 „	20800	8280	0,25	0,11 „	21900	7680	0,42
0,50 „	20400	8220	0,23	0,09 „	21000	7960	0,32
0,20 „	20100	7540	0,33	Messing			
Eisen, 2. Reihe				1,00 mm	9540	3550	0,34
0,30 mm				0,75 „	9720	3480	0,39
0,25 „				0,10 „	10540	3500	0,50

Die Resultate sind zu variabel, um bestimmte Schlüsse aus ihnen zu ziehen. Die Verhältnisszahl μ liegt zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$; ich hatte sie für die Reductionen der Torsionsmoduln auf die Belastung 0 kg $= \frac{1}{3}$ angenommen.

Schliesslich sei noch einiges über die Cohäsion der gebrauchten Metalldrähte angeführt. Die Versuche, welche ich gelegentlich über die Festigkeit der Drähte an der für die Längenausdehnungen getroffenen Vorrichtung durch allmähliches Auflegen von Gewichten anstellte, wurden veranlasst durch das Verhalten der zwei feinsten Eisendrähte; beide erwiesen sich beim Verbiegen und Dehnen widerstandsfähiger als andere feine Drähte. Ihre Tragfähigkeit ergab das $1\frac{1}{2}$-fache der anderen Nummern, und ich glaubte, daraus entnehmen zu können, dass diese zwei Drähte durch den Process des Hartziehens zu guten Stahldrähten geworden waren.

Die Versuche mit ausgeglühten Drähten ergaben ungefähr halb so grosse Werthe p wie die für gleich dicke, harte Drähte. Nach den bedeutenden Verlängerungen, die hier bei zunehmender Spannung auftraten, erwiesen sich aber die Drähte unter dem Mikroskope rauh und an vielen Stellen gekerbt, sodass alsdann weitere Querschnittsbestimmungen

nicht mehr vorzunehmen waren. (Ueber Versuche mit ausgeglühten Drähten siehe Bottomley.[1]))

In der Tabelle sind die für harte Drähte gewonnenen Zahlen aufgeführt. Diese, wie auch die von Coulomb[2]) angegebenen Werthe für die Tragfähigkeit seiner Drähte, bestätigen, dass die Zerreissungsfestigkeit eines Drahtes, auf gleiche Querschnittsfläche reducirt, desto grösser sich herausstellt, je feiner derselbe ausgezogen wurde[3]), und wie misslich ferner die Schätzung der Tragkraft eines Drahtes nach den vorhandenen Versuchen über Festigkeit von Drähten stets sein wird.

Tab. XII. Tragfestigkeit.

Hart	*d*	*p*	Hart	*d*	*p*
	mm	kg/qmm		mm	kg/qmm
Schwed. Stabeisen	0,72	64	Messing . . .	0,75	76
1. Reihe	0,50	83		0,25	98
Steyr. Holzkohleneisen	0,40	86		0,18	93
	0,27	88		0,10	98
	0,20	94	Kupfer	0,27	35
Schwed. Stabeisen	0,30	96			
2. Reihe	0,25	94	Silber	0,35	30
	0,20	94			
	0,15	98			
	0,12	94			
	0,11	137			
	0,10	123			

Würzburg, Physikal. Inst., Juli 1882.[4])

1) Bottomley, Proc. Roy. Soc. **29.** p. 221. 1879. Beibl. **4.** p. 242.

2) Coulomb, Mém. de l'Acad. d. Sc. 1784. p. 237. u. 239.

3) Vgl. Karmarsch, Pol. C.-Bl. 1859. p. 1272.

4) Herr Dr. Baumeister ist kurz vor Vollendung des Druckes in San Remo gestorben. Die Red.

V. *Thermochemische Untersuchungen;* *von Eilhard Wiedemann.*

Ueber die Molecularwärme von Lösungen.

Für die Lösungen von festen Körpern in Wasser und anderen Flüssigkeiten kann man ebenso wie für die Körper selbst eine Molecularwärme berechnen.

Kommen nämlich auf ein Molecül Salz mit dem Moleculargewicht M n Molecüle Lösungsmittel mit dem Moleculargewicht m, ist c die specifische Wärme der Lösung, so kann man:

$$c(M + mn)$$

als die Molecularwärme der Lösung auffassen und etwa wenn γ die specifische Wärme des Lösungsmittels ist, $mn\gamma$ als die Molecularwärme desselben in der vorliegenden Lösung bezeichnen.

Die specifische Wärme wässeriger Lösungen ist kleiner als eins und wir können setzen:

$$c = 1 - \chi,$$

wo $\chi < 1$ ist.

Ferner ist hier $m = 18$ und die Molecularwärme der Lösung wird:

$$(1 - \chi)(M + 18n).$$

Man hat vielfach untersucht, ob die Molecularwärme der Lösung $(1 - \chi)(M + 18n)$ grösser oder kleiner als diejenige des darin enthaltenen Wassers $18.n$ ist, also ob in der Gleichung:

$$(1 - \chi)(M + 18.n) = 18n + \alpha,$$

der Werth:

$$\alpha = M - \chi(M - 18n), \tag{1}$$

d. h. der Unterschied der beiden Molecularwärmen grösser, gleich oder kleiner als Null wird.

In der folgenden Tabelle[1]) sind für einige Salze, Natriumchlorid, Ammoniumsulfat, Natriumsulfat und Natriumnitrat

1) J. Thomsen, Pogg. Ann. **142.** p. 337. 1871.

die Werthe der hier in Betracht kommenden Grössen zusammengestellt.

n	c	$M + n18$	$c(M+n18)$	α	χ	$\chi(M+n18)$
			Natriumchlorid $NaCl + H_2O$.			
10	0,791	58,5+ 180	188,5	+ 8,5	0,209	49,84
20	0,863	58,5+ 360	361,0	+ 1,0	0,137	57,32
30	0,895	58,5+ 540	536	− 4	0,105	62,84
50	0,931	58,5+ 900	892	− 8	0,069	66,14
100	0,962	58,5+1800	1788	−12	0,038	70,60
200	0,978	58,5+3600	3578	−22	0,022	80,47
			Ammoniumsulfat $(NH_4)_2SO_4 + nH_2O$.			
30	0,820	132+ 540	551	+11	0,180	120,0
50	0,871	132+ 900	899	− 1	0,129	133,1
100	0,924	132+1800	1785	−15	0,076	145,8
200	0,959	132+3600	2576	−21	0,041	153,0
			Natriumsulfat $(Na_2 . SO_4 + nH_2O$.			
65	0,892	142+1170	1170	0	0,108	141,7
100	0,920	142+1800	1187	−13	0,080	155,4
200	0,955	142+3600	3574	−26	0,045	168,4
			Natriumnitrat.			
10	0,769	85+ 180	203,8	+23,8	0,231	61,21
25	0,863	85+ 450	461,7	+11,7	0,137	73,30
50	0,918	85+ 909	904	+4	0,082	81,51
100	0,950	85+1800	1791	−9	0,050	94,25
200	0,975	85+5600	3593	−7	0,025	92,10

Bei diesen und allen sonst bisher untersuchten Substanzen nimmt α mit abnehmender Concentration ab. Dass dieser Gang des Werthes α nichts Ueberraschendes hat, möge die folgende Betrachtung zeigen.

Ist $n = 0$, haben wir also reines Salz, so wird α positiv, da dann $\alpha = M - \chi M$, und die specifische Wärme $(1 - \chi)$

eine positive Grösse ist. Dasselbe ist für sehr kleine Werthe von n, also sehr concentrirte Lösungen der Fall.

Ob für grosse n d. h. verdünnte Lösungen α positiv oder negativ wird, hängt von der Art der Veränderung von χ mit n ab. Nimmt χ langsamer ab, als n anwächst, so muss α negativ werden, da dann das Glied $18n\chi$ mehr und mehr zunimmt. Dies ist aber bei allen Salzlösungen für niedrige Concentrationen der Fall, da sich ihre specifische Wärme asymptotisch derjenigen des Wassers, also χ asymptotisch der Null nähert.

Bei grossen Concentrationen ist demnach α positiv und nähert sich bei wachsender Verdünnung allmählich der Null, um dann negativ zu werden.

Die Molecularwärme der Lösung ist daher bei grossen Concentrationen grösser, bei kleineren kleiner und bei mittleren gleich derjenigen des Wassers in der Lösung.

Der Werth $\alpha =$ Null tritt nach der Gleichung (1) ein, sobald:

$$M = \chi(M + 18\,n).$$

Das heisst mit anderen Worten: Soll die Molecularwärme einer Lösung gleich derjenigen des in ihr enthaltenen Wassers sein, so muss die Abweichung χ der specifischen Wärme der Lösung von der Einheit, multiplicirt mit dem Moleculargewicht $(M + 18n)$ der Lösung, gleich dem Moleculargewicht M des Salzes sein.

Diese Relation bestätigen die Versuche, wie die Vergleichung der Zahlen unter M und $\chi(M + 18n)$ in der Tabelle ersehen lässt. Für Natriumchlorid $M = 58{,}5$ wird $\alpha = 0$ für einen Werth von $\chi(M + 18n)$, der zwischen 57,3 und 62,84 liegt, für Ammoniumsulfat $(M = 132)$ für einen solchen zwischen 120 und 133,1, für Natriumsulfat $(M = 142)$ ist $\alpha = 0$ für $\chi(M + 18n) = 141{,}7$, für Natriumnitrat $(M = 85)$ ist $\alpha = 0$, für $\chi\,(M + 18\,n)$ zwischen 81,57 und 94,25.

Eine Bestimmung der Grösse α hat indess nur untergeordneten Werth, da alle Fehler, in der Bestimmung der specifischen Wärme c $(M + 18n)$ mal vergrössert in α eintreten.

Wir könnten auch folgende Betrachtungen anstellen.

Salz und Wasser mögen mit den ihnen im freien Zustande zukommenden specifischen Wärmen γ, wo $\gamma < 1$, und 1 in die Lösung eintreten. Sind dann x Theile Salz, $1 - x$ Theile Wasser in der Gewichtseinheit Lösung vorhanden, und ist deren specifische Wärme C, so ist:

$$C = 1\,(1 - x) + \gamma x = 1\,\delta \quad \text{oder} \quad \gamma = 1 - \frac{\delta}{x}\cdot$$

Soll γ einen constanten Werth erhalten, so muss δ proportional mit x wachsen. Dies ist aber nach den Versuchen nicht der Fall.

Das Salz kann also nicht in seinem ursprünglichen Zustande in der Lösung vorhanden sein, sondern ist wahrscheinlich locker an Wassermolecüle gebunden. Die zu der Aufhebung dieser Bindung bei einer Temperaturerhöhung nöthigen Wärmemengen treten in C mit ein.

Diese Bindung ist bei concentrirten Lösungen eine andere als bei verdünnten, wie unter anderen die Versuche über Endosmose von Hrn. Pfeffer[1]) zeigten. Berücksichtigt muss auch werden, dass die Salze meist nicht als Anhydride, sondern als Hydrate in den Lösungen enthalten sind und dass concentrirte Lösungen neben Hydrat noch wasserfreies Salz enthalten können. Da dies auch für einige der von Hrn. Volkmann[2]) auf ihre Capillarität untersuchten Salze wie Natriumsulfat, Chlorcalcium mit grosser Bestimmtheit nachgewiesen ist, so ist dessen Verfahren, aus den Capillaritätsconstanten der Lösungen diejenigen der wasserfreien Salze selbst zu berechnen, nicht zulässig.

Wenn Hr. Volkmann nichtsdestoweniger eine Uebereinstimmung zwischen den Beobachtungen und seiner Theorie findet, so dürfte dies an der Art seiner Betrachtungsweise liegen.

Sind nämlich zwei Flüssigkeiten mit den Cohäsionen α_1 und α_2 so gemischt, dass in der Volumeneinheit der Volu-

1) W. Pfeffer, Beibl. 2. p. 190.

2) Volkmann, Wied. Ann. 17. p. 353. 1882.

mentheil u_1 der Flüssigkeit I, der Volumentheil u_2 der Flüssigkeit II zukommt, so ist nach Poisson die Cohäsion des Gemisches:

$$\alpha = u_1^2 \alpha_1 + 2 u_1 u_2 \alpha_{12} + u_2^2 \alpha_2 .$$

α_{12} soll hierbei ein Maass der Anziehung der Theilchen der Flüssigkeit I auf die Theilchen der Flüssigkeit II darstellen.

Bei Salzlösungen wird α_1 gleich den beobachteten Werthe bei Wasser gesetzt und α_2 und α_{12} aus höchstens sechs, meist aber weniger Bestimmungen von α bei verschiedenen Werthen von u_1 und u_2 ermittelt. Da die Werthe von u_1, für welche die Beobachtungen angestellt wurden, ziemlich nahe aneinander liegen, so muss eine derartige quadratische Gleichung, wie die obige, stets innerhalb der Beobachtungsfehler die direct gefundenen Zahlen befriedigend wiedergeben.

Noch möchte ich bemerken, dass die von Hrn. Volkmann angeführte Thatsache, dass bei Kaliumnitrat mit zunehmender Concentration die Reibungscoëfficienten erst ab- und dann zunehmen, was übrigens zuerst von Girard i. J. 1816 beobachtet wurde, durchaus nicht vereinzelt dasteht, sondern dasselbe nach Untersuchungen von Hrn. Sprung[1]) in dem hiesigen phys.-chemischen Laboratorium bei einer ganzen Gruppe von Salzen stattfindet, so bei dem Chlorkalium, Chlorammonium u. a. m.

Dieselben Betrachtungen über die specifische Wärme, wie für Lösungen in Wasser, lassen sich auch auf solche in Schwefelkohlenstoff übertragen.

Hier ist die oben betrachtete Differenz α, so weit die Versuche reichen, positiv, indess zeigt sie meist eine Abnahme. Die früher betrachteten Grössen χ sind hier sehr klein und gehört daher schon ein sehr grosses n dazu, um ein negatives α zu erzeugen.

---

1) Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

VI. *Ueber die Newton'schen Staubringe; von E. Lommel.*

Schon vor einiger Zeit hat Hr. K. Exner eine Abhandlung[1]) veröffentlicht, in welcher er die von mir aufgestellte Theorie der Newton'schen Staubringe[2]) bekämpft. Ich begnügte mich damals damit, gelegentlich auszusprechen[3]), dass diese Theorie von Hrn. Exner mit Unrecht bestritten wird. Da aber Hr. Exner auch neuerdings[4]) fortfährt zu behaupten, dass er „meine Theorie widerlegt[5])," „die Fehler in meinen Rechnungen, sowie die Unrichtigkeit meiner schliesslichen Formeln dargelegt" habe, so sehe ich mich doch veranlasst, diesen grundlosen Behauptungen ein definitives Ende zu machen.

Nach meiner Theorie wird die Excursion in einem Punkte des Interferenzbildes, welches durch zwei hinter einander aufgestellte beugende Schirme (oder durch einen Schirm und sein Spiegelbild) hervorgebracht wird, ausgedrückt durch die Formel:

$$E = E_1 + E_2$$

$$= \tfrac{1}{2} n \int\int \sin(p - qx - ry + sz)\,dx\,dy + \tfrac{1}{2} n \int\int \sin(p - qx - ry - sz)\,dx\,dy,$$

wo jedes der beiden Doppelintegrale über alle jene Theile des zugehörigen Schirmes auszudehnen ist, welche Licht durchlassen, und zur Abkürzung:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt - k) = p\,, \qquad \frac{2\pi}{\lambda}(l - a) = q\,,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(m - b) = r\,, \qquad \frac{2\pi}{\lambda}(n - c) = s\,,$$

gesetzt wurde, während l, m, n die Richtungscosinus der einfallenden, a, b, c die der gebeugten Strahlen bedeuten, und k

1) Exner, Wied. Ann. **9.** p. 239. **11.** p. 218. 1880.

2) Lommel, Wied. Ann. **8.** p. 204. 1879.

3) Lommel, Carl's Rep. **16.** p. 455. Anmerk. 1880.

4) Exner, Wied. Ann. **17.** p. 159. 1882.

5) Hr. Exner erklärt sogar in der Vorrede des von ihm herausgegebenen Werkes von Verdet: „Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes" (Braunschweig, 1881), dass meine Theorie dieser Erscheinungen „vollständig widerlegt" sei.

die Entfernung des Coordinatenanfangs vom Vereinigungspunkt der einfallenden Strahlen oder den Radius der halbkugelförmigen Bildfläche darstellt.

Der Factor $\frac{1}{2}$ bezieht sich nur auf die direct durchgehenden Strahlen und muss hinzugefügt werden, damit nicht jeder direct einfallende Strahl doppelt gezählt werde. Bei den gebeugten Strahlen hat er wegzufallen; in den betreffenden Formeln meiner Abhandlung ist er aus Versehen stehen geblieben, was jedoch für die Theorie selbst ohne Belang ist.

Besteht der vor dem Spiegel befindliche Schirm aus kleinen undurchsichtigen Körperchen, so haben wir also nach Anwendung des Babinet'schen Princips für das gebeugte Licht:

$$E = E_1 + E_2$$
$$= -n\iint \sin(p - qx - ry + sz)\,dx\,dy - n\iint \sin(p - qx - ry - sz)\,dx\,dy,$$

wo nun die Doppelintegrale über die Projectionen sämmtlicher beugender Körperchen auf die Spiegelebene zu nehmen sind.

Sind x_ν, y_ν, z_ν die Coordinaten eines bestimmten Punktes (z. B. des Mittelpunktes) eines der Körperchen, und setzen wir:

$$x = x_\nu + x_\nu', \qquad y = y_\nu + y_\nu',$$

sodass nun die laufenden Coordinaten x_ν' und y_ν' in der xy-Ebene für jedes Körperchen von dem Punkte x_ν, y_ν zu zählen sind, wobei z unverändert $= z_\nu$ bleibt, so hat man:

$$E = E_1 + E_2$$
$$= -n\Sigma\iint \sin(p - qx_\nu' - ry_\nu' - qx_\nu - ry_\nu + sz_\nu)\,dx_\nu'dy_\nu'$$
$$-n\Sigma\iint \sin(p - qx_\nu' - ry_\nu' - qx_\nu - ry_\nu - sz_\nu)\,dx_\nu'dy_\nu',$$

wo die Summenzeichen Σ sich über alle vorhandenen Werthe des Index ν erstrecken.

Da die beiden Doppelintegrale unter den gemachten Voraussetzungen die gleichen Grenzen haben, so kann man dieselben zu einem einzigen Doppelintegral vereinigen, indem man die Wirkung eines jeden Körperchens mit derjenigen seines Spiegelbildes zusammenfasst. Man erhält so:

$$E = -2n\Sigma\cos sz_\nu\iint \sin(p - qx_\nu' - ry_\nu' - qx_\nu - ry_\nu)\,dx_\nu'dy_\nu',$$

oder, wenn man:

$$\iint \cos(qx_\nu' + ry_\nu')\, dx_\nu' dy_\nu' = C_\nu,$$

$$\iint \sin(qx_\nu' + ry_\nu')\, dx_\nu' dy_\nu' = S_\nu,$$

und: $qx_\nu + ry_\nu = \alpha_\nu$ setzt:

$$E = -2n \sin p\,(\Sigma C_\nu \cos sz_\nu \cos\alpha_\nu - \Sigma S_\nu \cos sz_\nu \sin\alpha_\nu)$$
$$+ 2n\cos p\,(\Sigma S_\nu \cos sz_\nu \cos\alpha_\nu + \Sigma C_\nu \cos sz_\nu \sin\alpha_\nu)$$

Sind sämmtliche Schirmchen oder Körperchen unter sich gleich und ähnlich gelagert, so sind alle C_ν einander gleich ($= C$), ebenso alle S_ν ($= S$); setzt man ferner:

$$\Sigma \cos sz_\nu \cos\alpha_\nu = \gamma, \qquad \Sigma \cos sz_\nu \sin\alpha_\nu = \sigma,$$

so hat man:

$$E = -2n \sin p\,(C\gamma - S\sigma) + 2n\cos p\,(S\gamma + C\sigma);$$

hieraus ergibt sich sofort die Intensität in einem beliebigen Punkte des Bildes:

$$M^2 = 4n^2 (C^2 + S^2)(\gamma^2 + \sigma^2),$$

wo $C^2 + S^2$ der Intensitätsausdruck für ein einziges Schirmchen ist. Besitzen die Projectionen der Körperchen einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten alsdann x_ν, y_ν sind, so ist das Doppelintegral $S = 0$, weil es sich über eine Figur erstreckt, in deren Mittelpunkt seine Coordinaten anfangen und sich deshalb seine Elemente paarweise gegenseitig aufheben. Man hat alsdann noch einfacher:

$$M^2 = 4n^2 C^2 (\gamma^2 + \sigma^2).$$

Hierin ist:

$$\gamma^2 + \sigma^2 = \Sigma\Sigma \cos sz_\nu \cos sz_\mu \cos\alpha_\nu \cos\alpha_\mu$$
$$+ \Sigma\Sigma \cos sz_\nu \cos sz_\mu \sin\alpha_\nu \sin\alpha_\mu$$
$$= \Sigma\Sigma \cos sz_\nu \cos sz_\mu \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu).$$

Ist h die Anzahl der vorhandenen Körperchen, so besteht diese Doppelsumme aus h^2 Gliedern, welche sich aus dem allgemeinen Gliede ergeben, wenn man in demselben statt der Indices ν, μ alle Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis h einsetzt. Sondert man die h Glieder, in welchen $\mu = \nu$ ist, von den $h(h-1)$ übrigen ab und bedenkt, dass von den letzteren je zwei einander gleich sind, so kann man auch schreiben:

$$\gamma^2 + \sigma^2 = \Sigma \cos^2 sz_\nu + 2\Sigma\Sigma \cos sz_\nu \cos sz_\mu \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu),$$

wo in der Doppelsumme als Indices ν, μ die Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis h zu nehmen sind.

Nimmt man mit Verdet an, dass die letztere Summe, welche aus zahlreichen Gliedern besteht, deren Werthe zwischen -1 und $+1$ unregelmässig vertheilt sind, gegenüber der ersteren, welche aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzt ist, als verschwindend klein anzusehen sei, so kann man statt $\gamma^2 + \sigma^2$ setzen:

$$\Sigma \cos^2 s z_\nu = \tfrac{1}{2} \Sigma (1 + \cos 2 s z_\nu).$$

Diese Summe kann, wie ich früher[1]) gezeigt habe, wenn e_1 die kleinste, e_2 die grösste vorkommende Entfernung der beugenden Körperchen vom Spiegel bedeutet, und zu jeder Entfernung z_ν gleichviele solche Körperchen gehören (was der Fall ist, wenn die Körperchen auf einem Rechteck gleichmässig ausgebreitet sind oder einen zur Spiegelebene senkrecht stehenden cylinderförmigen Raum mit zur Spiegelebene parallelen Grundflächen gleichmässig erfüllen), genähert durch das bestimmte Integral:

$$\frac{h}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} (1 + \cos 2 s z)\, dz = h \left(1 + \frac{\sin s (e_2 - e_1)}{s (e_2 - e_1)} \cos s (e_2 + e_1)\right),$$

ersetzt werden. Es ergibt sich also, wenn die mittlere Entfernung der Körpertheilchen vom Spiegel:

$$\frac{e_2 - e_1}{2} = e$$

gesetzt wird, die näherungsweise gültige Intensitätsgleichung:

$$M^2 = 2 n^2 h C^2 \left(1 + \frac{\sin s (e_2 - e_1)}{s (e_2 - e_1)} \cos 2 s e\right).$$

Zu demselben Ausdruck gelangt auch Hr. Exner. Abgesehen von dem Factor C^2, welcher die Intensität des von einem einzigen Körpertheilchen hervorgebrachten Beugungsbildes darstellt, ergibt sich der nämliche Ausdruck auch aus der Annahme, dass Interferenz nur zwischen den an einem und demselben Körperchen vor und nach der Spiegelung diffus reflectirten (nicht gebeugten) Lichtstrahlen stattfinde, und die

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 200 1879.

Gesammterscheinung durch Uebereinanderlagerung der einzelnen elementaren Ringsysteme, d. i. durch Summation der Intensitäten der unter sich incohärenten Strahlenbündel entstehe (Diffusionstheorie).

Da sonach Diffusions- und Beugungstheorie das gleiche Verhalten der Staubringe und insbesondere deren Engerwerden fordern, wenn die bestäubte Platte aus der zum Spiegel parallelen Lage in eine geneigte Lage übergeht, so kann aus diesem Verhalten eine Entscheidung zwischen beiden Theorien nicht hergeleitet werden. Der Versuch, den ich hierzu machte[1]), ist daher nicht stichhaltig. Derselbe stützte sich auf ein Beobachtungsresultat, welches ich seitdem als unrichtig erkannt habe; die Ringe behalten nämlich nicht, wie ich damals gefunden hatte, beim Drehen der Staubplatte aus der parallelen in die geneigte Lage die gleichen Durchmesser, sondern sie ziehen sich zusammen, ganz in der Weise, wie Hr. Exner angibt. Die Fehlerquelle, welche jenes unrichtige Resultat verschuldete, vermag ich gegenwärtig mit Sicherheit nicht mehr zu eruiren.

In diesem, ein Beobachtungsresultat betreffenden Punkte hat also Hr. Exner recht. Nicht so in den übrigen, die Theorie betreffenden Punkten.

Von der Grundformel E meiner Theorie ausgehend, kann man entweder, wie es oben geschehen ist, zuerst die Wirkung eines jeden Schirmchens mit derjenigen seines Spiegelbildes zusammenfassen und dann erst die Wirkungen sämmtlicher Paare vereinigen; oder man kann die Resultanten E_1 und E_2 für den ganzen Schirm und sein Spiegelbild zuerst berechnen und dann diese beiden Resultanten zusammensetzen. Das erstere Verfahren ist nur dann durchführbar, wenn die Grenzen der beiden Doppelintegrale E_1 und E_2 als einander gleich angenommen werden können, was namentlich bei einer aus kleinen Körpertheilchen bestehenden unregelmässigen Bestäubung erlaubt ist. Das zweite Verfahren dagegen ist allgemein anwendbar; es gilt für alle Erscheinungen, welche ich unter der Bezeichnung „Interferenz des gebeugten Lichtes“

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 194—204. 1879.

zusammengefasst habe. Die Grenzen jener beiden Doppelintegrale sind nämlich im allgemeinen voneinander verschieden[1]), eine Verschiedenheit, welche bei regelmässiger Anordnung der Schirmchen, z. B. wenn ein Gitter sich vor einem Spiegel befindet, nicht ausser acht gelassen werden darf. Sollte die Theorie auch diese Erscheinungen umfassen, so musste schon aus diesem Grunde dem letzten Verfahren der Vorzug gegeben werden.

Da es beim Bilden einer Summe gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge deren Glieder addirt werden, so muss das zweite Verfahren nothwendig zu dem nämlichen Resultat führen wie das erste. Es zeichnet sich vor diesem aber dadurch aus, dass es einen klareren Einblick in das Wesen der Erscheinung gestattet.

Nehmen wir an, dass die beugenden Körperchen in einer Ebene liegen, sodass ihre Coordinaten x_ν, y_ν, z_ν der Gleichung:

$$z_\nu = e + f x_\nu + g y_\nu$$

genügen, so sind, wenn wir die oben eingeführten Bezeichnungen beibehalten:

$$E_1 = -n \Sigma \iint \sin(p - q x_\nu' - r y_\nu' - (q - fs) x_\nu - (r - gs) y_\nu + se)\, dx_\nu'\, dy_\nu'.$$

$$E_2 = -n \Sigma \iint \sin(p - q x_\nu' - r y_\nu' - (q + fs) x_\nu - (r + gs) y_\nu - se)\, dx_\nu'\, dy_\nu'$$

die resultirenden Excursionen der von dem ersten und zweiten Schirm (resp. dem Spiegelbild des ersten) nach irgend einer Richtung gebeugten Strahlen. Man kann diese Resultanten leicht in die Form:

$$E_1 = -n \sqrt{C_1^2 + S_1^2} . \sin\left(p + se - \operatorname{arc\,tg} \frac{S_1}{C_1}\right),$$

$$E_2 = -n \sqrt{C_2^2 + S_2^2} . \sin\left(p - se - \operatorname{arc\,tg} \frac{S_2}{C_2}\right)$$

bringen, wo:

$$C_1 = \Sigma_1' \iint \cos(q x_\nu' + r y_\nu' + q_1 x_\nu + r_1 y_\nu)\, dx_\nu'\, dy_\nu',$$

$$S_1 = \Sigma_1' \iint \sin(q x_\nu' + r y_\nu' + q_1 x_\nu + r_1 y_\nu)\, dx_\nu'\, dy_\nu'$$

ist, und C_2, S_2 sich von diesen Ausdrücken nur dadurch unterscheiden, dass in letzteren q_2, r_2 resp. an der Stelle von q_1, r_1 stehen, während:

1) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 209. 1879.

$$q - fs = q_1, \qquad q + fs = q_2,$$
$$r - gs = r_1, \qquad r + gs = r_2$$

gesetzt wurde. Nun ist:

$$C_1 = \Sigma \cos(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) \iint \cos(q x_\nu' + r y_\nu')\, dx_\nu' dy_\nu'$$
$$- \Sigma \sin(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) \iint \sin(q x_\nu' + r y_\nu')\, dx_\nu' dy_\nu'$$
$$= \Sigma C_\nu \cos(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) - \Sigma S_\nu \sin(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu)$$

u. s. w. Sind die beugenden Körperchen unter sich gleich und ähnlich gelagert, so sind alle C_ν unter sich gleich $= C$, ebenso alle $S_\nu = S$, und man hat, wenn man:

$$\Sigma \cos(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) = \gamma_1, \qquad \Sigma \cos(q_2 x_\nu + r_2 y_\nu) = \gamma_2,$$
$$\Sigma \sin(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) = \sigma_1, \qquad \Sigma \sin(q_2 x_\nu + r_2 y_\nu) = \sigma_2$$

setzt:

$$C_1 = C\gamma_1 - S\sigma_1, \qquad C_2 = C\gamma_2 - S\sigma_2$$
$$S_1 = C\gamma_1 + C\sigma_1, \qquad S_2 = S\gamma_2 + C\sigma_2.$$

Sind die beugenden Körperchen Kügelchen, und x_ν, y_ν, z_ν die Coordinaten ihrer Mittelpunkte, so ist $S = 0$, und man hat:

$$C_1 = C\gamma_1, \qquad C_2 = C\gamma_2,$$
$$S_1 = C\sigma_1, \qquad S_2 = C\sigma_2;$$

für jene beiden Resultanten erhält man demnach:

$$E_1 = -nC\sqrt{\gamma_1^2 + \sigma_1^2}.\sin\left(p + se - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma_1}{\gamma_1}\right),$$
$$E_2 = -nC\sqrt{\gamma_2^2 + \sigma_2^2}.\sin\left(p - se - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma_2}{\gamma_2}\right).$$

Wählt man nun als Coordinatenanfang die Projection des Mittelpunktes der (z. B. rechteckigen) Bestäubungsfläche auf die Spiegelebene, so ist jede der Summen:

$$\sigma_1 = \Sigma \sin(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu), \qquad \sigma_2 = \Sigma \sin(q_2 x_\nu + r_2 y_\nu)$$

gleich Null, weil, wenn die Bestäubung gleichförmig ist und aus sehr zahlreichen Körperchen besteht, zu jedem Körperchen mit den Coordinaten x_ν, y_ν ein solches mit den Coordinaten $-x_\nu$, $-y_\nu$ vorhanden ist. Man hat daher:

$$E_1 = -nC\gamma_1 \sin(p + se), \qquad E_2 = -nC\gamma_2 \sin(p - se),$$

oder, wenn man N_1 statt $C\gamma_1$ und N_2 statt $C\gamma_2$ schreibt:

$$E_1 = -nN_1 \sin(p + se), \qquad E_2 = -nN_2 \sin(p - se).$$

Nun sind:

$$-\sin(p + se) \quad \text{und:} \quad -\sin(p - se)$$

die gleichzeitigen Excursionen der durch den Mittelpunkt eines jeden der beiden Schirme nach derselben Richtung gebeugten Elementarstrahlen. Es ergibt sich also der Satz, dass der beim Durchgang durch eine gleichmässige Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase hat wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche in derselben Richtung gebeugte Elementarstrahl.

Hr. Exner wendet sich gegen diesen Satz mit folgenden Worten[1]):

„Der Beweis selbst ist nur angedeutet. Ich kann also den Fehler in demselben nur vermuthen, nicht nachweisen. Doch genügt ein einfaches Beispiel, die Unrichtigkeit dieses Satzes vor Augen zu legen.“

„Nehmen wir einen beugenden Schirm mit zwei punktförmigen Oeffnungen; derselbe besitzt nach Hrn. Lommel's Definition einen Mittelpunkt, welcher in der Mitte zwischen beiden Oeffnungen liegt. Mögen die Lichtstrahlen senkrecht einfallen und der Beugungswinkel so gewählt sein, dass die Wegdifferenz zwischen den von beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahlen einer Wellenlänge gleich sei. Indem sich die beiden Strahlen auf einem unendlich entfernten Schirme oder im Brennpunkte einer Linie treffen, befinden sie sich sowohl untereinander als mit der resultirenden Bewegung in Uebereinstimmung der Phase. Es besteht sonach zwischen dem resultirenden Strahle und dem vom Mittelpunkte des Beugungsschirmes kommenden Strahle eine Phasendifferenz von 180° oder einer halben Schwingungsdauer. Der obige Satz ist also unrichtig.“

So behauptet Hr. Exner. Prüfen wir indess diese Behauptung etwas näher. Ist a der Abstand der beiden punktförmigen Oeffnungen und ψ der Beugungswinkel, also $a \sin \psi$ die Wegdifferenz zwischen den von den beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahlen, so sind, wenn der Kürze wegen die Grösse $2\pi a \sin \psi / \lambda$ mit δ bezeichnet wird:

$$\sin p \qquad \text{und:} \qquad \sin(p + \delta)$$

1) Exner, Wied. Ann. 9. p. 250. 1880.

die Excursionen derselben, und:

$$\sin p + \sin(p + \delta) \qquad \text{oder:} \qquad 2\cos\tfrac{1}{2}\delta \,.\, \sin(p + \tfrac{1}{2}\delta)$$

die Excursion des resultirenden Strahles, während die Excursion des von der Mitte zwischen den beiden Oeffnungen kommenden Elementarstrahles:

$$\sin(p + \tfrac{1}{2}\delta)$$

ist. Der resultirende Strahl und der mittlere Elementarstrahl haben also die nämliche Phase, ihre Phasendifferenz ist unter allen Umständen Null. Der obige Satz ist also richtig und gilt nicht nur für zwei punktförmige Oeffnungen, sondern, wie ich oben nochmals gezeigt habe, für eine mit Mittelpunkt versehene gleichmässige Bestäubung. Er gilt ferner, wie ich früher[1]) dargethan, für alle beugenden Oeffnungen, welche einen Mittelpunkt besitzen, d. h. einen Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt werden, so für das Parallelogramm, für jedes regelmässige Vieleck von gerader Seitenzahl, für den Kreis, die Ellipse u. s. w. Da ich diesen elementaren Satz aus der Theorie der Beugung bei meiner früheren Beweisführung als bekannt voraussetzte, so ist es begreiflich, dass Hr. Exner, dem dieser Satz so völlig unbekannt ist, dass er ihn sogar für unrichtig erklärt, eine Lücke empfand.

Allen Fehlschlüssen, durch welche Hr. Exner sich in seinem Irrthum bestärkt, hier im einzelnen nachzugehen, würde zu wenig Interesse darbieten. Es sei nur erwähnt, dass Hr. Exner, nachdem er die Grenzen, innerhalb welcher der für die Phase des resultirenden Strahles massgebende Punkt beim Vorhandensein von nur zwei Staubtheilchen liegen würde, numerisch berechnet hat, diese Grenzen ohne weiteres auch für die Resultante aus dem Zusammenwirken sämmtlicher zahlloser Staubtheilchen annimmt, und nun die aus diesem Missverständniss sich ergebenden ungeheuerlichen Folgerungen meiner Theorie zur Last legt.[2])

---

1) Lommel, Schlömilch's Zeitsch. **14.** p. 16. 1869.

2) Bei dieser Gelegenheit unternimmt es Hr. Exner, (Wied. Ann. **9.** p. 248. 1880), eine von mir angegebene Gleichung „richtig zu stellen.“ Ich hatte nämlich:

Kehren wir nun zu den obigen Gleichungen:

$E_1 = -nN_1 \sin(p + se), \qquad E_2 = -nN_2 \sin(p - se)$

zurück. Die Aufgabe ist hiermit zurückgeführt auf die Interferenz zweier Strahlen von bekannter Phase, deren Amplituden nN_1 und nN_2 bei schiefer Stellung der Bestäubungsfläche voneinander verschieden sind.

Die Intensität M^2 in irgend einem Punkte des Gesichtsfeldes wird sonach ausgedrückt durch die Formel:

$$M^2 = n^2(N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos 2se) \qquad \text{oder:}$$
$$M^2 = n^2 C^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \cos 2se).$$

Die beiden Amplituden $N_1 = C\gamma_1$ und $N_2 = C\gamma_2$ (bei nahezu senkrechter Incidenz ist der Factor n als Cosinus des Winkels der einfallenden Strahlen mit der Spiegelnormale nur wenig von der Einheit verschieden und kann daher weggelassen werden) haben den Factor C miteinander gemeinschaftlich. Sind die beugenden Körperchen kugelförmig, ihre Projectionen sonach kreisförmig, so ist, wie ich früher gezeigt habe[1]):

$$C = R^2\pi \cdot \frac{J^1_{(z)}}{z}, \qquad \text{wo:} \qquad z = 2\pi R \cdot \frac{\sin\psi}{\lambda}$$

gesetzt ist, R den Radius eines Kügelchens, ψ den Beugungswinkel und $J^1_{(z)}$ die Bessel'sche Function erster Art mit dem Index Eins vorstellt.

Die Verschiedenheit der beiden Amplituden ist bedingt durch die Factoren γ_1 und γ_2. Dieselben sind bekannte, durch die endlichen Summen:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{S_1}{C_1} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1\pi + K\pi$$

gesetzt, wo ε_1 eine zwischen -1 und $+1$ liegende Grösse und K alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeutet. Diese Gleichung ist richtig, da ja bekanntlich einem beliebig gegebenen Werth der Tangente ein Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zugehört, und die Periode der Tangente $= \pi$ ist. Hr. Exner setzt dafür aus mir unverständlichen Gründen die angeblich „richtig gestellte", in der That aber unrichtige Gleichung:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{S_1}{C_1} = \varepsilon_1\pi + K.2\pi.$$

1) Lommel, Schlömilch's Zeitschr. **15.** p. 145. 1870. Daselbst p. 164 habe ich auch eine ausführliche Tabelle der Werthe von C und C^2 mitgetheilt.

$$\gamma_1 = \Sigma \cos(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu), \qquad \gamma_2 = \Sigma \cos(q_2 x_\nu + r_2 y_\nu)$$

ausgedrückte und für jede individuelle Bestäubung ganz bestimmt gegebene Functionen der Beugungsrichtung. Wären die beiden Bestäubungen voneinander verschieden, so würden diese beiden Summen voneinander unabhängig sein und in keinerlei Beziehung zu einander stehen. Ist aber die eine Bestäubung das Spiegelbild der anderen, so sind sie Werthe einer und derselben Function:

$$\gamma = \Sigma \cos(q x_\nu + r y_\nu)$$

für verschiedene Werthe der Argumente q und r, die eine für q_1, r_1, die andere für q_2, r_2. Gerade in diesem Umstande, dass γ_1 und γ_2 oder allgemeiner N_1 und N_2 Werthe einer und derselben Function sind, ist das Wesen der hierhergehörigen Erscheinungen, und insbesondere die Thatsache begründet, dass beim Schrägstellen der Bestäubungsfläche die Newton'schen Staubringe nicht sofort verschwinden. Ist die Bestäubungsfläche dem Spiegel parallel ($f = 0$, $g = 0$), so sind die beiden Amplituden einander gleich, weil ihre Argumente einander gleich sind; von diesem gemeinschaftlichen Werthe ausgehend, ändern sie sich stetig, wenn die Platte aus der parallelen in die geneigte Stellung übergeführt wird, indem ihre Argumente q_1 und q_2, r_1 und r_2 auseinanderweichen.

In einer früheren Abhandlung habe ich unter der Ueberschrift: „Beugungserscheinungen, durch mehrere unter sich gleiche Oeffnungen hervorgebracht", für einen einzigen Schirm die Bedeutung der Factoren C und γ folgendermassen geschildert[1]): „Wenn in einem Schirm mehrere unter sich gleiche und ähnlich liegende, aber ganz beliebig gruppirte Oeffnungen vorhanden sind, so liefert jede derselben einen resultirenden Strahl, welchem derselbe Gangunterschied eigen ist, wie einem gewissen, von einem bestimmten Punkte der Oeffnung (z. B. dem Mittelpunkt, wenn ein solcher existirt) ausgehenden Elementarstrahl. Alle diese Resultanten haben für eine und dieselbe Beugungsrichtung auch dieselbe Amplitude, nämlich diejenige, welche jede einzelne Oeffnung für

1) Lommel, Schlömilch's Zeitschr. 14. p. 31. 1869.

diese Strahlenrichtung hervorbringen würde, jede trägt gleichsam das Beugungsbild der einzelnen Oeffnung in sich; würden daher diese Resultanten unter sich nicht interferiren, so müsste auf der Bildfläche die Beugungserscheinung der einzelnen Oeffnung, nur mit erhöhter Lichtstärke, zum Vorschein kommen. Da aber, vermöge der oben erwähnten Gangunterschiede, Interferenz eintritt, so wird dieses Bild nur an solchen Stellen ungeändert bleiben, für welche jene Resultanten in vollem Einklange stehen; an anderen Stellen wird theilweise oder vollständige Vernichtung eintreten. Wir sehen also, dass das von der einzelnen Oeffnung hervorgebrachte Bild, mit proportional dem Quadrate der Oeffnungszahl verstärkter Intensität, die Grundlage der neuen Erscheinung bildet. Die Modificationen, welche es erleidet, hängen nur von den Gangunterschieden der interferirenden Resultanten, d. h. nur von der Gruppirung der Oeffnungen ab, keineswegs aber von der Gestalt derselben."

Diese nur von der Gruppirung der Oeffnungen oder Körperchen abhängigen Modificationen, welche Hr. Exner mit einer gut gewählten Bezeichnung „Granulation" nennt, finden ihren Ausdruck in dem Factor γ.

Während bei Parallelstellung die von den beiden Schirmen herrührenden Granulationen identisch sind und zusammenfallen, weichen sie beim Uebergang in die schiefe Lage auseinander und bedingen hierdurch verschiedene Amplituden der beiden nach derselben Richtung gebeugten resultirenden Strahlen.

Da die Werthe von γ_1^2 und γ_2^2 zwischen 0 und h^2 sich bewegen, so kann der Werth des Verhältnisses γ_1^2/γ_2^2 zwischen 0 und ∞ liegen. Hierdurch wird der von Hr. Exner[1]) postulirte Werth 160000:1 noch weit überboten.

Die Verschiedenheit der Amplituden $N_1 = C\gamma_1$ und $N_2 = C\gamma_2$ bei schiefer Lage der Bestäubungsfläche kann vernünftiger Weise nicht geleugnet werden. Dass Hr. Exner dies dennoch thut, erklärt sich ohne Zweifel aus dem Umstande, dass er dabei die mittlere Intensität oder die mitt-

1) Exner, Wied. Ann. 17. p. 160. 1882.

lere Amplitude für ein endliches Stückchen des Gesichtsfeldes im Sinne hat. In meiner Theorie aber handelt es sich um zwei parallele Strahlenbündel, die in einem Punkte des Gesichtsfeldes zur Vereinigung kommen.

Mit dieser Auffassung der Intensität als eines Mittelwerthes steht auch die Ansicht des Hrn. Exner im Zusammenhang[1]), „dass es weder für die Fraunhofer'schen Ringe noch für die Newton'schen Staubringe eine Intensitätsformel im gewöhnlichen Sinne gibt," eine Ansicht, welcher ich durchaus nicht beipflichten kann. Diese Intensitätsformel, nämlich:

$$M^2 = n^2 C^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \cos 2se)$$

existirt in der That, und zwar für jede gegebene Bestäubung mit aller der Bestimmtheit, welche irgend einer Intensitätsformel in der Theorie der Beugung eigen ist. Dass dieser Ausdruck mühsam zu berechnen sein würde, ändert an dieser Thatsache nichts. Würde man ihn vollständig berechnen, so würde sich ausser den Lycopodium- und den Staubringen auch noch die ganz bestimmte resultirende Granulation ergeben, welche durch die gegebene Bestäubung hervorgebracht wird.

Sieht man jedoch von der genauen Wiedergabe dieser von der besonderen Gruppirung der Körperchen bedingten Modificationen ab, so kann man sich von dem übrigen Inhalt der Formel durch das bereits oben angewendete näherungsweise Verfahren Rechenschaft geben.

Man hat nämlich:

$$\gamma_1 = \Sigma \cos(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu) = \Sigma \cos\big(q x_\nu + r y_\nu - s(f x_\nu + g y_\nu)\big),$$

oder, wenn:

$$q x_\nu + r y_\nu = \alpha, \qquad f x_\nu + g y_\nu = \zeta_\nu, \qquad \text{d. i.:} \qquad z_\nu = e + \zeta_\nu$$

gesetzt wird:

$$\gamma_1 = \Sigma \cos(\alpha_\nu - s\zeta_\nu) \qquad \text{und:} \qquad \gamma_2 = \Sigma \cos(\alpha_\nu + s\zeta_\nu);$$

folglich:

$$\gamma_1^2 = \Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - s\zeta_\nu)\cos(\alpha_\mu - s\zeta_\mu)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu) + \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\cos(\alpha_\nu + \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu).$$

---

1) Exner, Wied. Ann. 9. p. 258. 1880.

Da in der ersteren dieser beiden Summen (weil, wenn $-\alpha_\mu$ statt α_μ gesetzt wird, auch $-\zeta_\mu$ statt ζ_μ zu setzen ist) neben dem Gliede $\cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu)$ auch das Glied $\cos(\alpha_\nu + \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu)$ vorkommt, und ebenso in der zweiten neben dem Gliede $\cos(\alpha_\nu + \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu)$ auch das Glied $\cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu)$, so sind diese beiden Summen einander gleich, und man kann schreiben:

$$\gamma_1^2 = \Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu).$$

Sondert man von dieser aus h^2 Gliedern bestehenden Doppelsumme diejenigen h Glieder ab, in welchen $\mu = \nu$ ist, und bedenkt, dass von den übrigen $h(h-1)$ Gliedern je zwei einander gleich sind, so erhält man:

$$\gamma_1^2 = \Sigma 1 + 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu),$$

oder:

$$\gamma_1^2 = h + 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu).$$

Ebenso findet man:

$$\gamma_2^2 = h + 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu + s\zeta_\nu - s\zeta_\mu),$$

wo nun in den Doppelsummen als Indices ν, μ sämmtliche Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1 bis h anzuwenden sind.

Hiernach zerfällt jeder Ausdruck γ^2 in zwei Theile, deren ersterer, wie auch die Gruppirung der h Körperchen sich ändern mag, unverändert $= h$ bleibt, während der zweite Theil, indem er auf dem durch h vorgestellten gleichmässigen Lichtgrunde Licht auf- oder abträgt, die sogenannte Granulation hervorbringt. Will man daher diese Modification des Bildes ausser acht lassen, so hat man obige Doppelsummen gleich Null zu setzen und kann nun $2h$ statt $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ schreiben.

Es ist ferner:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - s\zeta_\nu)\cos(\alpha_\mu + s\zeta_\mu)$$
$$= \Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu) + \Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu + \alpha_\mu - s\zeta_\nu + s\zeta_\mu).$$

oder, da diese beiden Summen aus demselben Grunde wie oben einander gleich sind:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu).$$

Sondert man aus dieser Doppelsumme wieder die h Glieder ab, in welchen $\mu = \nu$ ist, so ergibt sich:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2\Sigma \cos 2s\zeta_\nu + 4\Sigma\Sigma \cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu),$$

wo wiederum nur der zweite Theil mit der Gruppirung der Körperchen sich ändert, während der erste Theil den hiervon unabhängigen unveränderlichen Bestand des Ausdrucks darstellt. Sieht man daher von der Granulation ab, so kann man $2\Sigma\cos 2s\zeta_\nu$ statt $2\gamma_1\gamma_2$ setzen.

Ist e_2 die grösste, e_1 die kleinste vorkommende Entfernung der beugenden Körperchen vom Spiegel, so ist diese Summe von $\zeta_\nu = -\frac{1}{2}(e_2 - e_1)$ bis $\zeta_\nu = +\frac{1}{2}(e_2 - e_1)$ zu nehmen. Sie kann, wenn die Bestäubungsfläche rechteckig gestaltet ist, angenähert ersetzt werden durch das bestimmte Integral:

$$\frac{2h}{e_2 - e_1}\int\limits_{-\frac{1}{2}(e_2-e_1)}^{+\frac{1}{2}(e_2-e_1)} \cos s\zeta \,.\, d\zeta = h \,.\, \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)}.$$

Setzt man daher letzteren Werth statt $2\gamma_1\gamma_2$ und $2h$ statt $\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2$ in die obige Intensitätsformel ein, so erhält man:

$$M^2 = 2n^2 h\, C^2\left(1 + \frac{\sin s(e_2 - e_1)}{s(e_2 - e_1)}\cos 2se\right),$$

genau wie oben; und damit ist gezeigt, dass man zu demselben Resultate gelangt, mag man die Summation in der einen oder in der anderen Reihenfolge vornehmen.

Bei zwei verschiedenen Bestäubungen, wenn also γ_1 und γ_2 in gar keiner Beziehung zu einander stehen, erhält man zwar wie oben, wenn man die zu γ_2 gehörigen α und ζ mit α' und ζ' bezeichnet:

$$2\gamma_1\gamma_2 = 2\Sigma\Sigma\cos(\alpha_\nu - \alpha_\mu' - s\zeta_\nu - s\zeta_\mu');$$

aus dieser Doppelsumme lässt sich aber nicht mehr wie oben ein von der Gruppirung der Körperchen unabhängiger Bestandtheil ausscheiden, sondern die ganze Summe ist, wenn von der Granulation abgesehen werden soll, als verschwindend zu betrachten. Man erhält daher, wenn h und i die zu jeder Bestäubung gehörige Anzahl der Körperchen bedeuten:

$$M^2 = n^2 C^2 (h + i).$$

In diesem Falle entsteht also das System der Newton'schen Staubringe nicht, wohl aber das der Lycopodiumringe. Die Behauptung des Hrn. Exner[1]), dass nach meiner Theorie

1) Exner, Wied. Ann. **9.** p. 256. 1880.

auch zwei voneinander unabhängige Bestäubungen Newton'sche Staubringe hervorbringen müssten, ist demnach unrichtig, wie überhaupt alles, was Hr. Exner gegen meine Theorie einwendet.

Ein Haupteinwand, mit welchem sich Hr. Exner in seiner letzten Publication[1]) vorzugsweise beschäftigt, besteht in Folgendem. Indem Hr. Exner ohne weiteres $N_1 = N_2$ (und demnach $\gamma_1 = \gamma_2$) setzt[2]), folgert er, angeblich aus meiner Theorie, in der That aber aus dieser seiner unrichtigen Unterstellung, dass, wenn die Bestäubungsfläche aus der Parallellage in die schiefste Lage übergeführt wird, das Phänomen einfach ungeändert bleiben müsste. Diese mir untergeschobene Theorie, mit der ich selbst aber nichts zu thun habe, widerlegt nun Hr. Exner, indem er numerische Werthe daraus ableitet und diese unter der unrichtigen Bezeichnung „nach Lommel's Theorie"[3]) mit beobachteten Werthen zusammenstellt. Die so berechneten Werthe stimmen allerdings mit den Beobachtungen nicht überein; wohl aber thun dies die wirklich nach meiner Theorie berechneten.

Die Theorie des Hrn. Exner, obgleich sie von dem richtigen Grundgedanken der Beugung ausgeht und zu einer Endformel gelangt, welche mit der aus meiner Intensitätsformel durch ein Näherungsverfahren entwickelten identisch ist, ist dennoch verfehlt. Denn sie stützt sich auf den Satz[4]), „Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie incohärente Strahlen, indem sie ihre Intensitäten summiren". Dieser Satz ist unrichtig. Das wahre Verhalten wird vielmehr durch folgenden Satz ausgedrückt: Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie cohärente Strahlen, welche mit einander interferiren, indem sich ihre Excursionen summiren. Als Resultat dieser Interferenz ergeben sich die oben beschrie-

1) Exner, Wied. Ann. **17.** p. 149. 1882.
2) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 234. 1880.
3) Exner, Wied. Ann. **17.** p. 154. 155. 158. 1882.
4) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 222. 1880.

benen nur von der Gruppirung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes.

Da Hr. Exner die „Uebereinanderlagerung elementarer Ringsysteme"[1]), die „Incohärenz der durch verschiedene Stellen der Bestäubung hervorgebrachten Erscheinungen"[2]), die „einfache Superposition der Ringsysteme"[3]) wiederholt betont, kann wohl kein Zweifel übrig bleiben, dass er jene resultirende Strahlen wirklich für incohärent hält. Er lässt demgemäss mitten im Gange der Entwickelung statt der von der Beugungstheorie geforderten Summirung der Excursionen eine Summirung der Intensitäten eintreten und macht hierdurch seine Theorie zu einem Mittelding zwischen Beugungs- und Diffusionstheorie. Zu einer exacten Endformel gelangt er auf diesem Wege nicht, sondern nur zu jener auch aus meiner Theorie ableitbaren Näherungsformel von bedingter Gültigkeit.

In meiner Theorie dagegen wird der Grundgedanke der Beugung bis zu Ende festgehalten. Sie führt zu dem ganz exacten Intensitätsausdruck:

$$M^2 = n^2 C^2 (\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + 2\gamma_1\gamma_2 \cos 2se),$$

welcher die Hauptumstände der Erscheinung, nämlich das Vorhandensein der Staubringe, der Lycopodiumringe und der Granulation, mit einem Blicke übersehen lässt. Die näherungsweise Umformung, durch welche man ihm im Falle einer schiefen Bestäubungsebene eine für die Berechnung bequeme Gestalt gibt, wird erst ganz zuletzt an der bereits fertigen Formel vorgenommen. Im Falle der Parallelstellung ist eine solche Umformung gar nicht nothwendig, da die Formel:

$$M^2 = 2n^2 C^2 \gamma^2 (1 + \cos 2se)$$

alsdann unmittelbar anwendbar ist.

Man kann zwar, wie ich eingangs gezeigt habe, auch bei der von Hrn. Exner eingehaltenen Reihenfolge der

1) Exner, Wied. Ann. **4.** p. 540. 1878.
2) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 222. 1880.
3) Exner, Wied. Ann. **17.** p. 153. 1882.

Summirung die Beugungstheorie consequent durchführen und zu einer exacten Endformel gelangen. Diese Formel:

$$M^2 = 4n^2 C^2 (\gamma^2 + \sigma^2)$$

lässt aber das Vorhandensein der Staubringe nicht unmittelbar, sondern erst nach Durchführung jener nur angenähert richtigen Umformung hervortreten und entbehrt daher der Durchsichtigkeit, durch welche sich der obige Intensitätsausdruck auszeichnet. Der von mir befolgte Gang der Summirung verdient daher unbedingt den Vorzug.

Die von mir aufgestellte Theorie der Newton'schen Staubringe ist demnach nicht nur in allen Punkten richtig, sondern sie geht auch, bei consequenter Durchführung des Grundgedankens, gerade denjenigen Weg, welcher am unmittelbarsten zur Einsicht in das Wesen dieser Erscheinungen führt.

Hr. Exner schliesst seine Abhandlung[1]) mit einigen gegen meine Theorie gerichteten Sätzen, welche ich hier zum Schlusse wiederholen will, indem ich nur, wo Hr. Exner sagt: „es ist unrichtig", schreibe: „es ist richtig".

Es ist richtig, dass der durch eine Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase hat wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche gebeugte Elementarstrahl.

Es ist richtig, dass die an der Bestäubungsfläche vor und nach der Reflexion der directen Strahlen in irgend einer Richtung resultirenden gebeugten Strahlen bei der schiefen Stellung der Bestäubungsfläche ungleiche Intensitäten haben.

Es ist richtig, dass das durch die Combination einer Bestäubungsfläche und eines Spiegels hervorgebrachte Phänomen durch die Intensitätsgleichung:

$$M^2 = n^2 (N_1^2 + N_2^2 + 2 N_1 N_2 \cos 2se)$$

gegeben ist.

1) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 236. 1880.

VII. *Optische Controversen;* *von E. Ketteler.*

(Schluss.)

II. Zur Theorie des Ueberganges des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Medien.

Zu der Form, welche ich den vier Grenzbedingungen des Lichtes in meinen letzten Arbeiten[1]) gegeben habe, und welche sich insbesondere durch Verzichtleistung auf das Continuitätsprincip von älteren[2]) unterscheidet, bestimmte mich wesentlich das Verhalten der anisotropen Medien. Wollte ich mich nämlich möglichst enge und möglichst correct an die Fresnel'sche Behandlung derselben anschliessen können, so musste ich bezüglich des Verhältnisses von Strahl und Normale nothwendig zu derjenigen Anschauung gelangen, die man am erstcitirten Orte entwickelt findet. Gegenwärtig indess, wo ich in den nächstfolgenden Paragraphen die herkömmlichen Sätze über die Schwingungsrichtung des doppelt gebrochenen Lichtes offen bekämpfen werde, ist es denn auch möglich geworden, die erwähnten Uebergangsbedingungen als ein einheitliches, zusammengehöriges System direct aus der Elasticitätslehre abzuleiten. Dabei werde übrigens gleich bemerkt, dass sich speciell für den Eintritt des Lichtes in (absorbirende) isotrope Mittel die Identität der bisherigen und jetzigen Grenzbedingungen mit Leichtigkeit erweisen lässt.

Man denke sich zunächst ein einfach brechendes Mittel mit den drei Gleichungen:

$$(\mathrm{I})\quad \left\{ \begin{array}{l} m\frac{d^2\xi}{dt^2}+\sum m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}C'=\mathfrak{e}\,\varDelta_2\xi, \qquad m\frac{d^2\eta}{dt^2}+\sum m'\frac{d^2\eta'}{dt^2}C'=\mathfrak{e}\,\varDelta_2\eta, \\ \qquad m\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\sum m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2}C'=\mathfrak{e}\,\varDelta_2\zeta \end{array}\right.$$

mit irgend einem zweiten ähnlichen in ebener Trennungsfläche sich berühren. Die rechten Seiten enthalten die Deformationskräfte des in beiden Medien gleichen inter-

1) Ketteler, Wied. Ann. **3.** p. 83. 1878.

2) Wied. Ann. **1.** p. 206.

molecularen Aethers, den wir nicht blos wie bisher als unzusammendrückbar, sondern auch mit Neumann und Kirchhoff[1]) als einem festen elastischen Körper sich analog verhaltend ansehen wollen. Denkt man sich also diesen Aether zerlegt in lauter unendlich kleine Parallelepipeda von der Lage x, y, z, deren Kanten den Coordinatenaxen parallel sind, so wird sich kraft der letzterwähnten Eigenschaft desselben beispielsweise schreiben lassen:

$$\mathfrak{e}\,\Delta_2\zeta = \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz},$$

wo die Normalkraft Z_z und die beiden Tangentialkräfte $Z_y = Y_z$ und $Z_x = X_z$ durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$(1) \quad \begin{cases} Z_z = B\left[\dfrac{d\zeta}{dz} + \beta\left(\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz}\right)\right]; \\[2ex] Y_z = \dfrac{B}{2}\left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right), \qquad X_z = \dfrac{B}{2}\left(\dfrac{d\zeta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dz}\right), \end{cases}$$

in welchen B, β für jedes Mittel charakteristische Constanten sind.

Und vermöge der angenommenen Incompressibilität wird sein:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Um nun die Grenzbedingungen aufzustellen, die an der Berührungsfläche zweier solcher Mittel zu erfüllen sind, machen wir diese zur XY-Ebene eines Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt wir mit dem Einfallspunkt eines einfallenden Strahles zusammenfallen lassen, und es möge wieder wie früher für das Mittel (1) z positiv, für das Mittel (2) z negativ genommen werden. Wir fixiren insbesondere diejenigen beiden Parallelepipeda, welche, das eine im oberen, das andere im unteren Mittel, im Coordinatenanfangspunkt zusammenstossen.

Wegen der Anwesenheit und des Mitschwingens der ponderablen Theilchen sind offenbar die durch die (ungleichen) Schwingungen erzeugten einzelnen Normal- wie Tangentialdrucke zu beiden Seiten der Grenzfläche im allgemei-

1) Kirchhoff, Abhandl. d. Berl. Akad. 1876. p. 57.

nen ungleich. Stellen wir nun nach Kirchhoff[1]) den Grundsatz auf, dass an der Grenzfläche selbst, resp. an den Elementen derselben keine Arbeit geleistet wird, welche als solche für die Wellenbildung verloren ginge, so wird sich diesem Princip, das in seinen Folgen mit dem der Erhaltung der Schwingungsarbeit des Aethers zusammenfällt, in folgender Weise entsprechen lassen. Man hat nämlich die Totalarbeit aller Druckkräfte, denen irgend zwei gleiche, der Trennungsfläche parallele Parallelepipedflächen von der Lage $x_1, y_1, z_1 = +c$ im oberen und $x_2, y_2, z_2 = -c$ im unteren Mittel ausgesetzt sind, für die erwähnten Grenzparallelepipeda von der Lage $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ einander gleich zu setzen.

Versteht man also unter $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ kleine zusammengehörige Wegelemente, so hätte man die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (Z_z d\zeta + Y_z d\eta + X_z d\xi)_1 \\ = (Z_z d\zeta + Y_z d\eta + X_z d\xi)_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Schreibt man jede Seite derselben unter Einführung der Oscillationsgeschwindigkeiten so:

$$\left(Z_z \frac{d\zeta}{dt} + Y_z \frac{d\eta}{dt} + X_z \frac{d\xi}{dt}\right) dt,$$

so ergibt die Substitution der Ausdrücke (1) unter Zuziehung der Gleichung (II) für den mit 2 multiplicirten eingeklammerten Factor den Werth:

$$2B \frac{d\zeta}{dz} \frac{d\zeta}{dt} + B\left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right) \frac{d\eta}{dt} + B\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) \frac{d\xi}{dt}.$$

Derselbe lässt sich durch gleichzeitiges Addiren und Subtrahiren identischer Glieder in doppelter Weise umformen:

Zunächst erhält man bei Beibehaltung der zweiten Glieder der Klammern:

$$\text{(a)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} B\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) \frac{d\eta}{dt} + B\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) \frac{d\xi}{dt} \\ + 2B\left(\frac{d\zeta}{dz} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\zeta}{dy} \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\zeta}{dx} \frac{d\xi}{dt}\right). \end{array} \right.$$

---

1) Kirchhoff, l. c. p. 74. Vgl. auch Glazebrook, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **3.** p. 330. 1880 und **4.** p. 155. 1881.

Dagegen bei Beibehaltung der ersten Glieder:

$$\text{(b)}\qquad \left\{\begin{aligned} &B\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)\frac{d\eta}{dt}+B\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)\frac{d\xi}{dt}\\ &+2B\left(\frac{d\zeta}{dz}\frac{d\zeta}{dt}+\frac{d\eta}{dz}\frac{d\eta}{dt}+\frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Sofern nun das letzte Glied des Ausdrucks (a) in Rücksicht auf Gleichung (II) verschwindet, so erhält sonach die Uebergangsbedingung die Form:

$$\text{(2)}\qquad \left\{\begin{aligned} &B_1\left(\frac{d\eta_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dy}\right)\frac{d\eta_1}{dt}+B_1\left(\frac{d\xi_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dx}\right)\frac{d\xi_1}{dt}\\ &=B_2\left(\frac{d\eta_2}{dz}-\frac{d\zeta_2}{dy}\right)\frac{d\eta_2}{dt}+B_2\left(\frac{d\xi_2}{dz}-\frac{d\zeta_2}{dx}\right)\frac{d\xi_2}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Und damit identisch ist zufolge Ausdruck (b) die folgende:

$$\text{(3)}\qquad \left\{\begin{aligned} &B_1\left(\frac{d\xi_1}{dz}\frac{d\xi_1}{dt}+\frac{d\eta_1}{dz}\frac{d\eta_1}{dt}+\frac{d\zeta_1}{dz}\frac{d\zeta_1}{dt}\right)\\ &=B_2\left(\frac{d\xi_2}{dz}\frac{d\xi_2}{dt}+\frac{d\eta_2}{dz}\frac{d\xi_2}{dt}+\frac{d\zeta_2}{dz}\frac{d\zeta_2}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Diese letztere führt direct zur Fresnel-Neumann'schen Gleichung der lebendigen Kräfte. Was dagegen die zusammengesetzte erstere betrifft, so beachte man, dass die eingeklammerten Grössen die Drehcomponenten sind, um welche die längs der Trennungsfläche liegenden Aetherparallelepipeda in der *XZ*-, resp. *YZ*-Ebene gedreht werden, und dass in isotropen Mitteln in jeder dieser beiden Ebenen selbständige Schwingungen bestehen können.

Acceptiren wir nun für die der Grenzfläche parallelen Verschiebungen die den Anschauungen sowohl Fresnel's wie Neumann's entsprechende Continuitätsforderung, so lässt sich folglich Gleichung (2) in die vier folgenden Einzelbedingungen zerfällen:

$$\text{(IV)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{d\xi_2}{dt},\qquad \frac{d\eta_1}{dt}=\frac{d\eta_2}{dt}\\ &B_1\left(\frac{d\xi_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dx}\right)=B_2\left(\frac{d\xi_2}{dz}-\frac{d\zeta_2}{dx}\right)\\ &B_1\left(\frac{d\eta_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dy}\right)=B_2\left(\frac{d\eta_2}{dz}-\frac{d\zeta_2}{dy}\right) \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0 \end{aligned}$$

Diese Beziehungen, die bei Hinzufügung der beiden Incompressibilitätsbedingungen Gl. (II) und der Gleichung der lebendigen Kräfte (Gl. 3) ein in sich abgeschlossenes System bilden, umfassen zugleich die speciellen Reflexionstheorien Fresnel's wie Neumann's.

Neumann (und mit ihm Kirchhoff), der nur absolut durchsichtige dispersionslose Mittel behandelt, setzt:

$$\zeta_1 = \zeta_2, \qquad B_1 \gtreqless B_2$$

und leitet aus ersterer Forderung bezüglich der zweiten ab: $B_1 : B_2 = n_1^2 : n_2^2$.

Mit Fresnel dagegen nehmen wir fortan für Mittel von beliebiger Durchsichtigkeit und Dispersion:

$$\zeta_1 \gtreqless \zeta_2, \qquad B_1 = B_2.$$

Wenn ich freilich in meinen letzten Arbeiten die beiden Bedingungen der Continuität durch die beiden folgenden:

$$(\mathrm{IV}_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \dfrac{d\zeta_1}{dz} = \alpha_2 \dfrac{d\zeta_2}{dz}, \qquad B_1\left(\dfrac{d\eta_1}{dx} - \dfrac{d\xi_1}{dy}\right) = B_2\left(\dfrac{d\eta_2}{dx} - \dfrac{d\xi_2}{dy}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ersetzen zu müssen glaubte, so stimmte doch dieses zweite System, wie bereits eingangs erwähnt ist, für absorbirende isotrope Mittel ($\alpha = 1$) und bei äusserer Spiegelung (im Weltäther) in seinen Resultaten mit dem obigen überein. Ebenso bleibt die frühere Rechnung[1]) für den vollständigen Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Platte ohne alle Einschränkung bestehen.

Bei dem directen Lichtübergang zwischen aneinander grenzenden absorbirenden Mitteln ist, wie ich gezeigt habe[2]), neben der „Propagationsnormale“ eine „Extinctionsnormale“ zu unterscheiden, und sowie die erstere nach bestimmten Gesetzen gespiegelt und gebrochen wird, so auch die letztere. Ich habe diese Gesetze dahin ausgesprochen[3]), dass die gespiegelte Extinctionsnormale mit der einfallenden und dem Lothe in gleicher Ebene liegt, und Spiegelungs- und Einfallswinkel gleich sind, und dass die gebrochene Extinctionsnor-

1) Ketteler, Wied. Ann. **3.** p. 290. 1878.
2) Ketteler, Wied. Ann. **7.** p. 107. 1879.
3) l. c. p. 111.

male stets in die Richtung des Lothes hineinfällt. Wenn Hr. Lommel[1]) auf diese Verhältnisse zurückkommt und dabei das letzterwähnte Gesetz missverständlich durch ein anderes zu ersetzen sucht, so sind seine Ausführungen nicht haltbar.

III. Die Doppelbrechung. Nachweis, dass die Schwingungen senkrecht stehen auf der Strahlrichtung.

Es wird für diese Materie nothwendig sein, einige Begriffsbestimmungen vorherzuschicken. Wir unterscheiden dabei zwischen den Gesetzen der inneren Fortpflanzung und zwischen dem Verfahren, den einem gegebenen äusseren Schwingungszustande entsprechenden inneren zu finden, und stellen zugleich die beiden hier möglichen Auffassungsweisen einander gegenüber.

1. Nach der von Kirchhoff[2]) fortgebildeten Theorie Neumann's liegen die Schwingungen genau in der Wellenebene als der Ebene gleicher Phasen, und die Bewegung pflanzt sich gemäss der theoretischen Fundamentalformel (der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen):

$$\frac{u^2}{\omega_x^{\,2} - \omega^2} + \frac{v^2}{\omega_y^{\,2} - \omega^2} + \frac{w^2}{\omega_z^{\,2} - \omega^2} = 0$$

in der Richtung der Normalen fort. Was den einer gegebenen Normalen sich zuordnenden Strahl betrifft, so hat sich Kirchhoff hier nicht mit der älteren Darstellung, dass es für die Existenzberechtigung des letzteren ausreiche, ihn durch blosse Umhüllung aus vorstehender Fläche abzuleiten, begnügt, sondern die tiefere Wesenheit des Strahles durch eine eingehende mechanische Betrachtung begründet. Ihm zufolge gelangt man zum Strahlbegriff mittelst der Erwägung, dass der Erfahrung zufolge die Lichtbewegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen kann, während auf der anderen Ruhe stattfindet, falls nämlich die Ebene dem Strahle parallel ist. Dementsprechend muss die Arbeit des Druckes, die auf die Elemente einer beliebigen, parallel dem Strahle genom-

1) Lommel, Wied. Ann. **16.** p. 427. 1882.
2) Kirchhoff, Abh. d. Berl. Akad. 1876. p. 55.

menen Ebene von der einen Seite her ausgeübt wird, in jedem Augenblick verschwinden.

Ueberträgt man diese Theorie auf den Uebergang des Lichtes, so schliesst sich ihr die Huygens'sche Construction in möglichst enger Weise an. Dieselbe ergibt beispielsweise für die extraordinär gebrochenen Schwingungen im Falle senkrechter Incidenz das nebenstehende Bild. (Fig. 1). Die der Trennungsfläche *TT* parallel einfallende Welle *AB* geht über in die parallel bleibende gebrochene *A'B'*, welche sich nach der Normalen *AN* mit der Geschwindigkeit ω_n verschiebt, wegen der ungleichen Seitendrucke aber in diejenige schiefe Richtung *AS* hineingedrängt wird, für welche die Arbeit der Seitendrucke verschwindet.

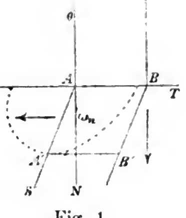


Fig. 1.

Die Schwingungen liegen in der Ebene gleicher Phase *AB* (und zwar charakteristischer Weise senkrecht zum Hauptschnitt), und daher verhält sich alles gleich, mag man dieselbe unendlich ausgedehnt nehmen oder auf ein kleines Element beschränken.

Der hiermit gekennzeichneten Neumann-Kirchhoff'schen Auffassung soll jetzt eine andere gleich folgerichtige gegenübergestellt werden. Dieselbe geht aus von der Erfahrung, dass die Strahlrichtung diejenigen Molecülreihen enthält, welche die Schwingungsenergie mit einer durch ihre Beweglichkeit bedingten Geschwindigkeit durch das Mittel hindurch fortleiten, und sie betrachtet daher die Fortpflanzung in der Strahlrichtung nicht als eine durch Normalfortpflanzung in Verbindung mit einem Seitenschub indirect hervorgegangene, sondern als die unmittelbare und unzerlegbare Fortwanderung der Phasen, entsprechend der theoretischen Fundamentalfläche (der Wellenfläche):

$$\frac{u^2}{\frac{1}{\omega_x^2}-\frac{1}{\omega^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{\omega_y^2}-\frac{1}{\omega^2}}+\frac{w^2}{\frac{1}{\omega_z^2}-\frac{1}{\omega^2}}=0.$$

Dieser Ansicht zufolge stehen denn auch die Schwingungen senkrecht zum Strahle, und zwar verlangt das optisch-

theoretische Gesammtsystem, dass dieselben in dem durch Strahl und Normale gegebenen Hauptschnitt liegen.

Zur Ableitung des vorstehenden Gesetzes genügt die Behandlung des ideellen Falles, dass nämlich im Inneren des Mediums feste Verbindungen hergestellt seien, welche die Aether- und Körpertheilchen zwingen, ihre Oscillationen parallel einer vorgeschriebenen, beliebig ausgedehnten Ebene auszuführen. Dieselben würden dann die gleiche Arbeit in Anspruch nehmen, wie wenn die Beweglichkeit frei wäre, würden sich folglich auch mit der gleichen Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen derselben fortpflanzen, und Strahl und Normale wären wie in isotropen Medien identische Begriffe. Ob sich etwa dereinst unter Benutzung gewisser electrischer Vorgänge, wie sie vielleicht die electromagnetische Lichttheorie in Aussicht stellt, die hier gemachte Voraussetzung durch wirkliche Versuche werde realisiren lassen, möge dahingestellt bleiben; für die bisherige experimentelle Optik gibt es solche ideelle, die Schwingungsrichtung fixirenden Kräfte nicht, und bedarf es hier nur eines von der Begrenzung her einwirkenden äusseren Impulses. Um nun trotzdem auf Grund vorstehender allgemeiner Annahmen einmal für die innere Fortpflanzung zu dem durch die letzte Gleichung ausgesprochenen Gesetze zu gelangen, und dabei zugleich andererseits für den Uebergang des Lichtes die erfahrungsmässige Anwendbarkeit der Huygens'schen Construction festhalten zu können, dazu sollen die beiderlei Bedingungen getrennt und möglichst anschaulich besprochen werden.

Wir denken uns zunächst um den Strahl als Axe ein unendlich enges Parallelepipedon (Röhre) construirt und dasselbe durch irgend senkrechte Schnitte in beliebige Elemente zerschnitten, sodass die Schwingungen diesen Basisflächen parallel werden. Dürfte man sich dabei etwa vorstellen, dass das Volumen der Körpertheilchen den Querschnitt gerade ausfülle und zwischen je zwei auf einander folgenden eine Reihe von Aetherschichten, auf deren jeder zahllose Aethertheilchen neben einander Platz finden, enthalten sei, so würde das den Vorgang gut verdeutlichen. Sollte indess die Dich-

tigkeit des inneren Aethers durch grössere Körperräume verkleinert erscheinen[1]), so mag schon die Annahme genügen, dass der Querschnitt der Parallelepipeda wenigstens gerade die Wirkungssphäre der Atomgruppen eines Gesammtmoleculs ausfülle. Man nehme endlich an, dass die Schwingungen dieser Parallelepipeda durch Hin- und Herschieben der Bestandtheile eines Querschnitts derselben erregt werden; die entstehenden Ebenen gleicher Phase stehen dann gleichfalls auf der Strahl-, resp. Axenrichtung senkrecht. Nachdem man so auf Grund dieser neuen Annahmen, die bei der zugelassenen Beschränkung auf Volumenelemente in allem Wesentlichen mit der obigen ideellen Voraussetzung zusammenfallen, ganz wie dort die bezügliche brechende Kraft, resp. Fortpflanzungsgeschwindigkeit ermittelt hat, denke man sich schliesslich die gesammte Bewegungsmenge einerseits der Aethertheilchen und andererseits der Körpertheilchen in den Schwerpunkten der Querschnitte concentrirt, sodass fortan die mathematische Strahllinie die Bewegungsmenge des ganzen Parallelepipedons in sich einschliesst.

Was nunmehr den Uebergang des Lichtes betrifft, so werden consequenter Weise die Körpertheilchen der Grenzschicht vermöge der Breitendimension sei es ihres Volumens oder der Wirkungssphäre ihrer Atome die ganzen einfallenden wie reflectirten und gebrochenen Wellen in eine Reihe von succedirenden Parallelepipeden zu zerschneiden gestatten, innerhalb deren dann die Schwingungen nach Richtung und Phasengleichheit senkrecht stehen zur Axe. Für die Entstehung der Spiegelung und Brechung genügt eben die Beschränkung auf einzelne Parallelepipeda nicht, sondern es ist wenigstens die Gesammtheit der auf eine kleine endliche Fläche entfallenden in ihrem Nebeneinander ins Auge zu fassen. Auf allen je drei zusammengehörigen Parallelepipeden seien wieder die Bewegungsmengen in ihren Axen

1) Unsere Grundannahme der Identität des intermolecularen und äusseren Aethers bezieht sich freilich im Falle ausgedehnter Körpermassen blos auf eine unendlich klein genommene Raumeinheit, sodass unbeschadet der relativen Aetherverminderung im endlichen Raum der Quotient $e/m = V^2$ seinen constanten Werth behält.

concentrirt. Offenbar lässt sich dann die Huygens'sche Construction anstandslos auf diese „reducirten“ Bewegungsmengen in Anwendung bringen, und je enger der Querschnitt der Parallelepipeda genommen wird, desto näher fällt — natürlich abgesehen von der Schwingungsrichtung — der jetzige Begriff einer endlich ausgedehnten (Integrale) Welle mit dem Neumann-Kirchhoff'schen Begriff derselben zusammen.

Beispielsweise sei wieder für den oben besprochenen speciellen Fall der senkrechten Incidenz AB (Fig. 2) die einfallende Welle. Dieselbe zerlegt sich diesmal in die Elemente $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma\ldots$, deren jedes die im unteren Medium gelegenen Strahlenparallelepipeda $A\alpha A'\alpha'$, $\alpha\beta\alpha'\beta'\ldots$ mit Schwingungsenergie erfüllt, die sich dann in ihren succedirenden Schwingungszuständen parallel der Richtung AS verschiebt. Die Oscillationen stehen dabei senkrecht auf AS, und die Phasen der reducirten Bewegungsmengen bleiben in jedem Augenblick der Richtung AB parallel, sodass wieder $A'B'$ eine gebrochene Gesammtwelle darstellt. Bei der jetzigen Auffassung ist also die Normalgeschwindigkeit ω_n im Gegensatz zur Strahlgeschwindigkeit ω_s eine blosse Hülfsgrösse, welche für die Untersuchung der inneren Fortpflanzungsverhältnisse entbehrlich wird, aber für den Uebergang von aussen her nothwendig bleibt.

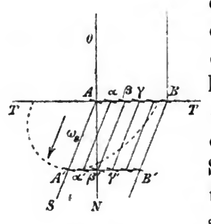


Fig. 2.

Der bisher von mir eingehaltene Standpunkt weicht freilich insofern von der hier dargelegten Anschauung ab, als er sich enger an die Annahme Fresnel's anschliesst und in mehrfacher Hinsicht zwischen jener und der von Neumann die Mitte hält.

Bei meinen ersten Versuchen, die von mir modificirte Fresnel'sche Reflexionstheorie auf anisotrope Mittel auszudehnen, ergab sich allerdings das bemerkenswerthe Resultat, dass, sofern man Continuitätsbedingungen zulassen möchte, solche auf Schwingungsrichtungen senkrecht zum Strahle zu beziehen sein würden. In der Ueberzeugung indess, dass

conform den Sätzen Fresnel's die von diesem angenommenen Normalschwingungen in der Wellenebene selbst liegen, stellte ich letztere als die „factischen" den nur „virtuellen" sogenannten Strahlschwingungen gegenüber, liess die Continuitätsforderung fallen und setzte die Gleichheit einer Dilatation nebst der der dritten Drehcomponente an deren Stelle (vgl. Gl. IV_0).

Das System dieser neuen Uebergangsbedingungen erscheint in der That mit Fresnel's Annahmen verträglich, und es gelang denn auch nicht blos für durchsichtige, sondern selbst für absorbirende Krystalle die Aufstellung anscheinend correcter Intensitätsformeln, die sich namentlich durch grosse Einfachheit und Symmetrie auszeichnen.

Um freilich dieses Resultat zu erzielen, musste in der betreffenden Untersuchung[1]), bei welcher sich die „Strahlschwingungen" bezüglich der Differentialgleichungen der inneren Fortpflanzung als die weitaus brauchbareren erwiesen, bezüglich der Grenzgleichungen ein mehr oder minder willkürlicher Sprung zu Gunsten der „Normalschwingungen" gemacht werden. Die erwähnte Brauchbarkeit der ersteren bestätigte sich in besonders hohem Maasse in der späteren Abhandlung über elliptisch polarisirende doppeltbrechende Mittel[2]), und wenn für gewöhnliche anisotrope Medien eine Reduction der einen auf die anderen ohne Schwierigkeit durchzuführen war, so würde eine solche bei den elliptischen Mitteln zu recht verwickelten Ausdrücken führen. Umgekehrt würden in dem Aufsatz über die Interferenzerscheinungen dichroitischer Krystallplatten[3]) die dort abgeleiteten Gesetze an Einfachheit und Uebersichtlichkeit erheblich gewinnen, wenn es gestattet wäre, die Strahlschwingungen unmittelbar als die thatsächlichen zu nehmen.

Wenn endlich das System der Grenzgleichungen (IV_0) den Fresnel'schen Normalschwingungen genügt, so habe ich doch auch schon mehrfach darauf hingewiesen, dass die Strahlschwingungen wenigstens der durchsichtigen Mittel das-

1) Ketteler, Ber. Berl. 1879. p. 909.
2) Ketteler, Wied. Ann. **16.** p. 105. 1882.
3) Ketteler, Wied. Ann. **11.** p. 496. 1880.

selbe gleichfalls befriedigen. Da andererseits die Continuitätsgleichungen des Systems (IV) nur Strahlschwingungen zulassen, und die beiden übrigen Gleichungen desselben beiden Systemen gemeinsam sind, so sind sonach die Grenzgleichungen (IV) den Strahlschwingungen als solchen eigenthümlich.

Bedenkt man jetzt, um alles Gesagte zusammenzufassen, dass einmal diese letzteren Uebergangsbedingungen als ein zusammenhängendes Ganzes direct aus der Elasticitätstheorie ableitbar sind, — dass ferner in den anisotropen Medien die Molecüle der Strahlrichtung vermöge des jeweiligen Grades ihrer Beweglichkeit die eigentliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingen und daher die Wellenfläche im Gegensatz zur Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen die natürliche Elementarfläche ist, — dass auch die Theorie der inneren Fortpflanzung eine endlich ausgedehnte Fläche gleiche Phasen nirgends zur nothwendigen Voraussetzung hat, sodass selbst Kirchhoff gerade den Umstand, dass parallel der Strahlrichtung eine plötzliche Discontinuität der Schwingungsbewegung möglich ist, für die Definition des Strahlbegriffes verwerthet, — dass aber doch andererseits die zur Huygens'schen Construction erforderlichen endlichen Flächen mit nahezu gleicher Schärfe und nach demselben Verfahren, mit welchem die Analysis überhaupt operirt, sich aus geraden Strahlparallelepipeden zusammensetzen lassen, — und dass endlich auch die ältere mathematische Behandlung an sogenannten quasitransversalen Schwingungen niemals Anstoss genommen hat, so dürfte es hiernach wohl vorläufig als erwiesen gelten, dass die Schwingungen im Inneren der doppeltbrechenden Mittel senkrecht stehen auf der Strahlrichtung als der Normalen des zugehörigen wahren Wellenelementes und daher schief auf der Normalrichtung der endlich ausgedehnten (scheinbaren) Gesammtwelle.

Erst durch Aufstellung dieses Satzes, der übrigens auch von Anderen schon vermuthungsweise ausgesprochen ist, erhält der Strahl für die neuere Auffassung dieselbe principielle hohe Bedeutung, wie sie die Normale für die Theorie Neumann's hat.

2. Gehen wir jetzt von diesem Standpunkte an die Anwendung der Grenzgleichungen (IV) auf anisotrope Mittel. Von den beiden sich berührenden Medien sei der Einfachheit wegen das erste der Weltäther, das zweite ein irgendwie orientirter absorbirender Krystall. Wir betrachten diesmal die Bewegungen, welche die beiden Grenzparallelepipeda unter dem Einflusse der einfallenden, reflectirten und durchgehenden Strahlen ausführen. Die Winkel dieser Strahlen zu den Coordinatenaxen seien gegeben, ihre Cosinus heissen für die beiden gebrochenen u, v, w, das Geschwindigkeitsverhältniss des Lichtes in beiden Mitteln sei $V/\omega_s = \nu$ und der zugehörige Extinctionscoëfficient q. Die Componenten der gebrochenen Schwingungen haben alsdann die allgemeine Form:

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \mathfrak{D}_x\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux+vy+wz)}{\lambda} - \chi_x\right) \\ \eta = \mathfrak{D}_y\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux+vy+wz)}{\lambda} - \chi_y\right) \\ \zeta = \mathfrak{D}_z\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} qz} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux+vy+wz)}{\lambda} - \chi_z\right). \end{cases}$$

Und was die einfallende und gespiegelte Schwingung betrifft, so möge die XZ-Ebene mit der Einfallsebene zusammenfallen, der Einfallswinkel heisse e, und die Amplituden parallel und senkrecht zur Einfallsebene nenne man $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{R}_p$, resp. $\mathfrak{E}_s$, $\mathfrak{R}_s$.

Die Gleichungen (IV) geben dann in bekannter Weise folgende Integralformen, in welchen überall Kürze halber $\nu w = p$ gesetzt ist:

$$\begin{cases} \cos e[\mathfrak{E}_p \sin\varphi + \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_R^p)] = \Sigma\mathfrak{D}_x \sin(\varphi - \chi_x) \\ \mathfrak{E}_p \sin\varphi - \mathfrak{R}_p \sin(\varphi - \chi_R^p) = \Sigma\mathfrak{D}_x[p\sin(\varphi-\chi_x) - q\cos(\varphi-\chi_x)] \\ \qquad - \Sigma\mathfrak{D}_z\, \nu u \sin(\varphi - \chi_z) \\ \mathfrak{E}_s \sin\varphi + \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_R^s) = \Sigma\mathfrak{D}_y \sin(\varphi - \chi_y) \\ \cos e[\mathfrak{E}_s \sin\varphi - \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_R^s)] = \Sigma\mathfrak{D}_y[p\sin(\varphi-\chi_y) - q\cos(\varphi-\chi_y)] \\ \qquad - \Sigma\mathfrak{D}_z\, \nu v \sin(\varphi - \chi_z). \end{cases}$$

Dazu kommen die beiden Incompressibilitätsbedingungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{D}_x \nu u \sin(\varphi - \chi_x) + \mathfrak{D}_y \nu v \sin(\varphi - \chi_y) \\ + \mathfrak{D}_z[p\sin(\varphi - \chi_z) - q\cos(\varphi - \chi_z)] = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man für ein sogenanntes uniradiales Azimuth die beiden ersten und letzten der Gl. (5) und addirt die Producte, so entsteht unter Zuziehung der Gl. (6) die Beziehung:

$$\begin{aligned}\cos e\,[\mathfrak{E}^2 \sin^2\varphi - \mathfrak{R}_p{}^2 \sin^2(\varphi - \chi_R^p) - \mathfrak{R}_s{}^2 \sin^2(\varphi - \chi_R^s)] \\ = \mathfrak{D}_x{}^2 \sin(\varphi - \chi_x)\,[p \sin(\varphi - \chi_x) - q\cos(\varphi - \chi_x)] \\ + \mathfrak{D}_y{}^2 \sin(\varphi - \chi_y)\,[p \sin(\varphi - \chi_y) - q\cos(\varphi - \chi_y)] \\ + \mathfrak{D}_z{}^2 \sin(\varphi - \chi_z)\,[p \sin(\varphi - \chi_z) - q\cos(\varphi - \chi_z)]\,.\end{aligned}$$

Es ist dieselbe, die man bei Benutzung der Gleichung (3) unmittelbar und allgemeiner erhalten haben würde. Wir multipliciren beide Seiten derselben mit dt und integriren über die Zeiteinheit. Alsdann ergibt sich:

$$\cos e\,(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}_p{}^2 - \mathfrak{R}_s{}^2) = p\,(\mathfrak{D}_x{}^2 + \mathfrak{D}_y{}^2 + \mathfrak{D}_z{}^2)\,.$$

Hierfür schreibt sich kürzer und in Rücksicht auf die Bedeutung von p und ν:

$$(7)\qquad \begin{cases} V\cos e\,(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = \omega\cos r\,\mathfrak{D}^2\nu^2 \\ M(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = M_D\,\mathfrak{D}^2\nu^2, \end{cases}$$

wo die äquivalenten Volumina durch M, M_D bezeichnet sind. Es ist dies die Fresnel'sche Gleichung der lebendigen Kräfte, die sonach auch für absorbirende Mittel bedingungsweise gültig bleibt.

Wenn nämlich — und zwar sowohl nach Neumann wie nach Fresnel — der Gleichung der lebendigen Kräfte a priori die Form beizulegen ist:

$$M(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = M_D\,\mathfrak{D}^2 + M_D'\,\mathfrak{D}_o'^2,$$

so setzt darin Neumann die Totalamplitude $\mathfrak{D}_o'$ der Körpertheilchen $= 0$, während wir letztere mittelst der im ersten Theile dieser Abhandlung (p. 411) aufgestellten Gleichung (23) eliminiren und so vorstehende Fresnel'sche Form erhalten. Ich constatire bei diesem Anlass meinen Gegnern gegenüber nochmals, dass hier der erste Hauptsatz unserer Dispersionstheorie direct in die Reflexionstheorie hineinragt und in dieser seiner doppelten Bedeutung durch keinen anderen ersetzt werden kann.

Um die Gleichungen (5) praktisch verwendbar zu machen, führe man die complexe symbolische Amplitude ein:

$$\mathfrak{A}\,(\cos\chi + \sqrt{-1}\,\sin\chi) = A,$$

und bringe sie nach bekanntem Verfahren auf die Gestalt:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\cos e\,(\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p) = \Sigma D_x \\
\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p = \Sigma[D_x\,(p + q\sqrt{-1}) - D_z \nu u] \\
\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s = \Sigma D_y \\
\cos e\,(\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s) = \Sigma[D_y\,(p + q\sqrt{-1}) - D_z \nu v]
\end{cases}
$$

$$
D_x \nu u + D_y \nu v + D_z(p + q\sqrt{-1}) = 0.
$$

Betrachtet man $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{E}_s$, e, ferner ν, q; u, v, w als gegebene Grössen, so genügen diese Gleichungen zunächst für einstrahlige Azimuthe zur expliciten Berechnung der fünf Unbekannten $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_s$; D_x, D_y, D_z.

So lange v nicht $= 0$ ist, sind die entstehenden Einzelausdrücke wenig symmetrisch. Um indess von der Form dieser Functionen eine Anschauung zu geben, will ich sie für den Specialfall $q = 0$ hinschreiben. Man erhält ($\nu = n$ gesetzt) zunächst:

$$
(9)\quad \begin{cases}
D_y = \dfrac{2}{N}\left\{\mathfrak{E}_s\left[n\,(u^2 + w^2) + \dfrac{w}{\cos e}\right] - \mathfrak{E}_p \dfrac{n u v}{\cos e}\right\}, \\
-D_x = \dfrac{2}{N}\left\{\mathfrak{E}_s\, n u v - \mathfrak{E}_p\left[w + \dfrac{n\,(v^2 + w^2)}{\cos e}\right]\right\}, \\
-D_z = \dfrac{2}{N}\left\{\mathfrak{E}_s\, v\left(\dfrac{1}{\cos e} + n w\right) + \mathfrak{E}_p u\left(1 + \dfrac{n w}{\cos e}\right)\right\}, \\
N = \dfrac{w}{\cos e}(1 + n^2) + \dfrac{n\,(v^2 + w^2)}{\cos^2 e} + n\,(u^2 + w^2).
\end{cases}
$$

Und daraus weiter:

$$
(10)\quad \begin{cases}
\mathfrak{R}_s = \dfrac{\mathfrak{E}_s\left[\dfrac{w}{\cos e}(1 - n^2) + n\left(u^2 + w^2 - \dfrac{v^2 + w^2}{\cos^2 e}\right)\right] - 2\,\mathfrak{E}_p \dfrac{n u v}{\cos e}}{\dfrac{w}{\cos e}(1 + n^2) + n\left(u^2 + w^2 + \dfrac{v^2 + w^2}{\cos^2 e}\right)}, \\
\mathfrak{R}_p = \dfrac{\mathfrak{E}_p\left[\dfrac{w}{\cos e}(1 - n^2) - n\left(u^2 + w^2) - \dfrac{v^2 + w^2}{\cos^2 e}\right)\right] - 2\,\mathfrak{E}_s \dfrac{n u v}{\cos e}}{\dfrac{w}{\cos e}(1 + n^2) + n\left(u^2 + w^2 + \dfrac{v^2 + w^2}{\cos^2 e}\right)}.
\end{cases}
$$

Für $v = 0$ reduciren sich sonach diese beiden Amplituden des reflectirten Lichtes auf die gemeinsame Form:

$$
\mathfrak{R} = \frac{\dfrac{\cos r}{\cos e}(1 - n^2) \pm n\left(1 - \dfrac{\cos^2 r}{\cos^2 e}\right)}{\dfrac{\cos r}{\cos e}(1 + n^2) + n\left(1 + \dfrac{\cos^2 r}{\cos^2 e}\right)}\,\mathfrak{E},
$$

wo $w = \cos r$ gesetzt ist. Für isotrope Mittel insbesondere, für welche zudem $n = \sin e / \sin r$ ist, gehen sie nach einigen Reductionen über in:

$$(11) \quad R_s = -\frac{n\cos r - \cos e}{n\cos r + \cos e}\mathfrak{E}_s, \quad R_p = -\frac{n\cos e - \cos r}{n\cos e + \cos r}\mathfrak{E}_p.$$

Die letztere dieser Formen gilt auch für den Hauptschnitt anisotroper Mittel.

Um schliesslich auf absorbirende Krystalle zurückzukommen, so lässt sich denselben neben dem physikalischen Geschwindigkeitsverhältniss ν_s ein complexes:

$$(12) \qquad n_s = a_s + b_s\sqrt{-1}$$

zuordnen, sofern man neue Variable u_c, v_c, w_c als complexe Cosinus der Strahlrichtung ansieht und zwischen diesen und den entsprechenden früheren Grössen die Beziehungen aufstellt:

$$\nu u = n u_c, \quad \nu v = n v_c, \quad p + q\sqrt{-1} = n w_c,$$
$$u_c^2 + v_c^2 + w_c^2 = 1.$$

Man erhält daraus für n_s den Werth:

$$(13) \qquad n_s^2 = \nu^2 \sin^2 r + (p + q\sqrt{-1})^2,$$

sofern ja: $u^2 + v^2 = 1 - w^2 = \sin^2 r$ gesetzt werden kann. Wird mit Hülfe dieser Definitionen beispielsweise der letzte Intensitätsausdruck (11) umgeformt, so erhält er die Gestalt:

$$(14) \qquad R = -\frac{(a + b\sqrt{-1})^2 \cos e - (p + q\sqrt{-1})}{(a + b\sqrt{-1})^2 \cos e + (p + q\sqrt{-1})}\mathfrak{E};$$

sie ist die gleiche wie für isotrope Mittel. Der in einer früheren Abhandlung[1]) aufgestellte abweichende Ausdruck, in welchem alle Variablen statt auf die Strahlrichtung auf die Normalrichtung bezogen werden sollten, enthält dagegen noch einen von Doppelbrechungsvermögen und Richtung abhängigen Factor, mit welchem die zweiten Klammern zu multipliciren sind.

3. Was schliesslich die Abhängigkeit der variablen Brechungsverhältnisse ν, (p), a und der variablen Extinctionsverhältnisse q, b von der Orientirung der bezüglichen Schwingungs-

1) Ketteler, Berl. Ber. 1879. p. 919.

richtung zu den Krystallaxen betrifft, so bedingen bekanntlich erstere die Doppelbrechung, letztere den Pleochroismus. Wir werden nun im Folgenden die Lichtbewegung im Inneren der ponderabeln Mittel überhaupt und der anisotropen insbesondere an die Voraussetzung knüpfen, dass bei derselben weder der intermoleculare Aether, noch auch die Körpertheilchen Dichtigkeitsänderungen erleiden, dass also seitens beider die respectiven Bedingungen erfüllt werden:

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \qquad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = 0.$$

Die allgemeinsten Integrale dieser Gleichungen, welch letztere wir nach den Erörterungen auf p. 638 auf beliebig ausgedehnte Wellenebenen beziehen dürfen, haben für die Aethertheilchen die Form:

$$\text{(VI}_a\text{)} \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}_x\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x), \qquad \eta = \mathfrak{A}_y\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y), \\ \zeta = \mathfrak{A}_z\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z). \end{cases}$$

Und für die Körpertheilchen:

$$\text{(VI}_b\text{)} \quad \begin{cases} \xi' = \mathfrak{A}'_x\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x - \Delta_x), \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y - \Delta_y), \\ \zeta' = \mathfrak{A}'_z\, e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z - \Delta_z), \end{cases}$$

Ausdrücke, in welchen E und φ die Bedeutung haben:

$$E = \frac{2\pi}{\lambda}(u_0 x + v_0 y + w_0 z), \qquad \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda}\right).$$

Bei Einführung derselben werden die Gleichungen (V):

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}_x \sqrt{\nu^2 u^2 + q^2 u_0^2}\, \sin(\varphi - \delta_x - \vartheta_x) \\ + \mathfrak{A}_y \sqrt{\nu^2 v^2 + q^2 v_0^2}\, \sin(\varphi - \delta_y - \vartheta_y) + \ldots = 0, \\ \mathfrak{A}'_x \sqrt{\nu^2 u^2 + q^2 u_0^2}\, \sin(\varphi - \delta_x - \vartheta_x - \Delta_x) \\ + \mathfrak{A}'_y \sqrt{\nu^2 v^2 + q^2 v_0^2}\, \sin(\varphi - \delta_y - \vartheta_y - \Delta_y) + \ldots = 0, \end{gathered}$$

sofern nämlich abkürzungsweise gesetzt wird:

$$\operatorname{tg} \vartheta_x = \frac{q u_0}{\nu u}, \qquad \operatorname{tg} \vartheta_y = \frac{q v_0}{\nu v}, \qquad \operatorname{tg} \vartheta_z = \frac{q w_0}{\nu w}.$$

Spaltet man jede derselben in zwei einzelne, so ist die Coëxistenz aller vier Gleichungen an die folgenden Bedingungen geknüpft:

$$
(15) \begin{cases} \mathfrak{A}_x\sqrt{v^2u^2+q^2u_0{}^2}+\mathfrak{A}_y\sqrt{v^2v^2+q^2v_0{}^2}+\mathfrak{A}_z\sqrt{v^2w^2+q^2w_0{}^2}=0, \\ \dfrac{\mathfrak{A}'_x}{\mathfrak{A}_x}=\dfrac{\mathfrak{A}'_y}{\mathfrak{A}_y}=\dfrac{\mathfrak{A}'_z}{\mathfrak{A}_z}=\dfrac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}, \\ \delta_x+\vartheta_x=\delta_y+\vartheta_y=\delta_z+\vartheta_z, \quad \varDelta_x=\varDelta_y=\varDelta_z=\varDelta. \end{cases}
$$

Dementsprechend sind die Verhältnisse der zusammengehörigen axialen Amplituden der Körper- und Aethertheilchen von der Orientirung unabhängig, und sind die axialen Phasenunterschiede einander gleich. Sofern nun die Schwingungen parallel den Symmetrieaxen, die hier auch die Coordinatenaxen sein mögen, den Gesetzen der isotropen Medien folgen, für letztere aber dem ersten Theil dieser Arbeit zufolge (p. 408) die Ausdrücke bestehen:

$$
\frac{m'\mathfrak{A}'}{m\mathfrak{A}}=\frac{C}{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}-1\right)^2+G^2\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}}}, \quad \operatorname{tg}\varDelta=\frac{G\dfrac{\lambda}{\lambda_m}}{\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m{}^2}-1},
$$

so ergibt sich nunmehr:

$$
(16) \quad \begin{cases} C_x=C_y=C_z=C, \quad \lambda_x{}^2=\lambda_y{}^2=\lambda_z{}^2=\lambda_m{}^2, \\ G_x=G_y=G_z=G\,^{1)}, \end{cases}
$$

sodass auch die Molecularkräfte sich nach Eigenschwingung und Dämpfung für alle Richtungen gleich verhalten.

Zu den nämlichen Bedingungen gelangt man durch Einsetzen der Ausdrücke (VI) in die obigen Gleichungen (I), sodass diese letzteren mit den Incompressibilitätsbedingungen verträglich sind. Die in ihnen vorkommende Constante C' ist für anisotrope Medien mit der Richtung des Strahles veränderlich und soll nunmehr als Function derselben bestimmt werden.

Es seien zu dem Ende die Coordinatenaxen wieder auch die Symmetrieaxen des vorläufig als einfach angenommenen

1) Vgl. Voigt, Wied. Ann. **17**. p. 468. 1882. — Nichts hindert übrigens, aus zwei heterogenen Molecularqualitäten ein zusammengesetztes Mittel derart herzustellen, dass der Effect der gleiche ist wie bei einem einfachen Mittel mit axial verschiedenen Werthen von λ_m und G.

ponderablen Gefüges. Denkt man sich die Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen (wie in einem durchsichtigen Mittel) zunächst als geradlinig, und legt man den letzteren die Fähigkeit bei, wenigstens für sich nicht blos transversal, sondern auch longitudinal vibriren zu können, so lässt sich die variable transversale Beschleunigungscomponente der Gleichungen (I) durch eine transversale und eine longitudinale ersetzen. Wir schreiben nämlich:

$$(\mathrm{VII})\quad\left\{\begin{aligned} m'\frac{d^2\xi'_t}{dt^2}C' + m'\frac{d^2\xi'_l}{dt^2}K &= m'\frac{d^2\xi'_t}{dt^2}C'_x,\\ m'\frac{d^2\eta'_t}{dt^2}C' + m'\frac{d^2\eta'_l}{dt^2}K &= m'\frac{d^2\eta'_t}{dt^2}C'_y,\\ m'\frac{d^2\zeta'_t}{dt^2}C' + m'\frac{d^2\zeta'_l}{dt^2}K &= m'\frac{d^2\zeta'_t}{dt^2}C'_z\end{aligned}\right.$$

und verstehen unter C'_x, C'_y, C'_z diejenigen constanten Coëfficienten, welche sich den axialen Transversalschwingungen in fester und unabänderlicher Weise zuordnen, unter K endlich eine mit der Richtung veränderliche Grösse. Ohne uns vorläufig bei diesen Beziehungen aufzuhalten, benutzen wir sie sofort zur Umformung der Gleichungen (I). Die Substitution ergibt:

$$(\mathrm{VIII})\quad\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m'\frac{d^2\xi'_t}{dt^2}C'_x - m'\frac{d^2\xi'_l}{dt^2}K &= e\,\Delta_2\xi,\\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} + m'\frac{d^2\eta'_t}{dt^2}C'_y - m'\frac{d^2\eta'_l}{dt^2}K &= e\,\Delta_2\eta,\\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} + m'\frac{d^2\zeta'_t}{dt^2}C'_z - m'\frac{d^2\zeta'_l}{dt^2}K &= e\,\Delta_2\zeta\end{aligned}\right.$$

Gleichungen, die jetzt, abgesehen von ihrer Herleitung, als neue selbständige Formen behandelt werden sollen.

Die Möglichkeit einer derartigen Deutung, wie sie hier dem dritten Gliede der linken Seite gegeben ist, darf ich wohl ohne Zweifel (neben dem Dispersionsgesetze) als einen ferneren Erfolg des allgemeinen Princips der Wechselwirkung der Schwingungen ansehen.

Bei der Integration dieser Gleichungen lassen wir wieder der Allgemeinheit wegen Extinctions- und Propagationsrichtung nicht zusammenfallen, und indem wir den Aus-

drücken (VI_a) und (VI_b) für die Transversalschwingungen die folgenden:

$$(VI_c)\quad \begin{cases} \xi_l' = \mathfrak{A}_x'' e^{qE} \cos(\varphi - \delta_x - \Delta_x), \\ \eta_l' = \mathfrak{A}_y'' e^{qE} \cos(\varphi - \delta_y - \Delta_y), \\ \zeta_l' = \mathfrak{A}_z'' e^{qE} \cos(\varphi - \delta_z - \Delta_z) \end{cases}$$

für die Longitudinalschwingungen hinzufügen, soll fortan in allen gesetzt werden:

$$(17)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_x : \mathfrak{A}_y : \mathfrak{A}_z = \mathfrak{A} U : \mathfrak{A} V : \mathfrak{A} W, \\ \mathfrak{A}_x' : \mathfrak{A}_y' : \mathfrak{A}_z' = \mathfrak{A}' U : \mathfrak{A}' V : \mathfrak{A}' W, \\ \mathfrak{A}_x'' : \mathfrak{A}_y'' : \mathfrak{A}_z'' = \mathfrak{A}'' u : \mathfrak{A}'' v : \mathfrak{A}'' w. \end{cases}$$

Führt man jetzt diese Ausdrücke unter Berücksichtigung der Bedingungen (15) in Gl. (VIII) ein, so geht z. B. die erste über in:

$$m\,\mathfrak{A} U \cos\varphi + m'\,\mathfrak{A}' U C_x' \cos(\varphi - \Delta) - m'\,\mathfrak{A}'' u K \cos(\varphi - \Delta)$$
$$= m\,\mathfrak{A} U [(\nu^2 - q^2)\cos\varphi + 2\,\nu\,q \cos\varrho \sin\varphi],$$

wo ϱ, welches definirt ist durch:

$$(17_b)\quad \cos\varrho = u\,u_0 + v\,v_0 + w\,w_0,$$

den Winkel zwischen Extinctions- und Propagationsrichtung bedeutet. Sie zerfällt in die beiden folgenden:

$$(m'\,\mathfrak{A}' U C_x' - m'\,\mathfrak{A}'' u K)\cos\Delta = m\,\mathfrak{A} U (\nu^2 - q^2 - 1),$$
$$(m'\,\mathfrak{A}' U C_x' - m'\,\mathfrak{A}'' u K)\sin\Delta = m\,\mathfrak{A} U\, 2\,\nu\,q \cos\varrho,$$

und man erhält durch Division, resp. Quadrirung und Addition:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2\,\nu\,q\cos\varrho}{\nu^2 - q^2 - 1},$$

$$m'\mathfrak{A}' U C_x' - m'\mathfrak{A}'' u K = m\mathfrak{A} U \sqrt{(\nu^2 - q^2 - 1)^2 + 4\,\nu^2 q^2 \cos^2\varrho}$$
$$= m'\mathfrak{A}' U C',$$

sofern in Uebereinstimmung mit Gl. (I) die neue Variable C' eingeführt wird. Bei Hinzufügung der beiden anderen analogen Beziehungen folgt sonach das System der drei simultanen Gleichungen:

$$(18)\quad \begin{cases} (C_x' - C')U = K\dfrac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'}u, \qquad (C_y' - C')V = K\dfrac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'}v, \\ \qquad\qquad (C_z' - C')W = K\dfrac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}'}w, \end{cases}$$

deren Form für durchsichtige und undurchsichtige Mittel ersichtlich gleich ist. Sind aber die hier vorkommenden Va-

riabeln vom Winkel ϱ unabhängig, und unterscheiden sich ebenso die Beziehungen:

(19) $\operatorname{tg} \Delta = \frac{2\nu q \cos\varrho}{\nu^2 - q^2 - 1}, \quad \frac{m'\mathfrak{A}'C'}{m\mathfrak{A}} = \sqrt{(\nu^2 - q^2 - 1)^2 + 4\nu^2 q^2 \cos^2\varrho}$,

in nichts von denen der isotropen Mittel, so folgt weiter:

$$(20) \quad \begin{cases} \nu^2 - q^2 - 1 = a^2 - b^2 - 1 = \frac{m'\mathfrak{A}' \cos\Delta}{m\mathfrak{A}} C' \\ 2\nu q \cos\varrho = 2ab = \frac{m'\mathfrak{A}' \sin\Delta}{m\mathfrak{A}} C', \end{cases}$$

wo a und b die Specialwerthe von ν und q sind für die Bedingung $\varrho = 0$, d. h. für senkrechten Eintritt des Lichtes in einen Krystall.

Setzen wir schliesslich zur Abkürzung:

(21) $\sqrt{(\nu^2 - q^2 - 1)^2 + 4\nu^2 q^2 \cos^2\varrho} = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2 b^2} = N^2 - 1$,

so schreiben sich die Gleichungen (VIII), resp. (18) auch so:

$$(22) \quad \begin{cases} [(N_x^2 - 1) - (N^2 - 1)]\, U = (N^2 - 1)\,\mathfrak{K} u = N^2 \mathfrak{K}' u \\ [(N_y^2 - 1) - (N^2 - 1)]\, V = (N^2 - 1)\,\mathfrak{K} v = N^2 \mathfrak{K}' v \\ [(N_z^2 - 1) - (N^2 - 1)]\, W = (N^2 - 1)\,\mathfrak{K} w = N^2 \mathfrak{K}' w. \end{cases}$$

Wir nehmen fortan in undurchsichtigen wie durchsichtigen Mitteln die Richtung u, v, w senkrecht zur Richtung U, V, W, sodass zwischen beiden die Bedingung besteht:

$$(23) \qquad Uu + Vv + Ww = 0;$$

dieselbe fällt zwar nur in den Specialfällen $b = \Delta = 0$, resp. $\varrho = 0$ mit den allgemeinen Incompressibilitätsbedingungen (V, resp. 15_a) als solchen zusammen, ist aber bei der Form der Gleichungen (18) und (22) selbstverständlich. Mittelst derselben leitet man aus letzteren nach bekanntem Verfahren diejenige Reihe von Flächen her, welche für $b = \Delta = 0$ mit den von Fresnel entdeckten übereinstimmen. $\mathfrak{K}$ ist die trigonometrische Tangente zwischen den Richtungen $\mathfrak{A}'$ und $\sqrt{\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{A}''^2}$.

Construiren wir insbesondere die Fläche:

$$(24) \qquad \frac{u^2}{N_x^2 - N^2} + \frac{v^2}{N_y^2 - N^2} + \frac{w^2}{N_z^2 - N^2} = 0,$$

und zwar in der doppelten Weise, dass wir die Radien Vectoren einmal durch $r^2 = 1/(N^2 - 1)$ und sodann durch $r^2 = 1/N^2$ bestimmt sein lassen, so repräsentirt die erstere die Verthei-

lung der brechenden Kraft des wellenbildenden Aethers, wie sie im Inneren des Krystalles dem gegebenen Arbeitsverhältniss $m'\mathfrak{A}'C/m\mathfrak{A}$ unabhängig von der Reibung entspricht. Die zweite bestimmt die Form der elementaren Welle, die sich um einen inneren Punkt herum entwickeln würde, wenn die stattfindende Reibung ohne Aenderung des vorstehenden Arbeitsverhältnisses vernichtet werden könnte; sie ist charakteristisch für die Fortpflanzungsverhältnisse und heisse daher die reducirte Wellenfläche.

Für eine gegebene Lage der Trennungsfläche, welche den Lichtübergang von aussen her vermittelt, und bei gegebener äusserer Wellenebene gibt es unendlich viele nebeneinander liegende solcher Flächen mit continuirlich abnehmenden Radien. Sie alle werden berührt durch eine Ebene, die, sei es der Gleichung:

$$\frac{u'^2(N_x^2-1)}{N_x^2-N'^2}+\frac{v'^2(N_y^2-1)}{N_y^2-N'^2}+\frac{w'^2(N_z^2-1)}{N_z^2-N'^2}=0,$$

oder der Gleichung:

$$(25)\qquad \frac{u_n^2 N_x^2}{N_x^2-N_n^2}+\frac{v_n^2 N_y^2}{N_y^2-N_n^2}+\frac{w_n^2 N_z^2}{N_z^2-N_n^2}=0$$

genügt. Für uns kommt nur die letztere in Betracht, sofern sie für durchsichtige Mittel, d. h. für die Bedingung $b=\varDelta=0$ mit der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen zusammenfällt. Der Winkel zwischen den zusammengehörigen Radien der Flächen (24) und (25) ist in diesem Falle der Winkel δ zwischen Strahl und Normale, die Berührungsebene ist parallel der Wellenebene als Ebene gleicher Phasen, und es besteht das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin E}{\sin r_n}=\frac{N_s}{\cos\delta}=N_n.$$

Ertheilt man dann den Aether- und Körpertheilchen der betrachteten Strahlrichtung caeteris paribus den Phasenunterschied $\varDelta$, so ändert sich die Fortpflanzungs- (und Absorptions-) Geschwindigkeit, und das Geschwindigkeitsverhältniss N_s geht über in ν_s (und q_s), entsprechend der ersten der beiden aus den Gleichungen (20) ableitbaren Beziehungen:

(26) $$\begin{cases} 2\nu^2 = +(a^2-b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2\,\mathrm{tg}^2\varrho}\,, \\ 2q^2 = -(a^2-b^2) + \sqrt{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2\,\mathrm{tg}^2\varrho}\,. \end{cases}$$

Zugleich aber verschiebt sich die Ebene gleicher Phasen, weil ja alle continuirlich einander folgenden Endpunkte der Strahlen parallel fortrücken, um ein paralleles Stück. Man hat dann bei constant gebliebenem Winkel δ, aber irgend einem geänderten Einfallswinkel e:

(27) $$\frac{\sin e}{\sin r_n} = \frac{\nu_s}{\cos\delta} = \nu_n$$

und sonach schliesslich:

(28) $$\mathfrak{K}' = \mathrm{tg}\,\delta = \frac{N_x{}^2 Uu + N_y{}^2 Vv + N_z{}^2 Ww}{N^2},$$

welcher Ausdruck nur abhängt von den Beschleunigungsverhältnissen der Aether- und Körpertheilchen, nicht dagegen von der Reibung.

Die durch den Winkel ϱ mit der Propagationsrichtung (Strahl) zusammenhängende Extinctionsrichtung verhält sich übrigens in anisotropen Medien ganz so wie in isotropen (vgl. p. 635).

Vorstehende sich auf einfache Medien beziehende Betrachtung hier auch auf zusammengesetzte auszudehnen, dürfte um deshalb unnöthig sein, da ich bereits an einem anderen Orte[1]) ausführliche Entwickelungen darüber gegeben und insbesondere die Erscheinung der sogenannten Dispersion der Axen auf unsymmetrische Molecularaggregationen zurückgeführt habe.

III. Die Totalreflexion der Doppelbrechung.

Nach meinen früheren Untersuchungen[2]) ist bekanntlich die Totalreflexion ein ideeller Grenzfall, der nur ideell durchsichtigen Mitteln zukommt, aber nichtsdestoweniger von einem eigenartigen, absorptionsähnlichen Vorgange begleitet ist. Die vollständige Theorie derselben habe ich früher für isotrope Mittel durchgeführt und möchte sie hier auch für die anisotropen andeuten.

1) Ketteler, Berl. Ber. 1879. p. 903.
2) Ketteler, Carl's Rep. 16. p. 261. 1880. — Beibl. 4. p. 879. 1880.

Was zunächst die Vorfrage betrifft, an welche Bedingungen die Totalreflexion dieser Medien geknüpft sei, so entscheidet sich dieselbe dadurch, dass man die Intensitätsausdrücke (10) in die Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}_p^2 + \mathfrak{R}_s^2 = \mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{E}_s^2 = \mathfrak{E}^2$$

einführt. Man findet so leicht, dass es ganz allgemein genügt:

$$(29_a) \qquad w_s = 0$$

zu setzen, welches auch immer die zugehörigen Werthe von v_s und u_s, und welches ebenso die Werthe von w_n und u_n der beigeordneten Normale sein mögen. Es muss folglich stets der gebrochene Strahl, nicht dagegen auch die gebrochene Normalrichtung der Trennungsfläche parallel sein. Im Folgenden beschränke ich mich auf die Besprechung der Vorgänge in den Hauptschnitten, für welche $v_s = v_n = 0$.

Knüpfen wir zunächst an den Intensitätsausdruck (11), so wird der Werth des Bruches für die Bedingung:

$$\cos r_s = 0, \qquad r_s = 90^0$$

gleich Eins. Und daher leitet sich für die Grösse des Grenzwinkels (e') aus der bezüglichen einfachen Figur unmittelbar ab:

$$\sin e' = \frac{V}{\omega_s} = n_s.$$

Zu dieser nämlichen Bedingung gelangt man auch durch Benutzung des Brechungsgesetzes der Wellennormalen:

$$\frac{\sin e}{\sin r_n} = \frac{V}{\omega_s \cos \delta} = n_n,$$

sofern man darin $r_n = r_s \pm \delta$ und hierin $r_s = 90^0$ nimmt. Man erhält so:

$$\frac{\sin e'}{\sin (90 \pm \delta)} = \frac{n_s}{\cos \delta}, \qquad \sin e' = n_s.$$

Sehr übersichtlich werden diese Beziehungen, wenn man mit Hülfe der um den Einfallspunkt construirten Huygens'schen Ellipse die zusammengehörigen Strahlen und Normalen zeichnet, welche gleich grossen rechts und links liegenden Grenzwinkeln entsprechen, für welche eben $\pm e'$ und $\pm \delta$ sich einander zuordnen.

Ich würde diese Verhältnisse, die schon seit Aufstellung der identischen Reflexionsformel Neumann's klar liegen, hier nicht zur Sprache gebracht haben, wenn nicht vor mehreren Jahren Hr. W. Kohlrausch[1]) seine Versuche über Totalreflexion zwar nach der richtigen allgemeineren Formel ($\vartheta =$ Winkel zwischen Schwingungs- und Einfallsebene):

$$(29_b) \qquad \frac{\sin e'}{\sin[\text{arc ctg}(\text{tg}\,\delta\cos\vartheta)]} = n_n\ ^{2)}$$

oder vielmehr nach der für kleine δ genügenden Näherungsformel:

$$\frac{\sin e'}{\sin(90 - \delta\cos\vartheta)} = n_n$$

berechnet, aber diese letztere statt aus allgemeingültigen theoretischen Sätzen aus ganz speciellen Erwägungen abgeleitet hätte.

Knüpfen wir endlich an den Intensitätsausdruck (14) für undurchsichtige Mittel und beachten dabei, dass die Verbindung der Gleichungen (20), in welchen $\varrho = r$ ($= 90^0$) zu setzen ist, zu den Formen führt:

$$(30) \qquad \nu^2 - q^2 = a^2 - b^2, \qquad \nu q\cos r = pq = ab.$$

Diese wie Ausdruck (14) unterscheiden sich aber in gar nichts von den entsprechenden der isotropen Mittel, und daher gestaltet sich die weitere Behandlung genau wie bei letzteren.

IV. Zur Theorie der bewegten Medien.

Wenn man der gegenwärtigen Auffassung über die Bedeutung des Strahles vor der früher vorgetragenen den Vorzug gibt, so wird dieselbe ausnahmslos auf alle Medien zu übertragen sein, in welchen Strahl und Normale auseinandertreten. Hierhin gehören insbesondere die bewegten Mittel.

In der That habe ich bereits gelegentlich gezeigt[3]), dass für die Entwickelung der Fortpflanzungsgesetze im Inneren bewegter einfach und doppelt brechender Mittel die Strahlrichtung sich noch aus ganz speciellen, für diese Mittel

1) W. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 86 und **7.** p. 427. 1879.

2) Folgt aus: $\cos r_s = \cos\delta\cos r_n - \sin\delta\sin r_n\cos\vartheta = 0$.

3) Ketteler, Wied. Ann. **7.** p. 126. 1879.

charakteristischen Gründen vor der Normalrichtung empfiehlt. Habe ich andererseits die Intensitätsbestimmung des gespiegelten und gebrochenen Lichtes bisher nur immer auf letztere bezogen, so bin ich dazu durch die seit Cauchy üblich gewordene Verquickung der Uebergangsgleichungen mit den Snellius-Descartes'schen Gesetzen veranlasst worden. Erst später habe ich die Unmöglichkeit erkannt, diese letzteren aus den Grenzgleichungen deduciren zu können und demgemäss[1]) bereits den Satz ausgesprochen: „Im allgemeinsten Sinne stellt sich das Huygens'schen Princip als völlig coordinirt zu den Principien der Elasticität."

Auf eine speciellere Behandlung der bewegten Medien verzichte ich hier. Denn einmal hat sich in Deutschland für den in Rede stehenden Gegenstand kaum je ein nennenswerthes Interesse gezeigt, und andererseits habe ich die Richtung, in welcher die betreffenden Formeln zu ergänzen sind, in einem Buche[2]) bereits angedeutet, und bleiben insbesondere die früheren Entwickelungen über die Drehung der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes unter dem Einflusse der Erdbewegung ungeändert für diejenigen Richtungen bestehen, für welche Translation und Strahl zusammenfallen.

Auch die Dispersion der bewegten Mittel lässt sich seit Zulassung, resp. Begründung des constanten Gliedes n_∞ der Rechnung unterwerfen. Unter der Annahme, dass die Attribute λ_m, G, C, C' von der Translation unbeeinflusst bleiben, stellt sich bei Beleuchtung eines bewegten Prismas durch eine mitbewegte Lichtquelle die Compensation seitens der begleitenden Aberrationen um so vollständiger heraus, als die bezügliche Schwingungsdauer vom Maximum der Absorption entfernter ist.

V. Zur Theorie der circular und elliptisch polarisirenden Medien.

Bei diesem Anlass möge kurz erwähnt werden, dass Hr. Lommel in seiner bezüglichen Arbeit[3]) die drei Klassen

1) Ketteler, Wied. Ann. **3.** p. 300. 1878.
2) Ketteler, Astron. Undulationsth. Bonn, 1873.
3) Lommel, Wied. Ann. **14.** p. 523. 1881 u. **15.** p. 378. 1882.

der circular polarisirenden gewöhnlichen Mittel, der magnetischen Mittel und der elliptisch polarisirenden krystallisirten Mittel in der Weise behandelt, dass er gewichtige Eigenschaften derselben, deren innere Begründung recht eigentlich in die Differentialgleichungen hineingehört, äusseren Momenten entnimmt. Nennt man nämlich den Zahlenfactor der die Circularpolarisation der Flüssigkeiten bedingenden Glieder etwa $\mathfrak{g}$, so multiplicirt Hr. Lommel denselben, um zu den magnetischen Mitteln zu gelangen, mit $\cos\psi$ und für die elliptisch polarisirenden Mittel mit $\cos^2\psi$, wo ψ den Winkel zwischen Wellennormale und (Schrauben-)Axe bedeutet. Nun lässt sich freilich ersteres und zwar nicht blos durch Hinweis auf die Erfahrung, sondern auch durch eine selbständige rationelle Untersuchung als stichhaltig darthun. Ob solches auch bezüglich der krystallisirten Mittel zutrifft, dürfte um so mehr zu bezweifeln sein, als bei einer derartigen Behandlung jede Einheitlichkeit der Auffassung ausgeschlossen erscheint.

Lommel findet ferner die Drehung der Polarisationsebene nicht der ersten, sondern der zweiten Potenz der brechenden Kraft proportional. Das ist bekanntlich empirisch gleichbedeutend mit dem Quadrate der Dichtigkeit, indess steht diese Folgerung im Widerspruch mit den bezüglichen Biot'schen Gesetzen.

Dass endlich in den früher von mir gegebenen Formeln[1]) für die brechende Kraft der circular und elliptisch polarisirenden Mittel wieder der constante Betrag $(n_\infty^2 - 1)$ hinzuzufügen ist, versteht sich nach der betreffenden Entwickelung im ersten Theile dieses Aufsatzes wohl von selbst.

VI. Zu den Grenzgleichungen der electromagnetischen Lichttheorie.

Die von Maxwell aufgestellte und besonders von Hrn. Helmholtz fortgebildete electromagnetische Lichttheorie beruht bekanntlich auf den beiden Sätzen, dass erstens die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gleich sei dem Verhältniss des electrodynamischen und electrostatischen

1) Ketteler, Wied. Ann. **16.** p. 86. 1882.

Maasses der Electricität, und dass zweitens das Quadrat des Brechungsindex gleich sein soll dem Verhältniss zweier dielectrischer Polarisationen.

Im übrigen beruhen die theoretischen Entwickelungen dieser Theorie Helmholtz zufolge[1]) auf Vorstellungen, die jede Art von Reibung und folglich auch von Absorption ausschliessen. Ebenso fehlt denselben wenigstens zur Zeit noch der Begriff der Dispersion.

Dem zweiten hier aufgeführten Satze lässt sich seitens der elastischen Optik der zuerst von W. Sellmeier ausgesprochene Satz gegenüberstellen, dass die brechende Kraft $(n^2 - 1)$ gleich ist dem Verhältniss der Beschleunigungsarbeiten, resp. der lebendigen Kräfte der Körper- und Aethertheilchen, und dass daher auch das Quadrat des Brechungsindex gleich ist dem Verhältniss zweier Beschleunigungsarbeiten, entsprechend den beiden Gleichungen:

$$n^2 - 1 = \frac{m' \mathfrak{D}_o'^2}{m \mathfrak{D}^2}, \qquad n^2 = \frac{m \mathfrak{D}^2 + m' \mathfrak{D}_o'^2}{m \mathfrak{D}^2}.$$

Derselbe ist identisch mit dem ersten Hauptsatz der hier vorgetragenen Dispersionstheorie.

Wenn hiernach die Licht- und Electricitätsbewegung nicht blos im reinen Aether, sondern selbst in den aus zusammenschwingenden Aether- und Körpertheilchen bestehenden ponderablen Mitteln derart gleich erscheint, dass man dielectrische Polarisation und Beschleunigungsarbeit identificiren zu dürfen scheint, und dass man in letzteren die totale dielectrische Polarisation als aus einer der Aethertheilchen und einer der Körpertheilchen zusammengesetzt betrachten darf, so stehen freilich die von der electromagnetischen Theorie formulirten Grenzbedingungen hiermit in Widerspruch.

Bezüglich letzterer gibt es eine doppelte Richtung; die von Maxwell begründete englische — und als deren Vertreter darf man u. A. die Hrn. Glazebrook[2]) und Fitzgerald[3])

1) Helmholtz, Wied. Ann. **17.** p. 53. 1882.

2) Glazebrook, Phil. Mag. June p. 397. 1881. Vgl. oben p. 633.

3) Fitzgerald, Phil. Trans. 1880.

ansehen — kommt zu dem Resultat, dass die Polarisationsebene des Lichtes mit der Schwingungsebene zusammenfällt. Dagegen gelangt Hr. Lorentz[1]) auf Grund der Bewegungsgleichungen Helmholtz's zu der Folgerung, dass Polarisationsebene und Schwingungsebene auf einander senkrecht stehen.

Auf die theoretische Begründung dieser Grenzgleichungen gehe ich hier nicht ein. Lorentz gibt ihnen für zwei beliebige sich berührende Mittel und für Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene folgende Form:

$$\frac{1+a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2}, \qquad (1-a_1)v_1 \cos\alpha_1 = a_2 v_2 \cos\alpha_2.$$

Darin bedeuten 1, a_1, a_2 die Amplituden des einfallenden, gespiegelten und gebrochenen Lichtes, α_1 und α_2 Einfalls- und Brechungswinkel, v_1 und v_2 die entsprechenden Geschwindigkeiten. Endlich sind ε_1, ε_2 die Dielectricitätsconstanten, für welche die Beziehung gilt:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Denkt man sich als erstes Mittel den Weltäther ($n_1 = 1$), und identificirt man für denselben die elastischen und electromagnetischen Schwingungen, so lassen sich die Grenzgleichungen Hrn. Glazebrook's mit denen von Lorentz folgendermassen zusammenstellen:

	Glazebrook	Lorentz
$\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s =$	$\dfrac{a_s}{n}$	$\dfrac{a_s}{n^2}$
$\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s =$	$\dfrac{a_s \cos r}{n^2 \cos e}$	$\dfrac{a_s \cos r}{n \cos e}$
$\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p =$	$\dfrac{a_p \cos r}{n \cos e}$	$\dfrac{a_p \cos r}{n^2 \cos e}$
$\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p =$	$\dfrac{a_p}{n^2}$	$\dfrac{a_p}{n}$

Dabei bemerke ich, dass ich bezüglich letzterer der Kürze halber die von Lorentz durchgeführte Cauchy'sche Form durch die Fresnel'sche ersetzt habe.

1) Lorentz, Schlömilch's Zeitsch. f. M. **22.** Beibl. **1.** p. 92. 1877.

Ist es zwar seit Cauchy auch in der Optik ausser Uebung gekommen, die bezügliche Gleichung der lebendigen Kräfte hinzuzufügen, so möge sie hier doch mit aufgeführt werden; sie hat in beiden Systemen die identische Form:

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2 = a^2 \frac{\sin r}{\sin e} \frac{\cos r}{\cos e} \frac{1}{n^2}.$$

Wenn es nun meinerseits keinem Zweifel unterliegt, dass die Gleichungen Glazebrook's für die heutige elastische Optik unannehmbar sind, so werden andererseits die von Lorentz gegebenen mit denen der letzteren identisch, sobald man setzt:

$$\frac{a}{n^2} = \mathfrak{D}.$$

Damit wird dann aber die dielectrische Amplitude (a) von der elastischen Amplitude ($\mathfrak{D}$), mit welcher sie oben identificirt wurde, begrifflich verschieden.

Angesichts der hier, wie ich meine, hervortretenden principiellen Unversöhnlichkeit der electromagnetischen Theorie in ihrer jetzigen Gestalt mit der elastischen und in Anbetracht dessen, was diese durch Aufnahme des Sellmeier'schen Princips[1]) gewonnen hat, kann ich in ersterer kein System erkennen, welches, wie kürzlich geäussert worden ist, von manchen Schwierigkeiten der Undulationstheorie frei wäre. Nimmt man in der That von dieser die Dispersion und Absorption und gar noch die Polarisation fort, dann bleibt doch eigentlich wenig übrig, was zu Schwierigkeiten Anlass geben könnte. Ich hege vielmehr die Ueberzeugung, dass die Geschichte der electrischen wie der optischen Schwingungen einst neben dem Namen Faraday's auch den so bescheidenen eines Sellmeier verzeichnen werde.

Die von Kerr entdeckte Drehung der Polarisationsebene des an einem Magnet gespiegelten Lichtes hat Fitz-

1) Dasselbe datirt vom Jahre 1872, nachdem bereits Boussinesq i. J. 1868 die Möglichkeit eines Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen analytisch behandelt und auch Hr. de Saint-Venant mehrfach für dieselbe eingetreten war. Vgl. W. Sellmeier, Pogg. Ann. **145.** p. 399 u. 520. 1872; **147.** p. 386 u. 525. 1872.

gerald[1]) mittelst der Maxwell'schen Theorie zu begründen gesucht. Wir wollen im Folgenden die Reflexion des Lichtes an einem durchsichtigen Magnet (und auf einen solchen muss sich ja jene Theorie beschränken) von unserem Standpunkt ableiten. Dabei werde vorausgeschickt, dass gemäss einer früheren Entwickelung[2]) in den magnetischen Mitteln die beständigen Schwingungen Kreise sind, und dass für die beiden linearen Componenten derselben die nämlichen Uebergangsbedingungen gelten wie für gewöhnliche Mittel.

Dies angenommen, denke man sich unter irgendwelchem Winkel zur Axe eine spiegelnde Fläche angeschliffen. Wir wollen Hauptschnitt und Einfallsebene zusammenfallen lassen und parallel letzterer eine gegebene Schwingung von der Amplitude $\mathfrak{E}$ und unter dem Einfallswinkel e voraussetzen. Man zerlege $\mathfrak{E}$ in zwei Partialamplituden $\mathfrak{E}'_p$ und $\mathfrak{E}''_p$ und denke sich senkrecht zu beiden zwei entgegengesetzt gleiche Amplituden $\mathfrak{E}'_s$ und $\mathfrak{E}''_s$ hinzu, deren Phase um 90° gegen die der ersteren differire. Zwischen den genannten Grössen bestehen sonach die Gleichungen:

$$(31)\qquad \mathfrak{E}'_p + \mathfrak{E}''_p = \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{E}'_s + \mathfrak{E}''_s = 0.$$

$\mathfrak{E}'_p$ und $\mathfrak{E}'_s$ liefern die gespiegelten Amplituden $\mathfrak{R}'_p$ und $\mathfrak{R}'_s$ und die durchgehenden $\mathfrak{D}'_p$ und $\mathfrak{D}'_s$. Diese beiden letzteren seien die Attribute etwa des rechtscircularen Strahles, der sich mit dem Brechungsexponenten $n' = (\sin e / \sin r')$ im Inneren des Magnets fortpflanzt, und befriedigen daher die Gleichung:

$$(32)\qquad \mathfrak{D}'_p = \mathfrak{D}'_s.$$

$\mathfrak{E}''_p$ und $\mathfrak{E}''_s$ liefern ebenso die Grössen $\mathfrak{R}''_p$ und $\mathfrak{R}''_s$, resp. $\mathfrak{D}''_p$ und $\mathfrak{D}''_s$, welche letztere dem linkscircularen Strahle angehören werden, dessen Brechungsindex $n'' = (\sin e / \sin r'')$ heisse. Sie befriedigen folglich die Gleichung:

$$(33)\qquad \mathfrak{D}''_p = -\mathfrak{D}''_s.$$

Nunmehr lassen sich die Amplituden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ (den Winkel zwischen Strahl und Normale als sehr klein voraus-

1) Fitzgerald, Proc. Roy. Soc. **28.** p. 236. 1879. — Beibl. **3.** p. 819. 1879.

2) Ketteler, Wied. Ann. **16.** p. 123. 1882.

gesetzt) auch als Functionen von e und r mittelst der Fresnel'schen Formeln ausdrücken. Man erhält so beispielsweise:

$$(34)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}'_p = -\dfrac{\operatorname{tg}(e-r')}{\operatorname{tg}(e+r')}\mathfrak{E}'_p, & \mathfrak{R}'_s = -\dfrac{\sin(e-r')}{\sin(e+r')}\mathfrak{E}'_s, \\ \mathfrak{D}'_p = \dfrac{2\cos e \sin r'}{\sin(e+r')\cos(e-r')}\mathfrak{E}'_p, & \mathfrak{D}'_s = \dfrac{2\cos e \sin r'}{\sin(e+r')}\mathfrak{E}'_s \ldots\ldots \end{cases}$$

Setzt man die beiden letzteren Ausdrücke in Gl. (32), so schreibt sich dieselbe:

$$\mathfrak{E}'_p = \mathfrak{E}'_s \cos(e-r').$$

In analoger Weise gibt Gl. (33):

$$\mathfrak{E}''_p = -\mathfrak{E}''_s \cos(e-r'').$$

Und werden beide mit den Gleichungen (31) combinirt, so erhält man:

$$(35)\qquad \mathfrak{E}'_s = -\mathfrak{E}''_s = \frac{\mathfrak{E}}{\cos(e-r')+\cos(e-r'')}.$$

Weiter kommt für die reflectirten Summationsamplituden:

$$(36)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_s = -\left[\dfrac{\sin(e-r')}{\sin(e+r')} - \dfrac{\sin(e-r'')}{\sin(e+r'')}\right]\mathfrak{E}'_s, \\ \mathfrak{R}_p = -\left[\dfrac{\sin(e-r')}{\operatorname{tg}(e+r')} + \dfrac{\sin(e-r'')}{\operatorname{tg}(e+r'')}\right]\mathfrak{E}'_s. \end{cases}$$

Und da entsprechend den Gleichungen:

$$\xi_R = \mathfrak{R}_p \cos\varphi, \qquad \eta_R = \mathfrak{R}_s \sin\varphi$$

beider Phasen um 90° differiren, so erzeugt sonach das einfallende lineare Licht eine reflectirte elliptische Schwingung, deren Axen zur Einfallsebene symmetrisch liegen, und deren Bahn bei jedem Polwechsel im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird.

Unserer Theorie zufolge werden demnach bei Erregung eines durchsichtigen Electromagnets lineare Schwingungen wohl depolarisirt, nicht aber gedreht. Anders verhalten sich undurchsichtige Magnete, wie solches speciell für die Coincidenz von Axe und Einfallsloth a. a. O. nachgewiesen ist. Um übrigens vorstehende Formeln auch auf letztere anwendbar zu machen, dazu genügt wieder die Einführung complexer Ausdrücke.

Selbstverständlich gestaltet sich die Rechnung, wenn die gegebene Amplitude des einfallenden Lichtes auf der Ein-

fallsebene senkrecht steht, ganz analog der hier durchgeführten, und endlich erhellt aus der Form der Fortpflanzungsgesetze, dass jede Spur einer Einwirkung verschwindet, wenn das Licht in den Magnet senkrecht zur Axe eintritt.[1])

Bonn, im November 1882.

VIII. *Zur Theorie der Lichtstrahlen; von G. Kirchhoff.*

(Aus den Berl. Ber. vom 22. Juni 1882 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Schlüsse, durch welche man, hauptsächlich gestützt auf Betrachtungen von Huygens und Fresnel, die Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Beugungserscheinungen zu erklären pflegt, entbehren in mehrfacher Beziehung der Strenge. Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln, scheint auch heute noch nicht möglich zu sein; doch lässt sich jenen Schlüssen eine grössere Schärfe geben. Ich erlaube mir, der Academie Auseinandersetzungen vorzulegen, welche hierauf abzielen, und deren wesentlichen Inhalt ich in meinen Universitätsvorlesungen seit einer Reihe von Jahren vorgetragen habe. Das gleiche Ziel in Bezug auf die Beugungserscheinungen ist inzwischen in einigen veröffentlichten Abhandlungen von den Herren Fröhlich[2]) und Voigt[3]) verfolgt.

§ 1. Es soll angenommen werden, dass das Licht in Transversalschwingungen des Aethers besteht, und der Aether in Bezug auf diese in dem Mittel, in dem die Lichtbewegung betrachtet wird, sich wie ein fester elastischer, isotroper

1) Im ersten Theile dieser Abhandlung sind die irrthümlich stehen gebliebenen Passus p. 418 Z. 17—39 und p. 419 Z. 15–21 zu streichen.

2) Fröhlich, Wied. Ann. **3.** p. 376. 1878; **6.** p. 414. 1879 u. **15.** p. 592. 1881.

3) Voigt, Wied. Ann. **3.** p. 532. 1878.

und homogener Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verrückungen hervorgerufenen. Sind u, v, w die Componenten nach den Coordinatenaxen der Verrückung eines Aethertheilchens, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten x, y, z hat, zur Zeit t, so genügt dann jede dieser Grössen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \tag{1}$$

wo Δ die Summe der zweiten Differentialquotienten nach x, y, z, und a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet. Doch dürfen nicht beliebige Lösungen dieser Gleichung u, v, w gleichgesetzt werden, da auch:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sein muss. Sind U, V, W beliebige Lösungen derselben, so entspricht aber:

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{2}$$

einer möglichen Lichtbewegung, und umgekehrt gibt es für jede Lichtbewegung Functionen U, V, W, die diesen Gleichungen genügen.[1]) Es soll im Folgenden unter φ eine der Grössen U, V, W oder u, v, w verstanden werden. T sei die Schwingungsdauer des als homogen vorausgesetzten Lichtes, dann ist jede dieser sechs Grössen eine lineare, homogene Function von:

$$\cos\frac{t}{T}2\pi \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{t}{T}2\pi.$$

Als Maass für die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z) soll das arithmetische Mittel der Werthe genommen werden, welche:

$$u^2 + v^2 + w^2$$

während der Zeit T erhält, d. h. wenn man:

$$u = \mathfrak{u}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{u}'\sin\frac{t}{T}2\pi, \quad v = \mathfrak{v}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{v}'\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$w = \mathfrak{w}\cos\frac{t}{T}2\pi + \mathfrak{w}'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

setzt, $\frac{1}{2}(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}'^2)$.

1) Clebsch in Borchard's Journ. **61.** p. 195. 1862.

Ist der ganze unendliche Raum von dem betrachteten Medium erfüllt, befindet sich in demselben ein leuchtender Punkt an dem Orte des Punktes 1, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, und bezeichnet man durch r_1 den Abstand der Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) voneinander, durch λ die Wellenlänge des Lichtes, d. h. das Product aT, so ist die einfachste Annahme, die man über φ machen kann, und die erlaubt ist, wenn man unter φ eine der drei Grössen U, V, W versteht:

$$(3) \qquad \varphi = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi .$$

Aus diesem Ausdruck von φ kann man einen allgemeineren, der auf denselben Fall sich bezieht, ableiten, indem man zu ihm einen constanten Factor, zu t eine additive Constante hinzufügt, nach x_1, y_1 oder z_1 einmal oder wiederholt differentiirt und die Summe so gebildeter Ausdrücke nimmt. Das Resultat dieser Operation vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Annahme einführt, die für die Optik von fundamentaler Bedeutung ist, dass die Wellenlänge λ als unendlich klein betrachtet werden darf. Man erhält dadurch, indem man nur die Glieder höchster Ordnung berücksichtigt:

$$(4) \qquad \varphi = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi ,$$

wo D und D' von $\partial r_1/\partial x_1$, $\partial r_1/\partial y_1$, $\partial r_1/\partial z_1$, oder, was dasselbe ist, von $\partial r_1/\partial x$, $\partial r_1/\partial y$, $\partial r_1/\partial z$, d. h. von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind. Ausdrücke von derselben Form gelten dann nach (2) auch für u, v, w; bezeichnet man die Werthe von D und D' für den Fall, dass $\varphi = u$, $= v$ oder $= w$ gesetzt wird, durch A, A', B, B' oder C, C', lässt also diese sechs Zeichen Grössen bedeuten, die von der Richtung der Linie r_1 abhängen, im übrigen aber constant sind, so wird die Intensität des Lichtes im Punkte (x, y, z):

$$= \frac{1}{2 r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Dadurch ist ausgesprochen, dass diese Intensität dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte umge-

kehrt proportional ist, dabei aber mit der Richtung der Linie r_1 in einer Weise variirt, die durch die Bewegung im leuchtenden Punkte bedingt ist.

Ein leuchtender Punkt, wie der gedachte, soll bei den folgenden Betrachtungen als Lichtquelle vorausgesetzt, und es soll untersucht werden, wie das von ihm ausgehende Licht durch einen fremdartigen Körper, der in seine Nähe gebracht ist, modificirt wird. Ein wesentliches Hülfsmittel bei dieser Untersuchung wird ein Satz darbieten, den die Anwendung des Green'schen Satzes auf Functionen, die der für φ aufgestellten Differentialgleichung genügen, ergibt, und der eine Präcisirung und eine Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Principes bildet. Hr. Helmholtz hat denselben schon in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“[1]) abgeleitet und seine Wichtigkeit gezeigt; es soll dieser Satz auf einem anderen Wege und in einer anderen Form in dem folgenden Paragraphen entwickelt werden.

§ 2. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ zwei Functionen von x, y, z, die mit ihren ersten Differentialquotienten nach x, y, z innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes (der auch aus mehreren getrennten Theilen bestehen kann) eindeutig und stetig sind, ist $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche (die gleichfalls aus getrennten Theilen zusammengesetzt sein kann) und N die nach dem Inneren des Raumes gerichtete Normale von ds, so ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int ds\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N}-\mathfrak{V}\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N}\right)=\int d\tau\,(\mathfrak{V}\Delta\mathfrak{U}-\mathfrak{U}\Delta\mathfrak{V}).$$

Hier setze man $\mathfrak{U}=\varphi$ und nehme in Bezug auf $\mathfrak{V}$ zunächst an, dass es auch der Gleichung (1) genügt. Man erhält dann:

$$\int ds\left(\varphi\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N}-\mathfrak{V}\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)=\frac{1}{a^2}\int d\tau\left(\mathfrak{V}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\varphi\frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial t^2}\right)$$

$$\text{oder}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\left(\mathfrak{V}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}\right).$$

1) Helmholtz, Borchardt's Journ. 57. p. 1. 1859.

Diese Gleichung multiplicire man mit dt und integrire zwischen zwei Werthen der Zeit, von denen der eine negativ, der andere positiv ist, und die $-t'$ und t'' genannt werden mögen. Bei einer gebräuchlichen Bezëichnungsweise ergibt sich dadurch:

$$(5)\quad \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = \frac{1}{a^2}\left[\int d\tau \left(\mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)\right]_{-t'}^{t''}.$$

Nun sei:
$$\mathfrak{V} = \frac{F(r_0 + at)}{r_0},$$

wo r_0 die Entfernung des Punktes (x, y, z) von einem beliebig gewählten Punkte, dem Punkte o, bedeutet und F eine Function ist, die für jeden endlichen, positiven oder negativen, Werth ihres Arguments verschwindet, nie negativ ist und der Bedingung genügt, dass:

$$(6)\quad \int F(\zeta)\, d\zeta = 1,$$

wenn die Integration von einem endlichen negativen bis zu einem endlichen positiven Werthe von ζ ausgedehnt wird.

Es sei jetzt ein vollständig begrenzter Raum gegeben, der von homogenem Aether erfüllt und frei von leuchtenden Punkten ist; s sei seine Oberfläche und ds ein Element derselben. Der Punkt o werde im Inneren des Raumes angenommen und die Gleichung (5) auf den Raum angewandt, der von jenem übrig bleibt, wenn eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt o ist, ausgeschlossen wird. dS sei ein Element der Oberfläche dieser Kugel. Es sei t' so gross gewählt, dass:

$$r_0 - at'$$

für den grössten Werth, den r_0 in der Fläche s, also überhaupt in dem gedachten Raume, erhält, negativ und endlich ist; unter dieser Bedingung kommen auf der rechten Seite der Gleichung (5) nur Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\partial\mathfrak{V}/\partial t$ vor, für welche $r_0 + at$ endlich, positiv oder negativ ist, und welche daher verschwinden. Die Gleichung (5) gibt daher:

$$(7)\quad \int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) + \int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = 0.$$

Das zweite von diesen beiden Integralen lässt sich ausführen. Bezeichnet man durch R den Radius der unendlich kleinen Kugel, auf die es sich bezieht, und vernachlässigt bei der Berechnung des mit dS multiplicirten Ausdrucks, was mit R^2 multiplicirt unendlich Kleines gibt, so kann man setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \qquad \mathfrak{V} = 0,$$

also:
$$\int dS\left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = -4\pi\varphi_0 F(at),$$

wo φ_0 den Werth von φ für den Punkt o bedeutet. Da ferner $F(at)$ nur für unendlich kleine Werthe von t von Null verschieden und der Gleichung (6) zufolge:

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, F(at) = \frac{1}{a}$$

ist, so wird das zweite Glied der Gleichung (7):

$$-\frac{4\pi}{a}\varphi_0(o),$$

wo $\varphi_0(o)$ den Werth von φ_0 für $t = 0$ bezeichnet. Auch bei ihrem ersten Gliede lässt sich die Integration nach t mit Hülfe der Gleichung (6) ausführen. Zunächst hat man:

$$a\int_{-t'}^{t''} dt\, \mathfrak{V} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = a\int_{-t'}^{t''} dt \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

wo in $\partial\varphi/\partial N$ nach Ausführung der Differentiation:

$$t = -\frac{r_0}{a}$$

zu setzen ist. Macht man:

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = f(t),$$

so wird dieser Ausdruck also:

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{F(r_0 + at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{1}{a}\frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t};$$

und daher:

$$a\int_{-t'}^{t''} dt\,\varphi\,\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\,\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\int_{-t'}^{t''}\varphi\,\frac{\partial F(r_0+at)}{\partial t}\,dt,$$

wo $\varphi(-r_0/a)$ den Werth von φ für $t=-r_0/a$ bedeutet. Formt man das letzte Integral durch partielle Integration um und erwägt, dass die Function F für jeden endlichen Werth ihres Arguments verschwindet, so findet man denselben Ausdruck:

$$= \frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\,\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

wo in $\partial\varphi/\partial t$ ebenfalls $t=-r_0/a$ zu setzen ist. Substituirt man diese Resultate in die Gleichung (7) und verlegt zugleich den Anfangspunkt der Zeit so, dass der bisherige Anfangspunkt der Zeitpunkt t wird, so erhält man:

(9) $$4\pi\varphi_0(t) = \int ds\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\,\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0}f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)\right\}.$$

Die beiden ersten Glieder des hier mit ds multiplicirten Ausdrucks lassen sich in das eine:

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0}$$

zusammenziehen, wo die Differentiation so auszuführen ist, dass nur r_0 als variabel angesehen wird, den Grössen, von denen $\varphi(t)$ abhängt, aber die Werthe gelassen werden, die ihnen in dem Elemente ds zukommen. Man hat hiernach:

(10) $$4\pi\varphi_0(t) = \int ds\,\Omega,$$ wo:

(11) $$\Omega = \frac{\partial}{\partial N}\frac{\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

und wo die Function f durch (8) definirt ist.

Hieraus ist zu schliessen, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s, da ein jedes von den beiden

Gliedern, aus denen Ω zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von ds sich befindet.

Die folgende Betrachtung beweist, dass unter einer gewissen Bedingung, die später immer als erfüllt angenommen werden soll, die Gleichung (10) auch gilt, wenn die leuchtenden Punkte innerhalb des von der Fläche s umschlossenen Raumes liegen, und der Punkt o ausserhalb desselben sich befindet; nur muss die Normale N dann nach aussen gekehrt sein. Man wende in diesem Falle die Gleichung (10) auf den Raum an, der nach innen durch die Fläche s, nach aussen durch eine unendlich grosse Kugelfläche begrenzt ist, deren Element dS genannt werden möge. Man erhält dadurch:

$$4\pi\varphi_0(t) = \int ds\,\Omega + \int dS\,\Omega.$$

Nun nehme man an, dass bis zu einem gewissen, endlichen Werthe der Zeit überall Ruhe herrsche, sodass für unendlich grosse, negative Werthe von t überall, also auch an der unendlich grossen Kugel, $\varphi(t)$ und $f(t)$ verschwinden. Wählt man den Punkt o im Endlichen und fasst nur endliche Werthe der Zeit ins Auge, so verschwindet dann Ω für jedes Element dS, weil hier $t - r_0/a$ negativ unendlich ist; man erhält also die Gleichung (10). Die Beschränkung, dass der Punkt o im Endlichen liegen und die Zeit endlich sein soll, ist dabei nur eine scheinbare; welches die Lage des Punktes o und der Werth von t sein möge, man kann den Radius der Kugel so gross wählen. dass die angestellte Betrachtung ihre Gültigkeit behält.

Wendet man die Gleichung (10) auf zwei geschlossene Flächen an, die einen Theil gemeinsam haben und beide den Punkt o, aber nicht die leuchtenden Punkte — oder auch die leuchtenden Punkte, aber nicht den Punkt o — umschliessen, und zieht die Resultate, die man dadurch erhält, voneinander ab, so sieht man, dass das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine geschlossene Fläche, welche weder die leuchtenden Punkte noch den Punkt o umgibt, verschwindet. Es verschwindet auch für eine geschlossene Fläche, welche den Punkt o und die leuchtenden Punkte umgibt, wie man er-

kennt, wenn man die Gleichung (10) für zwei geschlossene Flächen bildet, die einen gemeinsamen Theil haben, und von denen die eine den Punkt o und nicht die leuchtenden Punkte, die andere die leuchtenden Punkte und nicht den Punkt o umgibt.

Die Anwendung, die von der Gleichung (10) bei dem vorliegenden, am Ende des vorigen Paragraphen bezeichneten Problem zu machen ist, liegt auf der Hand. Man denke sich in dem homogenen Aether, der den unendlichen Raum erfüllt, einen leuchtenden Punkt 1; auf die Bewegung, die er hervorbringt, beziehe sich die Function φ^*. Wird ein fremdartiger Körper in den Raum gebracht, so wird die Bewegung geändert; es werde dadurch φ aus φ^*; es handelt sich darum, φ zu ermitteln für irgend einen Punkt o, der ausserhalb des Körpers liegt. Es sei ds ein Element der Oberfläche des Körpers, dS ein Element einer unendlich kleinen Kugelfläche, die um den leuchtenden Punkt beschrieben ist; der Gleichung (10) zufolge ist dann:

$$4\pi\varphi_0 = \int dS\,\Omega + \int ds\Omega.$$

Das erste dieser beiden Integrale hat einen leicht angebbaren Werth. Die Aenderung der Bewegung an dem Elemente dS, die durch die Einführung des Körpers hervorgerufen wird, ist (bei Ausschluss eines gewissen, speciellen Falles) nicht unendlich gross, und da die Kugelfläche, der dS angehört, unendlich klein ist, so ist ihr Einfluss auf den Werth des Integrals unendlich klein. Es kann in diesem also φ^* für φ gesetzt werden, wodurch dasselbe nach der Gleichung (10) $= 4\pi\varphi_0{}^*$ wird, wenn $\varphi_0{}^*$ den Werth von φ^* im Punkte o bezeichnet. Man hat daher:

$$(12) \qquad 4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0{}^* + \int ds\,\Omega.$$

Nach dieser Gleichung kann φ_0 allgemein berechnet werden, wenn man φ^* und für die Oberfläche des Körpers die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ kennt.

§ 3. Für die später anzustellenden Betrachtungen ist es nöthig, den Werth zu kennen, den das Integral $\int ds\,\Omega$. ausgedehnt über eine begrenzte Fläche, unter gewissen Be-

dingungen hat. Dieser Werth soll jetzt abgeleitet werden. Vorausgesetzt soll dabei werden, dass die Wellenlänge unendlich klein ist, dass φ von einem leuchtenden Punkte 1 herrührt, also den in (4) angegebenen Ausdruck hat, dass für keinen endlichen Theil der Fläche s, über die das Integral auszudehnen ist, oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant, oder bis auf unendlich Kleines constant ist, und endlich, dass die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei geht. Es wird bewiesen werden, dass dann das genannte Integral vsrschwindet, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche s nicht schneidet. Die Rechnung wird ergeben, dass, wenn ein solcher Schnitt stattfindet, das Integral $= \pm 4\pi\varphi_0$ ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale N in dem Schnittpunkt einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet; was, wenn die erste Behauptung bewiesen ist, schon aus der Gleichung (10) folgt.

Man nehme zuerst für φ den in (3) gegebenen Ausdruck an, setze also:

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi;$$

dann wird:

$$\frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r_0} \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = - \frac{1}{r_1 r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial N} \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_0}{\partial N} \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,$$

ferner nach (8):

$$\frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = - \frac{1}{r_1^2 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi - \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \frac{\partial r_1}{\partial N} \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

und daher nach (11):

$$(13) \quad \begin{cases} \Omega = \frac{1}{r_1 r_0} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\ \quad + \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \end{cases}$$

Um bei diesem Werthe von Ω das genannte Integral zu finden, gehe man von dem folgenden Satze aus.

Bezeichnet $F(\zeta)$ eine Function von ζ, die stetig ist in dem Intervall, in dem ζ von ζ_0 bis ζ' wächst, und δ eine Constante, so verschwindet das Integral:

$$(14) \qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

wenn k unendlich gross wird.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, welche Dirichlet bei seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe in Bezug auf ein ähnliches Integral angestellt hat. Man zerlege das Integral in solche Theile, dass innerhalb eines jeden $dF/d\zeta$ weder sein Vorzeichen wechselt, noch vom Abnehmen ins Zunehmen oder umgekehrt übergeht; von jedem dieser Theile (deren Anzahl als endlich vorausgesetzt wird) beweist man, dass er verschwindet, wenn k ins Unendliche wächst, indem man ihn weiter in Theile zerlegt der Art, dass alle Werthe von ζ, für welche $\sin(k\zeta + \delta) = 0$ ist, als Zwischengrenzen auftreten, und die Ungleichheiten benutzt, die für die absoluten Werthe dieser Theile sich angeben lassen.

Aus diesem Satze ergibt sich leicht der folgende.

Wenn die Function $F(\zeta)$ die Eigenschaft hat, dass ihr erster Differentialquotient in dem Intervall von $\zeta = \zeta_0$ bis $\zeta = \zeta'$ stetig ist, so wird für $k = \infty$:

$$(15) \qquad k \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

In der That wird die linke Seite dieser Gleichung durch partielle Integration:

$$= -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} + \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^2F}{d\zeta^2} \cos(k\zeta + \delta)\, \delta\zeta;$$

das neue hier auftretende Integral ist aber von der Form des Integrals (14), verschwindet also, wenn k ins Unendliche wächst.

Jetzt denke man sich eine stetig gekrümmte, vollständig begrenzte Fläche s, deren Element ds sein soll, nenne r_1

und r_0 die Entfernungen dieses Elementes von zwei festen Punkten 1 und 0, setze:

$$\zeta = r_1 + r_0,$$

bezeichne durch G eine sich stetig ändernde Function des Ortes von ds, durch δ eine Constante, und untersuche den Werth, den das Integral:

$$\int G \sin(k\zeta + \delta)\, ds \tag{16}$$

annimmt, wenn k unendlich gross wird.

Zu diesem Zwecke stelle man sich die Flächen vor, deren Gleichung:

$$\zeta = \text{const.}$$

ist, also die Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte die Punkte 1 und 0 sind, und die Schnittlinien dieser mit der Fläche s; dann setze man:

$$F(\zeta) = \pm \int G ds, \tag{17}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den zwei Schnittlinien liegt, von denen die eine dem variabeln Werthe ζ, die andere einem beliebig gewählten, festen Werthe Z entspricht, und wo das Zeichen $+$ gelten soll, wenn $\zeta > Z$, das Zeichen $-$, wenn $\zeta < Z$ ist. Bei dieser Festsetzung ist, wenn $d\zeta$ positiv gewählt wird:

$$\frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \int G ds, \tag{18}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s auszudehnen ist, der zwischen den beiden Schnittlinien liegt, welche den Werthen ζ und $\zeta + d\zeta$ entsprechen. Ist ζ_0 der kleinste, ζ' der grösste Werth von ζ in der Fläche s, so ist hiernach das Integral (16):

$$= \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

also = dem Integral (14); es verschwindet daher für $k = \infty$, falls $F(\zeta)$ in der Fläche s stetig ist, d. h. falls für keinen endlichen Theil der Fläche s ein constanter Werth von ζ stattfindet.

Es werde jetzt bei gleicher Bedeutung der Zeichen der Ausdruck:

(19) $$k \int G \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

ins Auge gefasst. Dieser ist:

$$= k \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

also gleich dem linken Theile der Gleichung (15). Er ist daher für $k = \infty$ auch gleich dem rechten Theile derselben, falls das durch (18) definirte $dF/d\zeta$ innerhalb der Fläche s stetig ist. Dieser Differentialquotient ist unstetig, sobald ζ für einen endlichen Theil der Grenze von s constant ist; wird dieser Fall ausgeschlossen, so kann eine Unstetigkeit nur eintreten, wenn für einen Punkt der Fläche $d\zeta$ verschwindet. Es wird besonders untersucht werden, was dann stattfindet. Sonst hat die Gleichung (15) Gültigkeit, und aus dieser folgt weiter, dass der Ausdruck (19) verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen findet nämlich sowohl der grösste als der kleinste Werth von ζ in einem oder einigen Punkten der Grenze von s statt, und für einen jeden solchen Punkt ist das Integral $\int G ds$, das man berechnen muss, um nach (18) das entsprechende $dF/d\zeta$ zu ermitteln, unendlich klein von höherer Ordnung als $d\zeta$; es verschwindet also dieses $dF/d\zeta$.

Nun ist der Werth von (19) für den Fall zu suchen, dass $d\zeta$ für einen Punkt in der Fläche s verschwindet. Es geschehe das für den Punkt (x, y, z), und $g(x, y, z) = 0$ sei die Gleichung dieser Fläche; dann ist:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L \frac{\partial g}{\partial z},$$

wo L einen unbestimmten Factor bedeutet. Bezeichnen α_1, β_1, γ_1, α_0, β_0, γ_0 und α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen bilden mit der Linie, die von dem Punkte 1 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, der Linie, die von dem Punkte 0 nach dem Punkte (x, y, z) gezogen ist, und einer Normale N der Fläche s in diesem Punkte, so lassen diese Gleichungen sich schreiben:

(20) $$\alpha_1 + \alpha_0 = M\alpha, \quad \beta_1 + \beta_0 = M\beta, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = M\gamma,$$

wo M einen neuen Factor bedeutet. Es ergibt sich aus ihnen einmal, dass die Linien r_1 und r_0 und N in einer Ebene liegen; dann folgt auch:

$$M(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) = M(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 + \gamma\gamma_0),$$

und diese Gleichung sagt aus, dass entweder $M = 0$, d. h. $\alpha_0 = -\alpha_1$, $\beta_0 = -\beta_1$, $\gamma_0 = -\gamma_1$ ist, also der Punkt (x, y, z) zwischen den Punkten 1 und 0, auf ihrer geraden Verbindungslinie liegt, oder die Richtungen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ mit der Richtung von N gleiche Winkel bilden. Im zweiten Falle müssen die Linien r_1 und r_0 auf entgegengesetzten Seiten der Normale N liegen, wenn sie nicht mit dieser oder ihrer Verlängerung zusammenfallen; denn durch $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$, $\gamma_0 = \gamma_1$ werden die Gleichungen (20) nicht erfüllt, es sei denn, dass r_1 und r_0 mit N oder der Verlängerung von N zusammenfallen.

Es werde jetzt die Bedeutung der Zeichen x, y, z geändert und durch (x, y, z) ein variabler Punkt der Fläche s in Bezug auf ein Coordinatensystem bezeichnet, dessen Anfangspunkt der frühere Punkt (x, y, z) und dessen z-Axe die Normale N ist. Es sollen ferner die Dimensionen der Fläche s als unendlich klein (aber als unendlich gross gegen $1/k$) angenommen werden; es ist ausreichend, unter dieser Annahme das Integral (19) zu berechnen, da sein Werth durch Hinzufügung neuer Theile zur Fläche s nach dem, was bewiesen ist, nicht geändert wird. Die Gleichung der Fläche s ist dann:

(21) $$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

wo a_{11}, a_{12}, a_{22} Constanten sind, und zugleich ist:

$$ds = dx\,dy.$$

Um die Schnittlinien der Fläche s mit den Flächen $\zeta =$ const. zu finden, muss nun der Ausdruck von ζ gebildet und nach Potenzen von x und y entwickelt werden. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes 0 und:

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + g_0^2 + z_0^2};$$

dann ist:

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

oder: $$r_0 = \sqrt{\varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bezeichnet man x und y als unendlich klein von der ersten Ordnung und entwickelt r_0 bei Benutzung von (21) bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive, so ergibt sich:

$$r_0 = \varrho_0 - \frac{x x_0 + y y_0}{\varrho_0} - \frac{a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2}{\varrho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_0} - \frac{(x x_0 + y y_0)^2}{2 \varrho_0^3},$$

oder, da die in (20) vorkommenden Grössen α_0, β_0, γ_0 den Gleichungen:

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = -\alpha_0, \qquad \frac{y_0}{\varrho_0} = -\beta_0, \qquad \frac{z_0}{\varrho_9} = -\gamma_0$$

genügen,

$$r_0 = \varrho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2)\gamma_0$$
$$+ \frac{1}{2\varrho_0}\left(x^2(1-\alpha_0^2) - 2 x y \alpha_0 \beta_0 + y^2(1-\beta_0^2)\right).$$

Setzt man entsprechend:

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so findet man ebenso:

$$r_1 = \varrho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2)\gamma_1$$
$$+ \frac{1}{2\varrho_1}\left(x^2(1-\alpha_1^2) - 2 x y \alpha_1 \beta_1 + y^2(1-\beta_1^2)\right).$$

Bei dem gewählten Coordinatensystem ist aber $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, und daher nach (20):

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_0 = 0.$$

Man hat daher:

$$\zeta = A_0 + A_{11} x^2 + 2 A_{12} x y + A_{22} y^2,$$ wo:

$$(22) \quad \begin{cases} A_0 = \varrho_1 + \varrho_0 \\ A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\alpha_1^2}{2\varrho_1} + \dfrac{1-\alpha_0^2}{2\varrho_0} \\ A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \dfrac{\alpha_1 \beta_1}{2\varrho_1} - \dfrac{\alpha_0 \beta_0}{2\varrho_0} \\ A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \dfrac{1-\beta_1^2}{2\varrho_1} + \dfrac{1-\beta_0^2}{2\varrho_0}. \end{cases}$$

Die Schnittcurven der Flächen $\zeta = \text{const.}$ mit der Fläche s sind hiernach ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Ihre Gleichung, bezogen auf die Hauptaxen, sei:

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

d. h. es seien μ_1 und μ_2 die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(23) $$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}{}^2 = 0\,.$$

Haben μ_1 und μ_2 gleiches Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte Ellipsen; A_0 ist das Minimum von ζ, wenn μ_1 und μ_2 positiv sind, das Maximum, wenn diese beiden Grössen das negative Vorzeichen haben. Im ersten Falle ist die Fläche der Ellipse, die einem Werthe von ζ entspricht:

$$= \frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, \quad \text{im zweiten:} \quad = \frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wie überhaupt die Wurzel aus einer positiven Grösse hier positiv verstanden werden soll. Nach der Gleichung (17) ist daher, wenn die dort mit Z bezeichnete Grösse $= A_0$ gewählt wird, für Werthe von ζ, bei denen die entsprechenden Ellipsen ganz innerhalb der Fläche s liegen, in beiden Fällen:

$$F(\zeta) = G\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo G sich auf den Punkt ($x = 0$, $y = 0$) bezieht, also:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}.$$

Fällt kein Theil der Grenze von s mit einer der Ellipsen zusammen, so ist $dF/d\zeta$ in dieser Fläche stetig und für den zweiten Grenzwerth, den ζ hier erlangt, $= 0$. Danach ist der Ausdruck (19) für $k = \infty$, wenn μ_1 und μ_2 positiv sind:

(24) $$= G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}\cos(kA_0 + \delta),$$

und, wenn μ_1 und μ_2 negativ sind:

(25) $$= -G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}\cos(kA_0 + \delta).$$

Weniger einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn μ_1 und μ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Kegelschnitte also Hyperbeln sind; in welchem Falle $dF/d\zeta$ bei $\zeta = A_0$ unstetig ist. Man wähle hier die Hauptaxen als Coordinatenaxen und gebe der Fläche s eine bestimmte Gestalt, nämlich die eines Rechtecks, dessen Seiten den Hauptaxen parallel sind und die Gleichungen:

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b$$

haben. Die Ecken sollen auf den Asymptoten liegen, es soll also:

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = c$$

sein, wo μ_1 positiv, μ_2 negativ, c positiv ist. Die reelle Hauptaxe der einem Werthe von ζ entsprechenden Hyperbel fällt dann in die x-Axe, wenn $\zeta - A_0$ positiv, in die y-Axe, wenn $\zeta - A_0$ negativ ist. Setzt man wieder die bei der Gleichung (17) definirte Grösse $Z = A_0$, so hat man daher für $\zeta > A_0$:

$$F(\zeta) = G\left\{2ab - \frac{4}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta-A_0}{\mu_1}}}^{a}\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}\,dx\right\},$$

wo G wiederum auf den Punkt $(x = 0, y = 0)$ sich bezieht. Daraus folgt:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta-A_0}{\mu_1}}}^{a}\frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}},$$

oder, da:

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}.$$

Ebenso findet man für $\zeta < A_0$:

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}.$$

Erwägt man, dass der kleinste Werth von ζ in den Punkten $(x = 0, y = \pm b)$ stattfindet, und $= A_0 - c^2$ ist, während der grösste in den Punkten $(x = \pm a, y = 0)$ vorkommt und $= A_0 + c^2$ ist, so ergibt sich der Ausdruck (19):

$$= G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\left\{\int\limits_{A_0-c^2}^{A_0}\log\frac{c + \sqrt{c^2 + \zeta - A_0}}{\sqrt{A_0 - \zeta}}\sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta\right.$$

$$\left. + \int\limits_{A_0}^{A_0+c^2}\log\frac{c + \sqrt{c^2 - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}\sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta\right\}.$$

Setzt man in dem ersten dieser beiden Integrale:

$$A_0 - \zeta = \xi,$$

in dem zweiten: $\zeta - A_0 = \xi,$

so wird derselbe Ausdruck:

$$= G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\left(\sin(k\xi+kA_0+\delta)-\sin(k\xi-kA_0-\delta)\right)d\xi,$$

oder:

$$= G\frac{4}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\sin(kA_0+\delta)\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\, d\xi.$$

Nun ist aber:

$$k\int_0^{c^2}\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\, d\xi$$

$$= \left[\sin k\xi\log\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\right]_{\xi=0}^{\xi=c^2} - \int_0^{c^2}\sin k\xi\frac{d}{d\xi}\log(c+\sqrt{c^2-\xi})\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{c^2}\frac{\sin k\xi}{\xi}d\xi.$$

Das erste von diesen drei Gliedern ist für jeden Werth von k gleich Null, da der in den Klammern stehende Ausdruck sowohl für $\xi = c^2$, als für $\xi = 0$ verschwindet; das zweite ist von der Form des Ausdrucks (14) und verschwindet daher für $k = \infty$, da $\log(c+\sqrt{c^2-\xi})$ auch bei $\xi = c^2$ stetig ist, obwohl sein Differentialquotient unendlich wird; das dritte endlich ist für $k = \infty$:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin u\, du}{u} \text{ d. h. } = \frac{\pi}{4}.$$

Der gesuchte Werth des Ausdrucks (19) ist daher, wenn μ_1 und μ_2 von entgegengesetztem Vorzeichen sind:

$$(26) \qquad = G\frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1\mu}}\sin(kA_0+\delta).$$

Bei der weiteren Discussion der Ausdrücke (24), (25) und (26) ist zu benutzen, dass, da μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung (23) sind:

(27) $$\mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$$
ist, wo A_{11}, A_{12}, A_{22} die in (22) angegebenen Werthe haben.

Wie aus den Gleichungen (20) geschlossen ist, beziehen sich die nun durchgeführten Betrachtungen auf zwei Fälle; der erste von diesen ist der, dass die Fläche s von der geraden Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird, der zweite der, dass es in der Fläche s einen Punkt gibt, der die Eigenschaft hat, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Der erste von diesen Fällen soll hier noch weiter untersucht werden. In ihm ist:

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_0 = 0,$$

die Gleichungen (22) geben daher:

$$A_{11} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)(1 - \alpha_1^2), \qquad A_{12} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\alpha_1 \beta_1,$$

$$A_{22} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)(1 - \beta_1^2),$$

und nach (27) ist:

$$\mu_1 \mu_2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \gamma_1^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (23), μ_1 und μ_2, sind:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \text{ und } \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)\gamma_1^2,$$

also beide positiv; daher ist der Ausdruck (19) dem Ausdruck (24) gleichzusetzen ist; er ist also:

(28) $$= \pm G\, 2\pi \frac{\varrho_1 \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \frac{1}{\gamma_1} \cos\left(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta\right),$$

wo das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist.

Bei diesen, über den Ausdruck (19) angestellten Betrachtungen ist δ als eine Constante angenommen; sie gelten aber auch, wenn δ, wie G, sich stetig mit dem Orte von ds ändert; dann muss in den Ausdrücken (24), (25), (26) und (28) δ, sowie G, auf den Punkt ($x = 0$, $y = 0$) bezogen werden.

Man sieht das ein, wenn man erwägt, dass das Integral (19) bei variablem δ durch die Formel:

$$\sin(k\zeta + \delta) = \cos\delta \sin k\zeta + \sin\delta \cos k\zeta,$$

in die Summe zweier Integrale von gleicher Form zerlegt werden kann, in denen δ die constanten Werthe 0 und $\frac{1}{2}\pi$ hat.

Mit Hülfe der gewonnenen Resultate ist es nun leicht, die im Eingange dieses Paragraphen in Betreff des Integrals $\int ds\, \Omega$ ausgesprochene Behauptung zu beweisen.

Es habe zunächst Ω den in (13), also φ den in (3) angegebenen Werth; man setze:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k \text{ und } -\frac{t}{T} 2\pi = \delta;$$

man sieht dann, dass der Theil des genannten Integrals, der von dem ersten Gliede von Ω herrührt. verschwindet, und dass auch der Theil desselben, den das zweite Glied von Ω ergibt, gleich Null ist, wenn es nicht in der Fläche s einen Punkt der Art gibt, dass die von ihm nach den Punkten 1 und 0 gezogenen Linien gleiche Winkel mit der Normale der Fläche bilden und mit dieser in einer Ebene liegen, und wenn die Fläche nicht von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Ist die erste von diesen beiden Bedingungen nicht erfüllt, so verschwindet das betreffende Integral aber auch; um seinen Werth zu finden, hat man nämlich in dem Ausdruck (24), (25) oder (26) für G den Werth zu setzen, den:

$$\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \tag{29}$$

in dem bezeichneten Punkte annimmt, und dieser Werth ist gleich Null, da $\partial r_1/\partial N$ und $\partial r_0/\partial N$ die Cosinus der Winkel sind, die einander gleich sein sollen. Es verschwindet daher $\int ds\, \Omega$ nur dann nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. Der Ausdruck (28) gibt in diesem Falle seinen Werth, wenn man in ihn für G den Werth setzt, den (29) in dem Schnittpunkte hat. Lässt man die Richtung von N, die in (13) vorkommt, mit der Richtung der z-Axe zusammenfallen, auf die γ_1 in (28) sich bezieht, so wird:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = -\gamma_1$$

und daher der Werth von (29):

$$= \frac{2\gamma_1}{\varrho_1 \varrho_0},$$

also: $$\int ds\, \Omega = \pm \frac{4\pi}{\varrho_1 + \varrho_0} \cos\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

oder: $$= \pm 4\pi \varphi_0,$$

wo die positiven oder negativen Zeichen gelten, je nachdem γ_1 positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Normale N mit der von 1 nach 0 gezogenen Linie einen spitzen oder einen stupfen Winkel bildet.

Hiermit ist die in Rede stehende Behauptung für den Fall bewiesen, dass φ den durch die Gleichung (3) angegebenen Werth hat; sie bleibt richtig, wenn man von dieser Gleichung in der dort angegebenen Weise zu der allgemeineren Gleichung (4) übergeht.

§ 4. Um aus der Gleichung (12) Folgerungen ziehen zu können, ist es nöthig, die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ an der Oberfläche des Körpers, den die Gleichung voraussetzt, zu untersuchen.

Fallen in einem durchsichtigen Mittel auf die Ebene, in der dasselbe an ein zweites Mittel grenzt, ebene Lichtwellen, so bilden sich reflectirte und gebrochene ebene Wellen. Dass diese entstehen und die Richtungen haben, die sie erfahrungsmässig besitzen, kann als eine Folge davon angesehen werden, dass zwischen den Verrückungen der Aethertheile an der Grenze in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten lineare, homogene Gleichungen mit constanten Coëfficienten bestehen. Es beziehe sich φ_e auf das einfallende Licht, φ_r auf das reflectirte im Punkte (ξ, η, ζ); für das erste Mittel sei $\zeta < 0$, für das zweite $\zeta > 0$ und:

$$\varphi_e = A \cos\left(\frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T}\right) 2\pi,$$

wobei l, m, n die Cosinus der Winkel bedeuten, die die Coordinatenaxen mit der Richtung der Wellennormale des einfallenden Lichtes bilden, in der dieses fortschreitet. Es ist dann:

$$\varphi_r = c A \cos\left(\frac{l\xi + m\eta - n\zeta}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T}\right) 2\pi,$$

wo c und γ Constanten sind, deren Werthe abhängen von der Bedeutung des Zeichens φ, dem Einfallswinkel, dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes und der Natur der beiden Mittel. Für $\zeta = 0$ hat man daher, wenn man die Zeichen $\varphi_e(t)$ und $\varphi_r(t)$ als gleichbedeutend mit φ_e und φ_r gebraucht,

$$\varphi_r(t) = c\varphi_e(t + \gamma) \qquad \text{und:}$$

$$(30) \qquad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial \zeta} = - c \frac{\partial \varphi_e(t + \gamma)}{\partial \zeta},$$

von welchen Gleichungen die zweite auch geschrieben werden kann:

$$(30) \qquad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial N} = - c \frac{\partial \varphi_e(t + \gamma)}{\partial N},$$

wenn N, wie früher, die nach dem Inneren des ersten Mittels gekehrte Normale der Grenze bedeutet.

Sind im einfallenden Lichte gleichzeitig Wellen von verschiedenen Richtungen vorhanden, sodass sowohl φ_e als φ_r eine Summe solcher Ausdrücke ist, wie sie eben diesen Zeichen gleichgesetzt sind, so bestehen entsprechende Gleichungen für die einzelnen Glieder dieser Summen.

Diese Sätze können eine Anwendung auf den Fall finden, auf den die Gleichung (12) sich bezieht, wenn man die Wellenlänge λ als unendlich klein voraussetzt und die Krümmung der Oberfläche des gedachten Körpers als nirgends unendlich gross annimmt.

Die Gleichung (12) stellt φ_0 (d. h. den Werth von φ für einen beliebigen Punkt 0 des betrachteten Raumes) als eine Summe von Gliedern dar, die herrühren von dem leuchtenden Punkte 1 und von leuchtenden Punkten, die in der Grenzfläche jenes Raumes liegen. Man nehme den Punkt 0 unendlich nahe an dieser Grenzfläche an, und zwar so nahe, dass sein Abstand von ihr auch gegen λ unendlich klein ist. Die Lichtwellen, die ihn treffen, können dann theils als einfallende, theils als reflectirte oder gebrochene bezeichnet werden, je nachdem sie nach der Grenze hin, oder von ihr fort sich bewegen. Die leuchtenden Punkte, von denen die

ersten herrühren, sind diejenigen, die sich auf der einen, die leuchtenden Punkte, von denen die letzten herrühren, diejenigen, die auf der anderen Seite der unendlichen Ebene sich befinden, die durch den Punkt 0, dem nächsten Element der Grenzfläche parallel gelegt ist. Sind, wie angenommen werden soll, in dem zweiten Mittel einfallende Wellen nicht vorhanden, so existiren in dem ersten nur einfallende und reflectirte; es möge φ_e auf die einfallenden, φ_r auf die reflectirten Wellen, φ auf die ganze Bewegung in dem Punkte, der hier der Punkt 0 genannt ist, sich beziehen, sodass:

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}$$

ist. Dabei gelten dann die Gleichungen (30), wenn das einfallende Licht nur aus einem Wellensysteme besteht und die entsprechenden, dort angegebenen, wenn mehr einfallende Wellensysteme zu unterscheiden sind.

Ein Fall, der besonders einfach, und für den die Vorstellung leichter ist, als für den allgemeinen, ist der, dass ein schwarzer Körper das zweite Mittel bildet, d. h. ein solcher, der Licht weder reflectirt, noch hindurchlässt. Ein Körper, in dem das Licht dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, wie in der durchsichtigen Umgebung und hinreichend stark absorbirt wird, muss, der Erfahrung zufolge, diese Eigenschaft besitzen. In einem solchen Körper, wie in jedem undurchsichtigen, sind einfallende Wellen an seiner Oberfläche nicht vorhanden, wie es oben vorausgesetzt ist; überdies ist die mit c bezeichnete Grösse bei ihm immer gleich Null; die an der Oberfläche des schwarzen Körpers zu erfüllende Bedingung ist daher die, dass:

$$(31) \qquad \varphi_r = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn der bei der Gleichung (12) gedachte Körper ein schwarzer, und seine Oberfläche überall convex ist, so lassen sich hiernach die Werthe von φ und $\partial\varphi/\partial N$ für die Oberfläche mit Leichtigkeit finden. Denkt man sich eine Ebene, die, einer Tangentialebene parallel und unendlich nahe, bei dem Körper vorbeigeht, so liegt die ganze Oberfläche auf der einen Seite dieser Ebene, der Art, dass jedes Element

ds immer nur einen Beitrag zu φ_r, aber keinen zu φ_e liefern kann. Man stelle sich den Kegel vor, der seine Spitze in dem leuchtenden Punkte 1 hat und die Oberfläche berührt; die Berührungslinie desselben theilt die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine dem leuchtenden Punkte zugewandt, der andere von diesem abgewandt ist; für einen Punkt, der dem ersten Theile unendlich nahe ist, liefert der leuchtende Punkt 1 zu φ_e den Beitrag φ^*, für einen Punkt, der unendlich nahe an dem zweiten liegt, liefert er diesen Beitrag zu φ_r, wo φ^* wieder sich auf die Bewegung bezieht, die stattfinden würde, wenn der schwarze Körper nicht vorhanden wäre. An dem ersten Theile ist daher:

(32) $$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

an dem zweiten ist:

$$\varphi_e = 0, \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = 0,$$

und hieraus folgt nach (31):

(33) $$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Bei einer beliebigen Gestalt des schwarzen Körpers genügt man der Bedingung (31), indem man für diejenigen Punkte der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von Geraden, die vom Punkte 1 ausgehen, getroffen wird, die Gleichungen (32), für alle anderen Punkte der Oberfläche die Gleichungen (33) festsetzt. Unter dieser Annahme folgt nämlich aus einem im § 3 bewiesenen Satze, dass das Integral $\int ds\Omega$, ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwindet, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem ersten Theile, und dass es $= -4\pi\varphi_0{}^*$ ist, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem zweiten Theile der Oberfläche gewählt wird; woraus dann mit Hülfe von (12) die Gleichungen (31) für die ganze Oberfläche sich ergeben.

Aus dem eben angezogenen Satze folgt aber auch weiter, dass, wo auch der Punkt 0 in dem durchsichtigen Mittel angenommen wird, $\varphi_0 = \varphi_0{}^*$ ist, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Oberfläche des Körpers nicht trifft, und $\varphi_0 = 0$, falls diese Linie die Oberfläche zweimal oder öfter schneidet. Da man unter φ irgend eine der Ver-

rückungen u, v, w verstehen kann, so ist hierdurch ausgesprochen, dass in dem ersten der beiden unterschiedenen Fälle die Lichtbewegung im Punkte 0 dieselbe ist, wie wenn der schwarze Körper fehlte, im zweiten aber am Orte von 0 Dunkelheit stattfindet; damit ist gesagt, dass der schwarze Körper einen Schatten wirft, dass das Licht des leuchtenden Punktes sich geradlinig fortpflanzt, in Strahlen, die als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

§ 5. Der eben benutzte, im Anfange des § 3 ausgesprochene Satz gilt nur unter gewissen, dort angegebenen Voraussetzungen; sind diese nicht erfüllt, so sind auch die hier aus dem Satze gezogenen Folgerungen nicht richtig, es treten dann Beugungserscheinungen auf.

Man denke sich den leuchtenden Punkt 1 von einem schwarzen Schirm, in dem eine Oeffnung sich befindet, rings umgeben. Die Linie, in welcher die Oberfläche des Schirmes von einem Kegel berührt wird, der seine Spitze in dem Punkte 1 hat, heisse der Rand der Oeffnung; er theilt die Oberfläche des Schirmes in einen inneren und einen äusseren Theil. Irgend eine Fläche, die durch den Rand begrenzt ist und mit dem einen, wie mit dem anderen dieser Theile eine geschlossene Fläche bildet, die den leuchtenden Punkt umgiebt, sei die Fläche s. Liegt der Punkt 0 irgendwo ausserhalb dieser geschlossenen Flächen, so ist dann nach der Gleichung (12), nach der in Bezug auf schwarze Körper aufgestellten Hypothese, also den Gleichungen (32), (33), und nach der Gleichung (10):

$$4\pi\varphi_0 = \int ds\,\Omega, \tag{34}$$

wo bei der Bildung von Ω φ^* für φ zu setzen und die Integration über die Fläche s auszudehnen ist. Es können sich Beugungserscheinungen in der Nähe des Punktes 0 zeigen, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 unendlich nahe an der Grenze der Fläche s vorbeigeht. Bei den Erscheinungen, die Fresnel in der Axe einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen Schirmes beob-

achtete, während ein leuchtender Punkt auf derselben Axe sich befand, waren r_1 und r_0, also auch $r_1 + r_0$ für alle Punkte der Grenze von s nahe constant; bei den nach Fresnel benannten Beugungserscheinungen, bei den Fransen nämlich, die in der Nähe der Schattengrenze eines Schirmes auftreten, geht die Verbindungslinie von 1 und 0 nahe bei der Grenze von s vorbei; bei den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen (wenn dieselben ohne Benutzung von Linsen, also auf einer unendlich entfernten Tafel, mit Hülfe eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes dargestellt werden) ist $r_1 + r_0$ für die ganze Oeffnung nahe constant.

Um auch für diese Fälle die Intensität des Lichtes im Punkte 0 zu finden, setze man zunächst, der Gleichung (3) entsprechend:

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi. \tag{35}$$

Es erhält dann Ω den in (13) angegebenen Werth. Die beiden Glieder, aus denen derselbe zusammengesetzt ist, sind, da λ unendlich klein ist, von ungleicher Grössenordnung, es sei denn, dass:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$$

unendlich klein ist, welcher Fall hier nicht in Betracht gezogen zu werden braucht. Die Gleichung (34) gibt daher:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\lambda} \int \frac{ds}{r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werde nun angenommen, dass die Fläche s eine ebene ist, dass ihre Dimensionen gegen r_1 und r_0 so klein sind, dass r_1 und r_0 da, wo sie ausserhalb des Sinuszeichens vorkommen, sowie ihre nach N genommenen Differentialquotienten als constant betrachtet werden können, und endlich, dass die Linien r_0 unendlich kleine Winkel mit den Verlängerungen der Linien r_1 bilden. Man hat dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = -\frac{\partial r_1}{\partial N},$$

und

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Man verallgemeinere nun den Ausdruck von φ^* auf dem Wege, auf dem die Gleichung (4) aus der Gleichung (3) abgeleitet ist, sodass man erhält:

$$\varphi^* = \frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi, \tag{36}$$

wo D und D' von der Richtung des von dem leuchtenden Punkte 1 durch den Punkt (x, y, z) gehenden Strahles abhängen. Dabei wird dann:

$$= \frac{1}{\lambda r_1 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\left\{D\int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi - D'\int ds \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi\right\},$$

wo D und D' dieselbe Bedeutung haben. Jetzt darf man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen; thut man das und schreibt A und A', B und B', C und C' für D und D', je nachdem $\varphi = u, v, w$ gesetzt wird, so wird bei der in § 1 definirten Einheit für die Lichtintensität die Intensität des Lichtes in der beugenden Oeffnung:

$$= \frac{1}{2r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Bezeichnet man diese durch J und setzt:

$$c = \int ds \cos\frac{r_1 + r_0}{\lambda}2\pi, \qquad s = \int ds \sin\frac{r_1 + r_0}{\lambda}2\pi,$$

so wird die Intensität im Punkte 0:

$$= J\frac{1}{\lambda^2 r_0^2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2(c^2 + s^2),$$

welche Gleichung durch mannigfaltige Messungen als mit der Erfahrung übereinstimmend nachgewiesen ist.[1])

§ 6. Die eben abgeleitete Gleichung setzt wesentlich voraus, dass die Dimensionen der beugenden Oeffnung sehr gross gegen die Wellenlängen sind, und ihre Anwendung auf die Beugungsspectren, bei deren Herstellung oft Gitter benutzt sind, deren Spalten nur eine Breite von wenigen Wellenlängen besassen, ist nicht zu rechtfertigen.[2]) Doch haben die Messungen, denen wir die Kenntniss der Wellenlängen verdanken, gezeigt, dass diese Anwendung die Orte der Lichtmaxima mit grosser Genauigkeit richtig ergibt.

1) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6.** p. 429. 1879.

2) Vgl. Fröhlich, Wied. Ann. **6.** p. 430. 1879 und **15.** p. 592. 1882.

Diese Thatsache findet von den hier zu Grunde gelegten Hypothesen aus ihre Erklärung durch die folgenden Betrachtungen.

Man denke sich das Gitter, über dessen Beschaffenheit eine specielle Voraussetzung nicht gemacht zu werden braucht, das z. B. ein Drahtgitter oder ein Russgitter oder ein Diamantgitter sein kann, in die passende Oeffnung eines ebenen, schwarzen Schirmes, der nach allen Seiten sich in die Unendlichkeit erstreckt, eingefügt. Man verstehe unter ds ein Element der Ebene des Gitters, oder, um präciser zu reden, ein Element einer Ebene, die dem Gitter sehr nahe, auf der Seite desselben liegt, auf der der Punkt 0 sich befindet. Es gilt dann die Gleichung (9), und diese vereinfacht sich, wenn man die Annahme einführt, dass r_0 unendlich gross ist, in:

$$4\pi\varphi_0(t) = -\int\frac{ds}{r_0}\left\{f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t}\right\}.$$

Die Ebene, deren Element ds genannt ist, sei die xy-Ebene des Coordinatensystems, die x-Axe senkrecht auf den Spalten, der Anfangspunkt der Mittelpunkt des rechteckig angenommenen Gitters; ferner sei ϱ_0 die Länge der vom Anfangspunkt nach dem Punkte 0 gezogenen Linie, und es seien α_0, β_0, γ_0 die Cosinus der Winkel, welche diese mit den Coordinatenaxen bildet. Man hat dann:

$$r_0 = \varrho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y,\qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0 \qquad \text{und:} \qquad ds = dx\,dy.$$

Man hat ferner:

$$\varphi(t) = A\cos\frac{t}{T}2\pi + A'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$f(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial N} = B\cos\frac{t}{T}2\pi + B'\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda}A'\cos\frac{t}{T}2\pi - \frac{2\pi}{\lambda}A\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

wo A, A', B, B' Function von x und y sind. Substituirt man diese Ausdrücke in die für φ_0 aufgestellte Gleichung, so erhält man bei passender Verlegung des Anfangspunktes der Zeit:

$$\varphi_0 = \iint dx\,dy \left\{ C \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right) 2\pi + C' \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right) 2\pi \right\},$$

wo C und C' umgekehrt proportional mit ϱ_0, lineare Functionen von γ_0 und — was hier hervorzuheben ist — lineare homogene Functionen von A, A', B, B' sind, deren Coëfficienten von x und y nicht abhängen. Nun sei die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, der auf der negativen z-Axe in der Unendlichkeit liegt, $2b$ die Länge der Spalten, $2n$ ihre Anzahl und e der Abstand entsprechender Punkte zweier aufeinander folgender, also $2ne$ die Breite des Gitters. Man darf dann annehmen, dass A, A', B, B', also C und C' von y so abhängen, dass sie constant bleiben, wenn y von $-b$ bis $+b$ variirt, und verschwinden, wenn y ausserhalb dieses Intervalls liegt; von x aber so, dass sie um e periodisch sind, wenn x einen Werth zwischen $-ne$ und $+ne$ hat, und für andere Werthe von x verschwinden. Infolge hiervon wird zunächst:

$$\varphi_0 = \frac{\sin \frac{\beta_0 b}{\lambda} 2\pi}{\frac{\beta_0}{\lambda}\pi} \int_{-ne}^{ne} dx \left\{ C \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right) 2\pi + C' \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right) 2\pi \right\}.$$

Da λ als unendlich klein gegen b angesehen werden kann, so ist der vor dem Integralzeichen stehende Factor für jeden endlichen Werth von β_0 gegen b unendlich klein, während er endlich ist, wenn β_0 von der Ordnung von λ / b ist. Unter dem Integralzeichen denke man sich C und C' nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $(x/e) 2\pi$ entwickelt; es treten dann, wenn h eine ganze Zahl oder Null bedeutet, die Integrale auf:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h \frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h \frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die verschwinden, und die Integrale:

$$\int_{-ne}^{ne} dx \cos h \frac{x}{e} 2\pi \cos \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi \quad \text{und:} \quad \int_{-ne}^{ne} dx \sin h \frac{x}{e} 2\pi \sin \alpha_0 \frac{x}{\lambda} 2\pi,$$

die resp.:

$$= \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} + \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} \quad \text{und:}$$

$$= \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} - \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}$$

sind. Diese Ausdrücke sind im allgemeinen gegen ne unendlich klein, wenn λ als unendlich klein gegen ne bezeichnet wird; sie sind aber endlich, falls:

$$\alpha_0 \pm h\frac{\lambda}{e}$$

von der Ordnung von λ/ne ist.

Da nun unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstanden werden kann, so folgt hieraus, dass für:

$$\alpha_0 = \pm h\frac{\lambda}{e}, \qquad \beta_0 = 0$$

die Lichtintensität unendlich gross ist gegen die in allen anderen Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende; und das ist es, was die Beobachtungen gezeigt haben.

§ 7. Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist es leicht, auch das Gesetz der Reflexion der Lichtstrahlen abzuleiten. Dem leuchtenden Punkte 1 sei ein beliebiger Körper gegenüberstellt. Um den Fall zu vereinfachen, denke man sich aber die Oberfläche dieses mit einer schwarzen Hülle bedeckt, in der nur eine kleine Oeffnung auf der dem leuchtenden Punkte zugewandten Seite sich befindet; überdies seien die geometrischen Verhältnisse der Art, dass das reflectirte Strahlenbündel, welches erfahrungsmässig sich bildet, die Oberfläche des Körpers nicht zum zweiten mal trifft. Wiederum beziehe sich das Zeichen φ^* auf die Bewegung, die stattfinden würde, wenn der fremde Körper nicht vorhanden wäre, und es sei zunächst φ^* durch die Gleichung (35) bestimmt. Den zu erfüllenden Bedingungen genügt man dann, indem man setzt:

für den freien Theil der Oberfläche:

$$\varphi_e = \varphi^*, \qquad \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

also nach (30):

$$\varphi_r = \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = -c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

und daher: $$\varphi = \varphi^* + \frac{c}{r_1}\cos\left(\frac{c}{r_1} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N} - c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

für die Punkte des geschwärzten Theiles der Oberfläche, in denen diese zum ersten mal von einer vom leuchtenden Punkte 1 ausgehenden Linie getroffen wird:

$$\varphi = \varphi^*, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N};$$

für alle anderen Punkte der geschwärzten Oberfläche:

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Den Gleichungen (12) und (11) zufolge ist dann der Ueberschuss des Werthes von φ_0 über den Werth, den φ_0 haben würde, wenn die ganze Oberfläche des fremden Körpers geschwärzt wäre, die Summe der beiden Integrale:

$$-\frac{1}{4\pi}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi \quad \text{und}$$

(37) $$-\frac{1}{2\lambda}\int c\frac{ds}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi,$$

wo die Integration über den freien Theil der Oberfläche — der die Fläche s heissen möge — auszudehnen ist.[1] Das erste von diesen beiden Integralen ist, wenn der Punkt 0 in endlichem Abstande von der Oberfläche sich befindet, da λ unendlich klein ist, gegen das zweite zu vernachlässigen, sodass der genannte Unterschied der beiden Werthe von φ_0 durch das Integral (37) dargestellt ist.

Es gilt dieses auch, wenn φ^*, statt durch die Gleichung (35), durch die Gleichung (36) gegeben ist; nur die Werthe

---

1) Es wird ohne Schwierigkeit sich nachweisen lassen, dass, wenn der Punkt 0 in oder unendlich nahe an der Oberfläche liegt, dieser Ausdruck zu den Werthen von φ und $\partial\varphi/\partial N$ zurückführt, die angenommen sind. Doch soll dieser Beweis nicht gegeben werden.

von c und γ sind dann andere. Das Integral (37) ist von der Form des Integrals (19); aus den in Bezug auf dieses angestellten Betrachtungen folgt, dass jenes im allgemeinen verschwindet. (19) verschwindet nicht, wenn die Fläche s von der Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird. (37) verschwindet aber auch dann, weil dann für den Schnittpunkt:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N} = 0$$

ist. Es ist das Integral (37) von Null verschieden, wenn es in der Fläche s einen Punkt gibt, dessen Verbindungslinien mit den Punkten 1 und 0 gleiche Winkel mit der Normale der Fläche s bilden und mit dieser in einer Ebene liegen. Dadurch ist ausgesprochen, dass reflectirte Strahlen existiren, und welche Richtungen diese haben. Eine Störung durch Beugungserscheinungen tritt ein, wenn für einen endlichen Theil der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ bis auf unendlich Kleines constant ist, oder der Punkt 0 unendlich nahe an der Grenze des reflectirten Strahlenbündels liegt.

Aus dem eben abgeleiteten Gesetze, welches die Richtungen der reflectirten Strahlen bestimmt, lassen sich die geometrischen Eigenschaften eines Strahlenbündels, das von einem leuchtenden Punkte ausgegangen und an einer krummen Fläche reflectirt ist, entwickeln. Die im § 3 durchgeführten Rechnungen erlauben aber auch anzugeben, wie auf einem Strahle eines solchen Bündels die Intensität und die Phase von einem Punkte zum anderen variirt.

Der Theil von φ_0, der dem reflectirten Lichte entspricht, d. h. der Ausdruck (37), ist durch die Ausdrücke (24), (25) oder (26) gegeben, wenn darin:

$$G = \frac{K}{\varrho_0}$$

gesetzt wird, wo K eine von ϱ_0 unabhängige Grösse bedeutet. Daraus folgt, dass auf einem reflectirten Strahle die Intensität mit ϱ_0 so sich ändert, dass sie mit dem absoluten Werthe von:

$$\varrho_0^2 \mu_1 \mu_2$$

umgekehrt proportional ist. Nach (27) und (22) lässt dieser Ausdruck sich schreiben:

$$(b_{11}\varrho_0 + c_{11})(b_{22}\varrho + c_{22}) - (b_{12}\varrho_0 + c_{12})^2,$$

wo die Grössen b und c von ϱ_0 unabhängig sind, und:

$$c_{11} = \tfrac{1}{2}(1 - \alpha_0^2), \quad c_{12} = -\tfrac{1}{2}\alpha_0\beta_0, \quad c_{22} = \tfrac{1}{2}(1 - \beta_0^2)$$

ist. Sind $\varrho_0 = f_1$ und $\varrho_0 = f_2$ die (stets reellen) Wurzeln der quadratischen Gleichung, die man erhält, indem man diesen Ausdruck gleich Null setzt, so ist also die Intensität auch umgekehrt proportional mit dem absoluten Werthe von:

$$(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2).$$

In den Punkten $\varrho_0 = f_1$ und $\varrho_0 = f_2$ ist die Intensität unendlich; es sind das die Brennpunkte des Strahles.

In Betreff der Phase ist zu bemerken, dass diese, wie die Ausdrücke (24), (25), (26) zeigen, sich sprungweise um $\frac{1}{2}\pi$ ändert, wenn der Punkt 0 durch einen der Brennpunkte hindurchgeht.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass ganz ähnliche Betrachtungen, wie über die Reflexion, auch über die Brechung der Lichtstrahlen angestellt werden können.

IX. *Ueber Schallstärkemessung; von W. Wundt.*

Unter obigem Titel findet sich im vorigen Hefte dieser Annalen eine Abhandlung von K. Vierordt, in welcher neben der Mittheilung eigener neuer Versuche auch eine Besprechung von Beobachtungen enthalten ist, die von Hrn. Dr. E. Tischer in meinem Laboratorium ausgeführt und theils in dessen Dissertation, theils in den von mir herausgegebenen „Philosophischen Studien“[1]) veröffentlicht sind. Da ich eine Bekanntschaft mit diesen Arbeiten bei den Lesern der Annalen nicht voraussetzen darf, so erlaube ich mir zunächst den wesentlichen Inhalt derselben, insoweit er sich auf die vorliegende physikalische Frage bezieht, hier kurz zusammenzufassen.

1) Wundt, Phil. Stud. **1.** p. 495. 1883.

Als sich bei den ersten Versuchen, eine empirische Schallmaasstabelle für psychophysische Zwecke festzustellen, ergeben hatte, dass die Stärke des durch den Fall von Metallkugeln erzeugten Schalles nicht blos von Fallhöhe und Gewicht, sondern auch von dem Material der Kugel und der Fallunterlage in ziemlich veränderlicher Weise abhängig sei, schlug ich Hrn. Tischer vor, mit Kugeln aus einem und demselben Material auf einigen in ihrer physikalischen Beschaffenheit möchlichst abweichenden Unterlagen Versuche auszuführen. Der Hauptzweck hierbei bestand darin, diejenige Versuchsanordnung zu finden, welche durch Gleichförmigkeit und angemessene Abstufung des Schalles zu Beobachtungen über die Unterschiedsempfindlichkeit des Ohres für Schallstärken und über die Zeit der Apperception und Unterscheidung von Schallstärken sich eigneten. Demgemäss wurden alle Versuche mit Bleikugeln ausgeführt, aber der Reihe nach folgende Fallunterlagen gewählt:

1) Das Brett des Hipp'schen Fallapparats, welches bei auffallender Kugel von einem Messingdaumen abgleitet und gegen Messingfedern gepresst wird. Die Kugeln erfuhren hier keine merkliche Deformation, und es fand kein elastischer Rückstoss derselben statt.

2) Ein mit Tuch überzogenes, in etwas geneigter Lage auf Kautschukfüssen stehendes Holzbrett. Die Bleikugeln erfuhren ebenfalls keine merkliche Deformation, wurden aber wie elastische Gummibälle zurückgeworfen.

3) Ein nacktes Brett aus hartem Holze, welches die unter einem Winkel von etwa 10° geneigte obere Fläche eines Kastens bildete, dessen untere horizontale Fläche auf dem Boden ruhte. Hier fand gleichzeitig Deformation und elastische Reaction statt.

4) Eine Eisenplatte, welche unmittelbar auf dem Boden aufruhte. Hier entstand starke Deformation, aber keine elastische Reaction, sondern die Kugeln blieben, wie bei dem Hipp'schen Brett, unverrückt liegen.

Die physikalischen Bedingungen waren also, wie man sieht, bei diesen Unterlagen dergestalt variirt, dass möglichst verschiedene Antheile der bei dem Fall entwickelten leben-

digen Kraft in Deformation oder in elastischen Rückstoss übergingen. Da nun hauptsächlich diese beiden Vorgänge vermuthlich es bedingen werden, dass sich nicht alle durch das Product $p \, . \, h$ zu messende Energie in Schall verwandelt, so dürften die Resultate dieser Vergleichungsversuche immerhin auch ein gewisses physikalisches Interesse besitzen. Für die Beurtheilung der Resultate wird aber die folgende einfache Erwägung maassgebend sein können.

Irgend eine einzelne Schallintensität i, welche durch den Fall einer Kugel von der Masse p von der Höhe h entsteht, wird immer ausgedrückt werden können durch eine Gleichung von der Form:

$$i = \frac{k}{n} p \, h,$$

worin k eine bei allen Veränderungen von p und h unveränderlich bleibende Grösse und dagegen $n > k$ einen Werth bezeichnet, welcher dem durch Deformation, elastischen Rückprall u. s. w. bewirkten Energieverlust proportional geht. Es ist nun an und für sich denkbar, dass auch n eine Constante sei; es ist ferner denkbar, obgleich nicht wahrscheinlich, dass n bei den Veränderungen von p constant bleibt, mit h aber sich verändert, indem es z. B. fortwährend der Quadratwurzel aus h proportional ist. Im letzteren Fall würde dann das von Vierordt ursprünglich aufgestellte Schallmaass $p \, . \sqrt{h}$ richtig sein. Es ist aber offenbar auch möglich, dass der in Deformation, Rückprall u. s. w. bestehende Verlust an Energie gleichzeitig von p und h in einer minder einfachen Weise abhängt. Ist dies der Fall, dann wird man selbstverständlich immer noch für zwei zusammengehörige Versuche mit den Gewichten p und P und den Höhen H und h, in welchen die verglichenen Schallintensitäten gleich gefunden wurden, eine Gleichung:

$$p \, H^{\varepsilon} = P \, h^{\varepsilon}$$

aufstellen und daraus den Exponenten ε berechnen können. Aber es ist klar, dass dieser Exponent im allgemeinen für jedes neue Versuchspaar wieder einen anderen Werth haben wird, und dass ebenso nicht mehr unter allen Umständen

$\varepsilon < 1$ sein muss. Vielmehr wird letzteres nur so lange stattfinden, als in der Beziehung $\varepsilon = \log(P/p) / \log(H/h)$, $H/h > P/p$ ist, d. h. so lange der Energieverlust mit der Zunahme der Höhen stärker wächst als mit der Zunahme der Gewichte. Dies vorausgesetzt sind nun die Resultate unserer Versuche leicht verständlich.[1]) Sie bestehen in Folgendem:

1) Sind Deformation und elastischer Rückstoss beide annähernd gleich Null, so ist ε constant, und zwar nahezu = Eins. (Unterlage 1.)

2) Ist die Deformation klein, aber der elastische Rückstoss gross, so bleibt ebenfalls ε fast constant und nähert sich der Einheit; doch ist bei grösseren Höhen und Gewichten ein geringes Anwachsen von ε mit der Zunahme beider zu bemerken. (Unterlage 2.)

3) Findet gleichzeitig Deformation und elastischer Rückstoss statt, so ist ε stets < 1, nimmt aber sowohl mit den absoluten Werthen von h wie mit denjenigen von p nicht unbeträchtlich zu. (Unterlage 3.)

4) Verschwindet bei bedeutender Deformation der elastische Rückstoss, so ist ε im allgemeinen noch kleiner als im vorigen Falle, und die Veränderungen mit h und p finden im selben Sinne statt. (Unterlage 4.)

Hieraus ist zu schliessen, dass der elastische Rückprall einen nahezu constanten, die Deformation der Kugel dagegen einen veränderlichen Energieverlust zur Folge hat, welcher letztere mit h und p, aber im allgemeinen mit h schneller als mit p zunimmt. Für die subjective Vergleichung von Schallstärken erwiesen sich am günstigsten die Beobachtungen mit Unterlage 1 und besonders mit 3. Bei beiden blieb das Timbre des Schalles hinreichend gleich,

---

1) Eine Bemerkung auf S. 474 der Vierordt'schen Abhandlung könnte den Verdacht erwecken, als hätten bei vielen unserer Versuche mehrere Beobachter gleichzeitig Beobachtungen ausgeführt. Dies ist aber nur in einigen Vorversuchen der Fall gewesen, und es ist von Hrn. Tischer ausdrücklich bemerkt worden, dass dieses Verfahren Störungen des Urtheils herbeiführe, weshalb bei den definitiven Versuchen immer nur ein Beobachter die Schallintensitäten verglichen und einer den Fallapparat bedient habe.

und 3 gestattete ausserdem in sehr weitem Umfang eine Abstufung der Schallstärken. Für die psychophysischen Versuche über die Unterschiedsempfindlichkeiten wurde daher 3 gewählt, unter Zugrundelegung empirisch gewonnener Schallmaasstabellen, für die Versuche über Unterscheidungszeiten 1 unter Zugrundelegung der einfachen Maassformel $i = k . p h$. Die Versuche mit 2 gaben zwar gut vergleichbare Schalle, aber der absolute Schallverlust war wegen des starken Rückpralles zu gross. Die Versuche mit 4 waren am unsichersten wegen des begleitenden metallischen Klanges, dessen Tonhöhe sich sehr bedeutend mit dem Gewicht veränderte.[1])

In seiner Besprechung unserer Versuche scheidet nun Vierordt zunächst alle Beobachtungen, in denen $\varepsilon > 1$ gefunden wurde, aus, indem er diese Werthe von ε als „unmöglich“ bezeichnet. Dass sie dies nicht sind, habe ich oben schon auseinandergesetzt. Uebrigens sind die hierher gehörigen Abweichungen von der Einheit so klein (sie schwanken zwischen 1,02 und 1,2), dass sie fast durchgängig in das Bereich der Beobachtungsfehler fallen. Sodann discutirt Vierordt die Versuche mit Unterlage 2 und kommt zu dem Resultat, dass in ihnen ε der Constanz ziemlich nahe komme, ein Resultat, welchem ich, wie gleichfalls bemerkt, nicht widerspreche. Die Versuche mit Unterlage 3, welche nicht nur an sich die eingehendsten und genauesten sind, sondern auch allein als Grundlage der nachfolgenden Versuche über Unterschiedsempfindlichkeit gedient haben, übergeht Vierordt gänzlich, weil dabei, wie er meint, „ein mehrfaches Zurückprallen und Wiederaufschlagen der Fallkugeln vorkam.“ Es ist aber von Hrn. Tischer ausdrücklich gesagt worden, dass zur Vermeidung störender Wirkungen dieser Art das Fallbrett unter einer geringen Neigung aufgestellt und von einem Wattepolster umgeben, und dass dadurch die Ent-

1) Die Behauptung von Vierordt, dass „bei gehöriger Uebung“ die verschiedene Klangbeschaffenheit nur wenig die Vergleichung störe, steht mit allen Erfahrungen über subjective Intensitätsvergleichung im Widerspruch, und die beträchtlichen Schwankungen der ε-Werthe seiner eigenen mit Eisenplatten ausgeführten Versuche sprechen nicht für die Richtigkeit dieser Behauptung.

stehung eines jeden Nebengeräusches verhindert war.[1]) Es bleiben so nur die Versuche mit der Eisenplatte 4 übrig, die von uns wegen der störenden Klangunterschiede als ungeeignet zu psychophysischen Maassbestimmungen bezeichnet worden sind. Trotzdem hält Vierordt dieselben für die geeignetsten, um sie einer näheren Discussion zu unterwerfen. Die von Hrn. Tischer mitgetheilten Versuche zerfallen hier in eine dem Nachweis der Veränderungen des ε mit p bestimmte Gruppe (p. 505 u. 506) und in eine einzige Versuchsreihe (p. 507), in welcher er mittelst vergleichender Beobachtungen die aus der Kleinheit des Exponenten ε sich ergebende Wahrscheinlichkeit, dass bei Unterlage 4 mit steigendem h die Grösse von ε noch rascher wächst als bei 3, zu bestätigen sucht. Vierordt behandelt nun die erste Versuchsgruppe so, als wenn sie dem Nachweis der Abhängigkeit von h bestimmt wäre, und zeigt, dass hier eine solche Abhängigkeit nicht nachzuweisen ist, was ihm natürlich leicht gelingt, da in der einen Reihe die Höhe h überhaupt gar nicht, in den zwei übrigen nur zwischen 15 und 25 bez. 10 und 30 cm verändert ist. Für die Anordnung der beiden letzteren Reihen mag, um nicht zu viel Raum wegzunehmen, die zweite Hälfte der von Vierordt ausführlich discutirten Tab. XII als Beispiel dienen:

p	P	P/p	h	H	H/h	ε
8	12,5	1,56	10	23	2,3	
,,	,,	,,	20	39	1,95	0,587
,,	,,	,,	30	65	2,17	
12,5	25	2,00	10	29,5	2,95	
,,	,,	,,	20	48	2,40	0,683
,,	,,	,,	30	88	2,93	
25	50	,,	10	32,5	3,25	
,,	,,	,,	20	54	2,7	0,618
,,	,,	,,	30	97,5	3,25	
50	100	,,	20	45	2,25	0,738
,,	,,	,,	30	86	2,87	
100	200	,,	20	44,5	2,225	0,867

Hätte es sich wirklich darum gehandelt zu zeigen, dass ε mit wachsendem h zunimmt, wie konnte dann daran gedacht

1) Wundt, Phil. Stud. 1. p. 500. 1883.

werden, die zum selben Gewichtspaar gehörigen, aber bei verschiedenen Höhen erhaltenen ε zu einem Mittelwerthe zu vereinigen? Das wirkliche Resultat, dass nämlich ε mit wachsendem p ziemlich regelmässig (in der 10 Gewichtspaare umfassenden Reihe XII von 0,505 bis auf 0,867) ansteigt, verschweigt Vierordt vollständig. Uebrigens ist es begreiflich, dass diese Versuche mit der Eisenplatte von uns nicht weiter ausgedehnt wurden, da sie sich wegen der oben bemerkten Uebelstände nicht als geeignet zu unseren Versuchszwecken erwiesen. Um so mehr ist es zu verwundern, dass Vierordt die Versuche mit Unterlage 3 aus einem Grunde, von dessen Hinfälligkeit er sich beim Lesen der Tischer'schen Abhandlung sofort hätte überzeugen können, völlig ignorirt, obgleich doch schon die viel grössere Regelmässigkeit der Zahlen ihn auf die grössere Genauigkeit der Schallvergleichung hinweisen musste. Ich darf mir daher wohl gestatten, dies nachzuholen und eine der Maasstabellen über die Veränderungen der ε-Werthe hier mitzutheilen. In der oberen Horizontalcolumne sind die zu einem Versuchspaar gehörigen Gewichte P/p in Grammen, in der Verticalcolumne links die entsprechenden Höhen H/h in Centimetern verzeichnet.

	$\frac{200}{100}$ g	$\frac{100}{50}$ g	$\frac{50}{25}$ g	$\frac{25}{12}$ g	$\frac{12}{8}$ g	$\frac{8}{8}$ g	$\frac{5}{5}$ g	$\frac{1}{1}$ g	$\frac{0,3}{0,3}$ g
$^{100}/_{50}$ cm	1,00	0,98	0,97	0,96	0,92	0,89	0,85	0,82	0,74
$^{70}/_{30}$ cm	0,98	0,96	0,95	0,93	0,86	0,80	0,76	0,74	0,68
$^{25}/_{10}$ cm	0,88	0,86	0,83	0,81	0,78	0,73	0,70	0,66	0,61

Diese Zahlen, mit denen die von vier weiteren von Hrn. Tischer auf p. 513 seiner Abhandlung mitgetheilten Tabellen übereinstimmen, bedürfen keines Commentars. Die gleichzeitige Abhängigkeit der ε von h und p springt unmittelbar in die Augen.

Aber nicht blos unsere Beobachtungen beweisen, dass ε keine Constante ist, sondern auch Vierordt's eigene Versuche führen zu diesem Resultat, insoweit dies bei der Art der Ausführung derselben überhaupt möglich ist. Denn allerdings sind die Höhenabstufungen hier so gering, dass

man schwer begreift, wie derartige Versuche ausgeführt werden konnten, um die Veränderlichkeit von ε mit der Höhe zu prüfen. Vier Versuchsreihen sind mitgetheilt. In der ersten und vierten bewegen sich die Fallhöhen h der schwereren Kugel zwischen 5 und 30 Millimetern. Ebenso im grössten Theil der zweiten; nur zweimal erhebt sich hier h auf 130 mm; in der dritten sind 60 und 80 und einmal 140 mm die Maximalzahlen für h. Dass diese Versuche mit den unseren, in denen die Höhen in der Regel zwischen 10 und 100 cm variiren, nicht vergleichbar sind, ist selbstverständlich; ebenso dass man innerhalb so geringer Höhenänderungen keine erheblichen Veränderungen von ε erwarten darf. Dass sich aber, wenn man eine Kugel aus freier Hand 5—30 mm hoch herabfallen lässt, die Fehler der Höhenbestimmung mässig geschätzt auf 25—5% belaufen können, bedarf keiner näheren Ausführung. Wenn trotzdem die erste und vollständigste Versuchsreihe Vierordt's ein so deutliches Zeugniss für das auch in unseren Versuchen gefundene Anwachsen von ε mit dem Fallgewicht ablegt, so ist dies unter solchen Umständen beinahe zu verwundern. Diese Reihe (Bleikugeln auf eine Zinkplatte fallend) beginnt mit einem Gewichte $P = 180\,100$ mg und hörte auf mit $P = 74$ mg. Dabei sinken continuirlich die Mittelwerthe von ε von 0,800 an bis auf 0,582.

Die wirklichen Ergebnisse der Vierordt'schen Versuche scheinen mir demnach die folgenden zu sein: 1) auf eine Abhängigkeit des ε von der Fallhöhe lassen sie nicht schliessen, weil die Variation der Fallhöhen eine zu geringe ist; 2) aus ähnlichen Gründen lassen einige seiner Versuchsreihen auch keine deutliche Abhängigkeit von den Gewichten hervortreten; dagegen zeigt 3) die vollständigste und regelmässigste dieser Reihen, dass bei dem Fall von Bleikugeln auf eine metallische Unterlage ε mit wachsendem Gewicht beträchtlich zunimmt. Die von Vierordt gezogene Folgerung „es gibt ein allgemeines Schallmaass" wird daher richtig, wenn man sie in ihr Gegentheil verwandelt: „es gibt kein allgemeines Schallmaass". Dies schliesst natürlich nicht aus, dass nicht innerhalb gewisser Grenzen von p und h der Exponent ε hinreichend constant bleiben

kann, um von seinen Veränderungen abstrahiren zu dürfen. Da aber diese Grenzen bei der Wahl relativ harter Unterlagen, wie sie zur Vermeidung allzu grosser Energieverluste für die meisten Zwecke gewählt werden müssen, und bei der Anwendung von Bleikugeln, die sich wegen der Leichtigkeit der Gewichtscorrection besonders empfehlen, ziemlich enge sind, so wird es hier stets erforderlich sein, phonometrischen Versuchen eine zuvor festgestellte empirische Schallmaasstabelle zu Grunde zu legen. Wenn Vierordt eine solche schliesslich dadurch glaubt vermeiden zu können, dass er sich „auf Fallräume zwischen 0,5 bis 3,0 cm beschränkt, weil diese allein bei fast allen phonometrischen Versuchen in Frage kommen" (p. 486), so bleibt nur zu bedenken, dass phonometrische Versuche, die unter diesen Bedingungen angestellt sind, überhaupt kaum einen Werth haben können, weil bei so geringen Höhen die Versuchsfehler eine unverhältnissmässige Grösse erreichen müssen.

X. *Experimente, den Magnetismus betreffend; von Frankenbach.*

1. Die bisher übliche Methode den Verlauf magnetischer Curven und die Wirkungssphäre eines Magnets überhaupt experimentell nachzuweisen, beziehungsweise anzudeuten, besteht darin, dass Eisenfeilspähne auf ein über den Magnet gelegtes Kartenblatt gestreut werden, und ist insofern mangelhaft, als die auf dem Papier liegenden Eisenfeilspähne infolge ihrer Reibung sowohl untereinander als auch mit dem Papier ihre freie Beweglichkeit verlieren. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes lege ich den Magnet unter einen mit Wasser gefüllten Glasteller und bestreue die Oberfläche des Wassers mit Eisenfeilspähnen (welche bei vorsichtigem Bestreuen auf dem Wasser schwimmen). Infolge der Einwirkung des darunter befindlichen Magnets gruppiren sich die Eisenfeilspähne zu den schönsten Curven, welche sowohl je nach Form, Grösse und Stärke des angewandten Magnets, als auch je nach

Grösse und Reinheit der Eisenfeilspähne variiren und die auf Papier herzustellenden Figuren an Vollkommenheit, Regelmässigkeit und Genauigkeit bedeutend übertreffen. Besonders schön gruppirt sich eine dünne Schicht von feinem, chemisch reinem Eisenpulver (Ferrum reductum).

Auch dieses Verfahren auf natürliche Magnete, magnetisirte Eisenplatten und Ringe angewendet, liefert interessante Resultate.

2. Streut man auf die Oberfläche von ruhig stehendem Wasser Eisenfeilspähne (welche darauf schwimmen), so bleiben dieselben nicht etwa ruhig liegen, sondern werden unter dem Einfluss des Erdmagnetismus zu Magneten und gruppiren sich infolge gegenseitiger Anziehung und Abstossung zu wunderschönen, krystallinisches Gepräge tragenden Figuren. Bei Anwendung gröberer Feilspähne möchte ich die Figuren mit einer Wasseroberfläche vergleichen, die im Begriffe steht zu gefrieren, während sie bei feinerem Eisenpulver mit einer matt angehauchten, im Gefrieren begriffenen Fensterscheibe zu vergleichen sind.

Liegnitz, im November 1882.

Berichtigungen.

Bd. XVI. (Grossmann) p. 627. In Gl. XI sind die Grössen p_2 und q_2 durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$p_2 = r\sqrt{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}, \qquad q_2 = ra\sqrt{\frac{\varrho_2}{\mu_2}}.$$

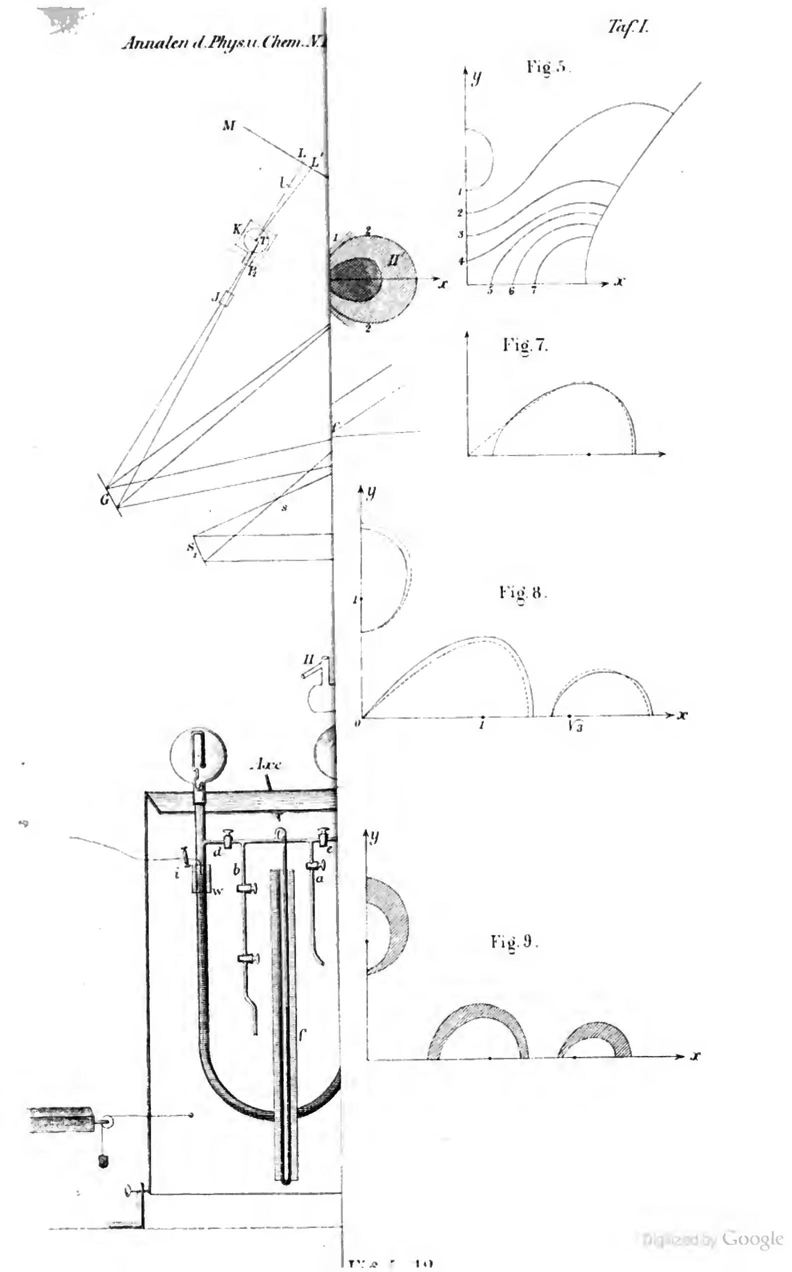
Bd. XVII. (Colley) p. 65 Z. 12 v. u. lies l ... war 1,80 statt l ... war 1,08. p. 65 in den Formeln lies überall R statt K.

Bd. XVII. (Braun) p. 601 Z. 10 v. o. lies Silber statt Platin.

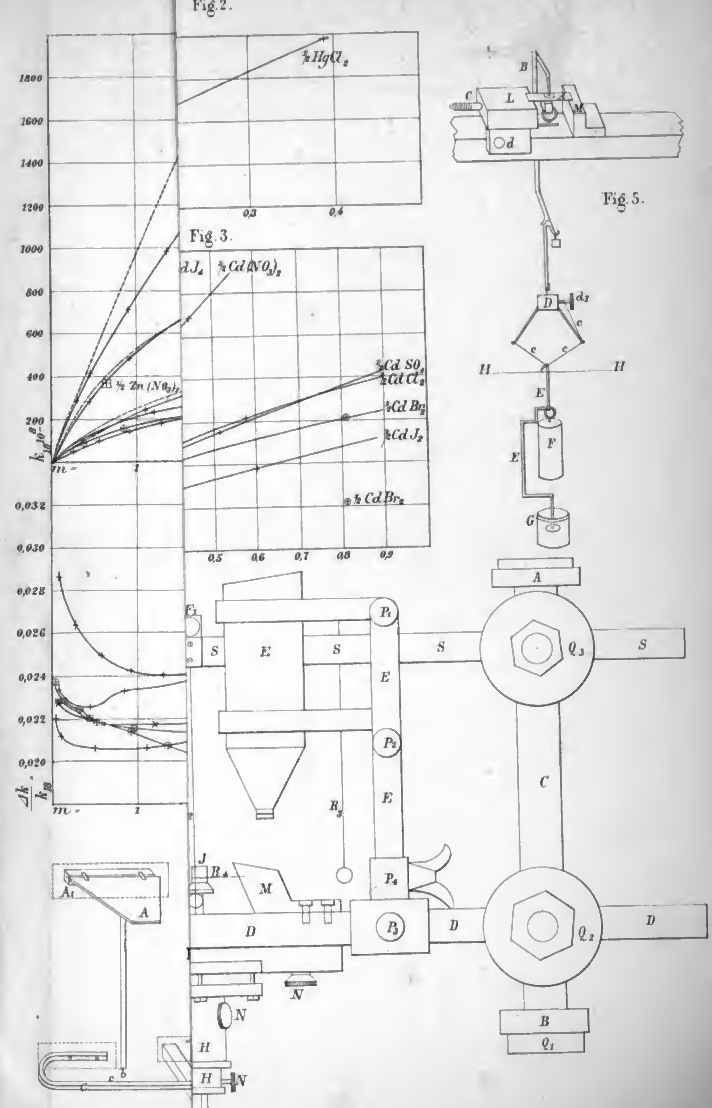
Bd. XVIII. (Bohn) p. 348 Z. 12 lies $\frac{l^3}{m\,l^2}$ statt $\frac{l^3}{m^2}$.

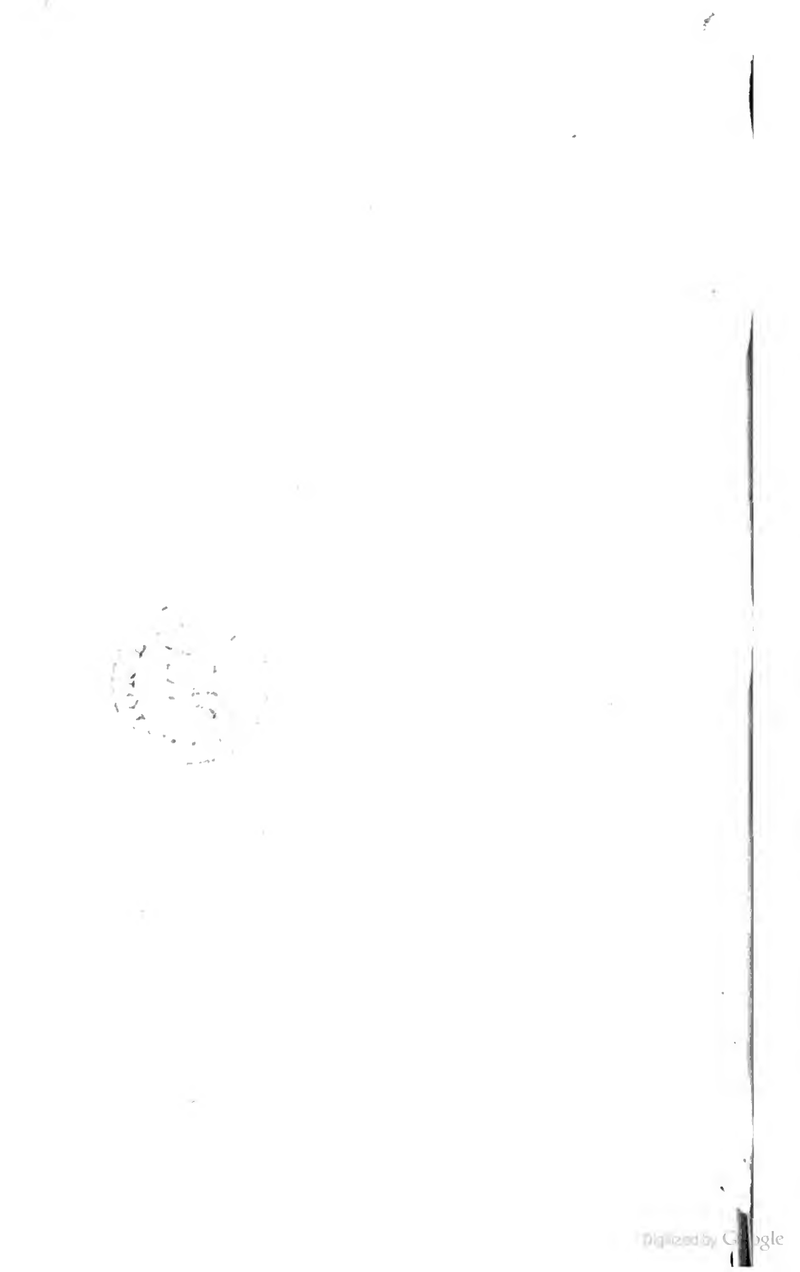
Bd. XVIII. (Vierordt) p. 476 Z. 11 v. u. lies: die ε-Werthe über Eins sind. also sozusagen objective Beweise, dass auch die weiteren übrigen ε-Bestimmungen zu hoch sind, statt: die ε-Werthe über Null.

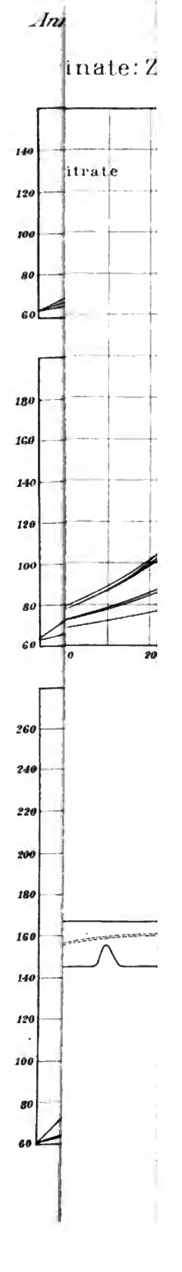
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


Fig. 5.
y
x
1
2
3
4
5
6
7
M
L
L'
K
T
B
J
G
s
II
Fig. 7.
Fig. 8.
y
x
o
1
√3
Axe
d
e
b
a
i
w
f
Fig. 9.
y
x




Fig. 2.
½ HgCl₂
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0,3
0,4
Fig. 3.
dJ₂
½ Cd(NO₃)₂
½ Zn(NO₃)₂
½ Cd SO₄
½ Cd Cl₂
½ Cd Br₂
½ Cd J₂
½ Cd Br₂
0,032
0,030
0,028
0,026
0,024
0,022
0,020
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
Fig. 5.
B
C
L
M
d
D
d₁
c
H
E
F
G
A
S
E
P₁
P₂
P₃
P₄
Q₁
Q₂
Q₃
R₃
R₄
J
M
D
N
H
A₁
b



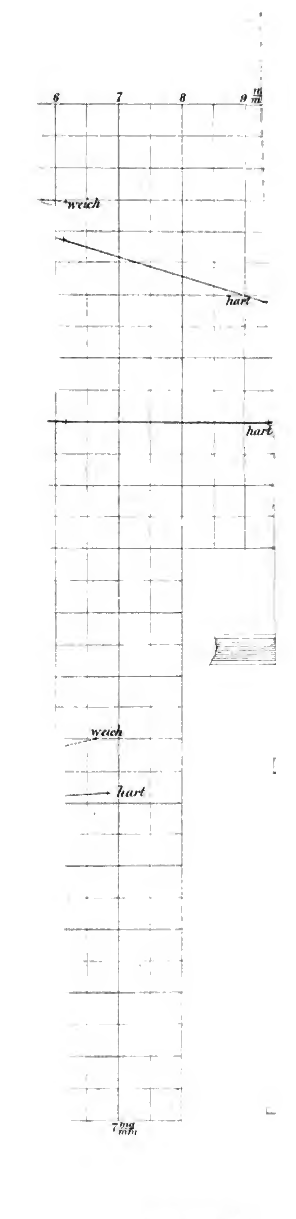


inate: Z
itrate
140
120
100
80
60
180
160
140
120
100
80
60
0
20
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60









6
7
8
9 $\frac{m}{m}$
weich
hart
hart
weich
hart
7 $\frac{mg}{mm}$

Fig. 4.

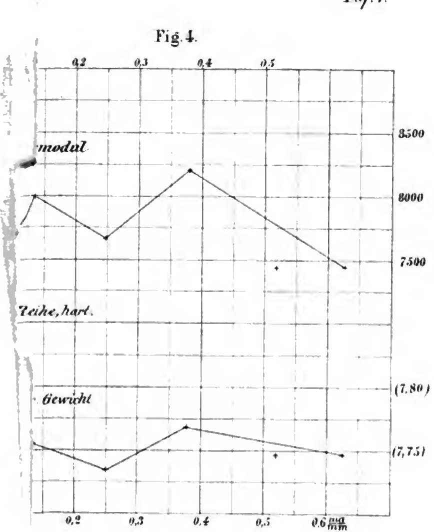

0,2
0,3
0,4
0,5
8500
modul
8000
7500
Reihe, hart.
(7,80)
Gewicht
(7,75)
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6 mm

Fig. 2.

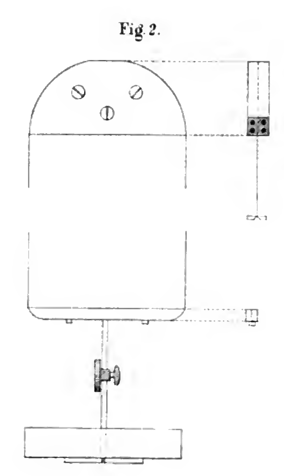
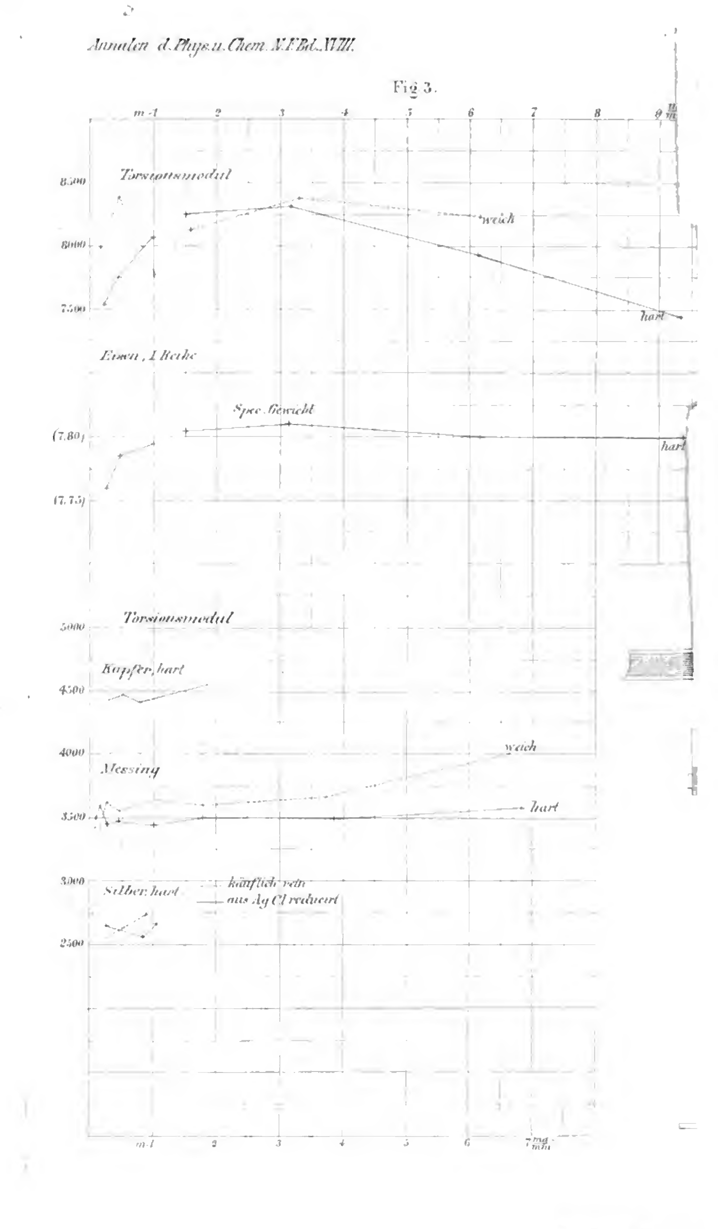


Fig. 3.


Torsionsmodul
weich
hart
Eisen, I. Reihe
Spec. Gewicht
hart
Torsionsmodul
Kupfer, hart
Messing
weich
hart
Silber, hart
käuflich rein
aus Ag Cl reducirt
8500
8000
7500
(7.80)
(7.75)
5000
4500
4000
3500
3000
2500



